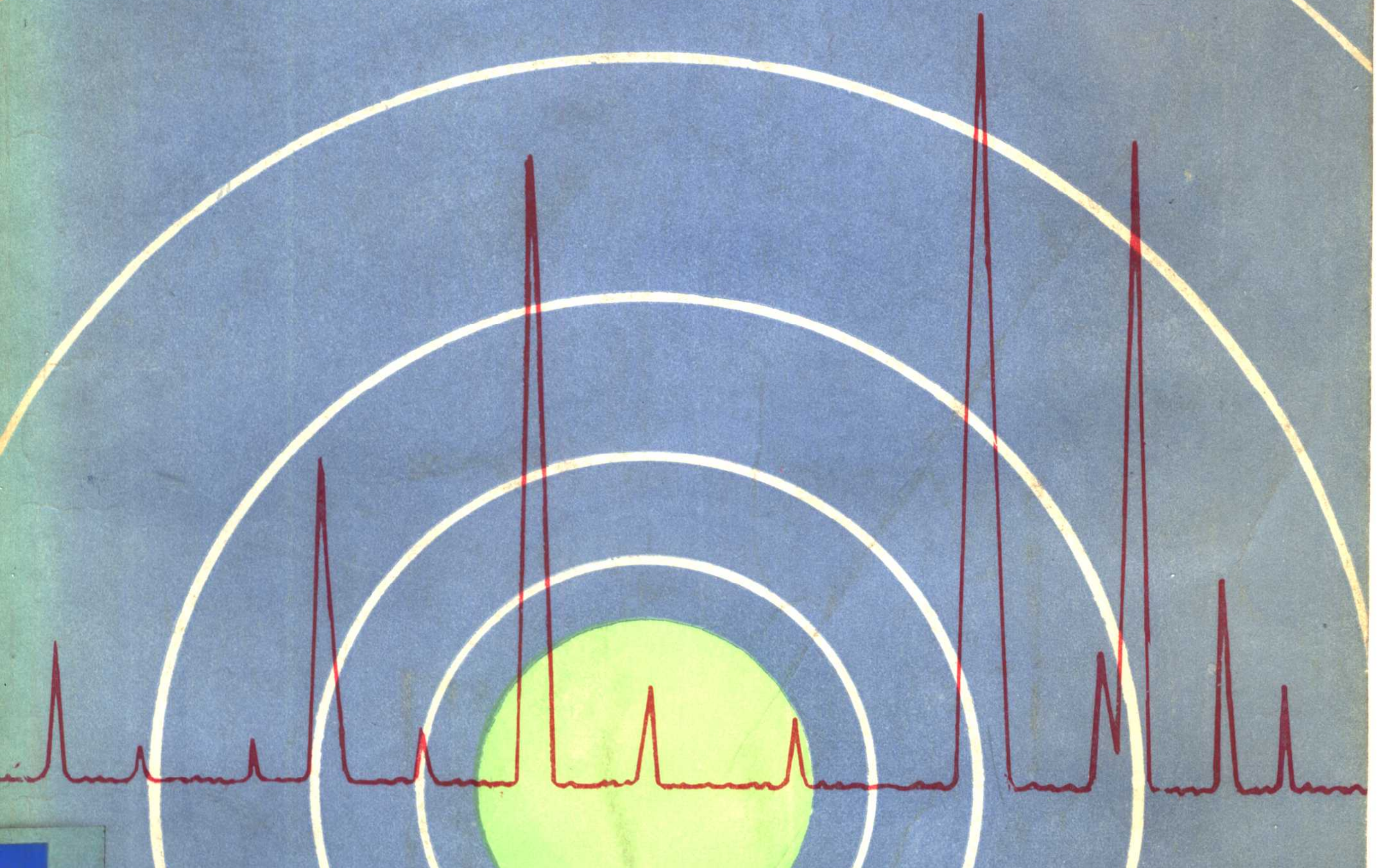
物理实验

EXPERIMENTS IN PHYSICS

查述传 主编



北京理工大学出版社

物 理 实 验

查述传 主编

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书是为大学理工科的本科生(其中也包括夜大、函大的学生)而编写的教材。它是作者在从事多年的物理实验教学实践工作并在原来使用多次的内部讲义基础上作了较大的修改和充实而写成的。

本书内容包括：力学、热学、电磁学、光学和近代物理实验共计53个。此外在第一部分中还着重介绍并讲述了误差与实验数据的处理，以便使学生在实验后能较好地掌握数据处理的方法。

本书力求突出培养学生的独立思考和动手动脑的能力，内容上不求多求全，而将能力培养寓于具体的实验教学中。

物 理 实 验

查北传 主编

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

通县向阳印刷厂印刷

787×1092毫米　16开本　18.5印张　460千字

1989年8月第一版　1989年8月第一次印刷

ISBN 7-81013-256-3/O·47

印数：1—6500册　定价：3.70元

人们把学校简单地看作是一种工具，靠它来把最大量的知识传授给成长中的一代。这种看法是不正确的，知识是死的，而学校却要为活人服务。”

“学校的目标应当是培养有独立行动和独立思考的人。”

爱因斯坦

（1936年纽约州立大学
美国高等教育三百周年纪念会）

7AG31/08

前　言

1987年国家教委颁布《高等工业学校物理实验课程基本要求》，依据《要求》结合我校具体情况，经过教研室讨论，重新制订了新的教学大纲。本教材是按照新的教学大纲编写的。教材供工科本科学生作为课程教材，兼可供理科学生作课程教材。

物理实验是一门独立设置的课程，它与大学物理课既有联系又有一定的独立性。它的任务不仅是验证物理理论，巩固、加深对物理现象与规律的认识，更主要的是通过物理实验教学，对学生进行物理思想、物理方法、实验方法的教育；进行基本实验技能、实验方法的训练；培养学生分析问题解决问题的能力，自己获得知识的本领；以及树立实事求是的科学态度、严谨的作风。

基于教学时数的限制及科学技术的发展，本教材不可能也无必要将物理实验的较全面的知识传授给学生，而将着眼点放在能力的培养上。正如爱因斯坦所说："发展独立思考和判断的一般能力，应当始终放在首位，而不应当把获得专业知识放在首位"。能力的培养比知识传授更重要，知识是死的，能力是活的。但能力的培养不是抽象的，要将其寓于实验教学之中。

为了实现上述目的，在教材编写上，力求按照由浅至深、循序渐进的原则，逐步提高对学生的要求，增加教材的深度、广度。在学时安排上，由二学时分阶段增加到四学时；在难度上，实验内容、实验步骤由开始写得详细、具体，到后来只提要求，自己设计实验方法、实验步骤；在原理阐述上，逐渐地有意识地对有些问题不作详细叙述，留给学生查阅参考书自己思考、自己观察、自己分析。

本教材较过去的教材有较多的扩充与改变，在1986年的版本上充实了有关谐振动、物性、静电、磁学、几何光学、近代物理等十九项实验。与此同时对原有项目也部分地进行了充实、提高，以适应不同层次教学需要。根据专业教学要求选作必修、选修、设计性实验。国际纯粹物理学和应用物理学联合会(IUPAP)于1987年召开的第19次大会上，给出了基本物理常数的最新推荐值，这些数值引自国际科学和技术数据委员会(CODATA)第63号公报，很有参考价值，特作为附录编入，供读者查阅。

本教材是在教研室同志长期教学实践的基础上写成的。不少同志为它付出过辛勤的劳动，今天的教材从过去的教材中继承了许多有益的东西。多年从事实验室建设的同志在建设实验室的同时也就为编写教材提供了丰富的素材。本教材误差与实验数据处理、力学与热学部分由李本桐编写，万葆红、张瑞同志参加了个别实验的编写工作；电磁学及附录部分由王学英编写，张国维同志参加了讨论；光学及近代物理实验部分由查述传编写，石德华同志参加了讨论。由于编写时间仓促，许多地方推敲不够，再加经验不足，书中难免有错误不妥之处，望读者批评指正。

1988年7月

编者

目　录

第一部分　误差和实验数据处理

第二部分　力学与热学实验

第三部分　电学与磁学实验

第四部分　光学与近代物理实验

第五部分　附　录

第一部分　误差和实验数据处理

物理概念和物理定律是从哪里来的？归根到底，它们都是来自实践，特别是来自科学实验。在科学技术高度发展的今天，新的物理学的知识更主要地是从物理实验中获得的。

物理学是实验科学。在理工科大学教学中，物理实验课程占有重要的地位。它的重要性不仅表现在它在物理学发展中所起的关键性作用，还表现在它对学生在整个大学学习期间掌握实验技能，提高实验技术，培养解决实际问题能力方面所起的重要作用。特别是当前面临新的技术革命，学科之间互相渗透是当前科学发展的特点之一。物理学是基础学科，物理学的成就向各学科渗透更甚。有了丰富的物理知识，包括理论知识和实验技能方面的训练，才可能创造性地作好科技工作，物理基础好的人，喜欢想问题，爱探索，因此可以促使技术向更高和更深的层次发展。

物理实验是一门基础课程。它和理论教学有联系，对巩固、充实、扩大课堂讲授的理论知识起一定的作用。但是，它不是从属于理论教学的。做为一门课程，有它自己的教学内容和教学方法。学习物理实验，主要是在培养实验能力方面起到打好基础的作用。实验课中所学到的东西在后序课的实验环节中，在毕业后参加的实际工作中都是有用处的。

物理实验教学的主要任务是：

(1) 学习物理实验的基础知识，掌握物理实验的基本方法和基本技能，其中包括测量原理和方法；仪器的选择和使用；实验数据的处理和对实验结果的分析等。

(2) 通过实验，培养学生有一个正确的治学态度，如严肃认真，实事求是，勤于动手，注重理论联系实际等，并培养同学爱护仪器设备，爱护国家财产等优良品质。

一、直接测量的误差

1.误差的基本概念　物理实验就是用实验方法研究物理规律，以探明物理现象的本质。物理规律讲的是有关物理量之间在数量上的关系。实验方法中总是包括对物理量进行测量。

所谓测量，就是把待测的物理量与一个该物理量的标准值(单位)进行比较，把待测量表示成该标准值的倍数，这个倍数就是待测量的测量值。在不同的单位制中，物理学中的基本物理量都有相应的基本单位。比如，在国际单位制中，长度的单位是米，质量的单位是千克，时间的单位是秒，等等。

如果通过测量，直接就能得到实验结果，这样的测量称为直接测量。如用米尺测量一个长度，或用天平测一个物体的质量，这都是直接测量。不过，在物理实验中一般测量的是导出量，情况比较复杂，要得到实验结果，需要在进行一些直接测量之后，把直接测量结果代入公式进行计算，或是对数据用其它方法进行处理，才能得到最后的实验结果，这样的测量就是间接测量。

不论是直接测量或是间接测量，待测的物理量都有一个真值，真值是在某时刻某物理状态下的客观值，即实际值。真值是必然存在的。例如，在某时刻电路中某电阻的两端必有确

定的电压值；在一定的温度下，一物体必有确定的体积；一金属棒必有确定的长度；某一事件的发生必有一确定的时刻，等等。但是，不论是直接测量还是间接测量，所测出的数值都不可能是物理量的真值。测量值总是要偏离真值的。

例如，如图0-1所示，我们用米尺测量AB之间的长度l，米尺的一端与A端对齐，从米尺上读出B端端面的读数，B端是在3厘米以上第三个小格内，说明AB的长度l介于3.2厘米和3.3厘米之间。由于0.1厘米的小格内没有更精细的分度，因此我们就不可能再精确地读出毫米以下第一位的数字，它只能靠我们凭借观察能力来估计，得到测量结果为l=3.24厘米。l的真值不会正好是3.24厘米。

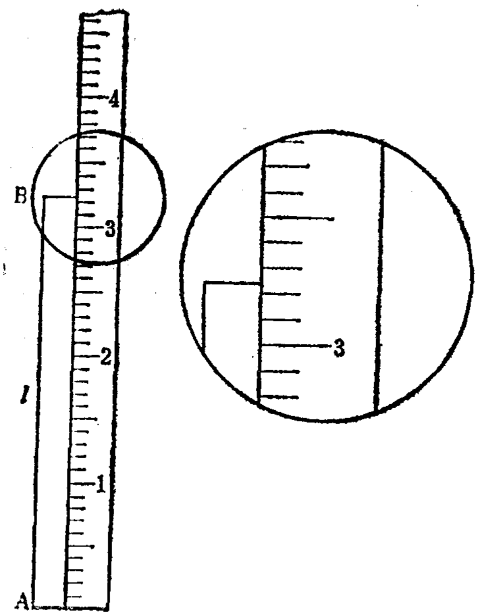


图0-1

一般来说，如果用n表示一个物理量的测量值，用N表示它的真值，$n-N$就是测量值对真值的偏离，不等于零，就是说测量值有误差。$n-N>0$的误差称为正性误差，而$n-N<0$的误差称为负性误差。

直接测量有误差，自然间接测量也必然有误差。

误差来源于主观和客观两个方面的因素，主观因素是由实验者本人造成的，客观因素是由仪器的精确度和实验装置、实验方法、实验环境等带来的。

有关实验误差的理论和实践，并非只适用于物理实验，对于自然科学中的实验工作是普遍适用的。

按照误差的性质，可以把误差分为偶然误差和系统误差。

2.偶然误差 对一个物理量进行多次测量时，各次测量值不完全相同，有的比真值大，有的比真值小，有的偏离真值多，有的偏离真值少。测量值在真值附近有起伏现象。如果只进行一次测量，测量结果是不确定的，偶然的。当进行多次测量时，测量值显示出统计规律。具有这种性质的误差称为偶然误差或随机误差。

例如，用停表测一时间间隔，开始计时和终止计时的时刻往往掌握不准确，可能比实际情况稍有提前或拖后，这样测得的时间间隔可能比真值大，也可能比真值小。这样的实验误差是偶然误差。又如，在图0-1中用米尺测量长度，由于不足1毫米的量是估计的，得到的=3.24厘米的测量值可能比真值大，也可能比真值小，这样的实验误差也是偶然误差。

观察者在判断上的小的差错，以及周围环境对实验装置或实验条件的小的干扰(如机械振动，温度或压强的起伏等)都会造成偶然误差。

(1) *多次测量和分布函数* 通过对一物理量进行多次测量，可以呈现出偶然误差的规律性。例如，对某一物理量N进行10次测量，测量值n列表如下：

一组N的测量值　　表0-1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	26.4	23.9	25.1	24.6	22.7	23.8	25.1	23.9	25.3	25.4

为了说明这些测量值是怎样分布的，我们可以把 n 值分为很多个等值的小区间，统计出测量值在每个小区间内出现的次数，统计结果如表0-2所示。这个结果也可以用图形表示，如图0-2所示。

N的测量值在等值小区间上的分布　　表0-2

n的区间	22到23	23到24	24到25	25到26	26到27	27到28
测量值出现次数	1	3	1	4	1	0

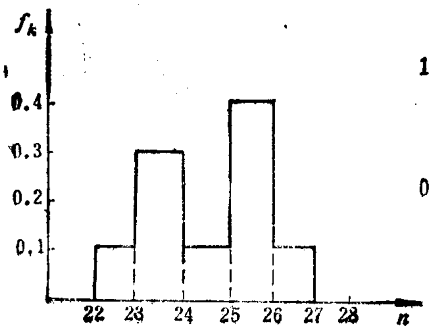
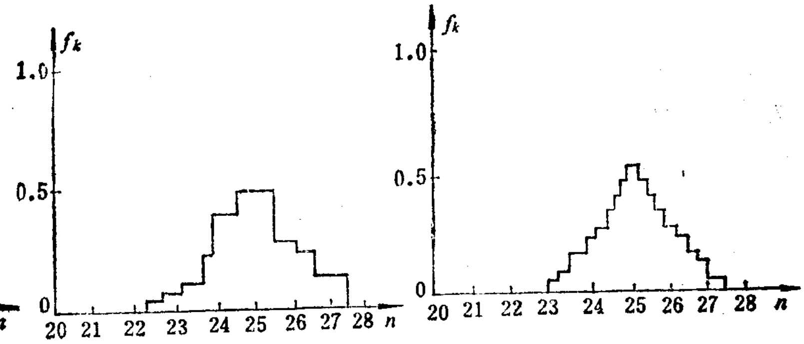


图0-2　区间矩形图
每个矩形面积表示n值落入相应区间内的测量次数的百分比（测量次数$k=10$）



（a）（$k=100$）　（b）（$k=1000$）

图0-3

增加测量次数，比如$k=100$或1000，并将间隔缩小，将得到图0-3(a)和(b)所示的图形。

如果测量次数无限增大，并把间隔dn无限缩小，将得到一条光滑的曲线，如图0-4所示。剖线所画的长条面积$f(n)\mathrm{d}n$表示测量值在n到$n+\mathrm{d}n$间出现的几率。

从图0-4可以看出，当$n=N$时，$f(n)$值最大，故真值N是测量值n的最可几值，位于中点，两侧相对中点有对称性。从图形还可以看出偶然误差具有以下几个性质：

(i) 大误差比小误差出现的几率小，误差很大的测量值几乎是不可能出现的。

(ii) 大小相同的正性误差和负性误差出现的几率相等。

图0-4所表示的测量值的分布是只有偶然误差的情况，这种分布称为高斯分布，纵坐标所表示的$f(n)$称为误差分布函数，根据统计理论可以证明

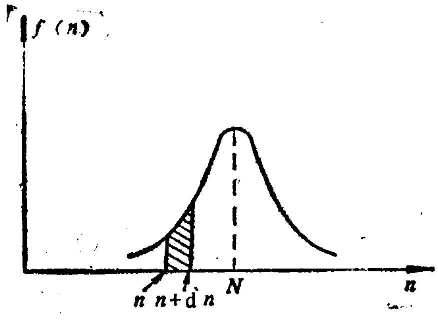


图0-4　测量次数趋于无限时测量值n的分布

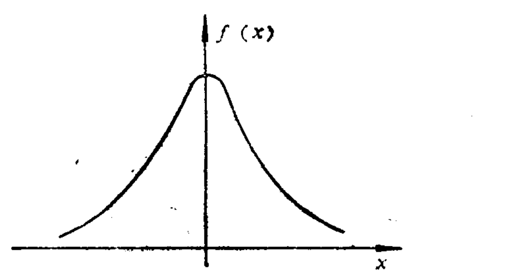


图0-5

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-(n-N)^2/2\sigma^2} \tag{0-1}$$

变换变量，引入$x=n-N$，则分布函数可改写为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-x^2/2\sigma^2} \tag{0-2}$$

x就是测量值n对真值N的偏离值，以x为横坐标，$f(x)$为纵坐标，分布曲线如图0-5所示。

分布函数满足归一化条件，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=1 \tag{0-3}$$

它表示曲线下边覆盖的总面积为1，即测量值的误差为各种可能值的几率总和为百分之百。为了使测量值更接近于真值，实验中往往进行多次测量，设测量的次数为k，各次测量值为n_1，n_2，…，n_k，用平均值

$$\bar{n}=\frac{n_1+n_2+\cdots+n_k}{k}$$

表示测量值。在对多次测量值进行算术平均的过程中，正性误差和负性误差有一部分互相抵消，因而比单次测量准确。测量次数越多，$\bar{n}$越接近于真值。$\bar{n}$又称为最佳测量值。

(2) 标准误差　为了说明单次测量值n_i的实验误差的大小，常常使用标准误差σ_n，σ_n的定义为

$$\sigma_n=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(n_i-N)^2}{k}} \tag{0-4}$$

它是测量值误差的方均根数值。

因为真值N不可能测到，在计算σ_n时可以用最佳测量值$\bar{n}$代替真值N。在有限次测量的情况下，$\bar{n}$虽然比单次测量值n_i更接近于真值N，但是和N还是有差别的。由误差理论可以证明，用$\bar{n}$代替N时，σ_n可由下式表示

$$\sigma_n=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(n_i-\bar{n})^2}{k-1}} \tag{0-5}$$

如果$k=1$，即对n只进行一次测量，在(0-5)式中$\bar{n}=n_1$，根号内分子为零，分母$k-1=0$，即在$k=1$时，(0-5)式不能给出σ_n的确定值。而由(0-4)式得$\sigma_n=|n_1-N|$，这个结果是合理的。

如果k为无限大，即进行很多很多次测量，则$\bar{n}\doteq N$，$k-1\doteq k$，(0-4)和(0-5)两个式子就没有区别了。虽然我们没有直接证明(0-5)式，但从$k=1$和k为无限大的特殊情况，说明了(0-5)和(0-4)两式的一致性。

n的平均值$\bar{n}$的误差比单次测量n_i的要小，因为它更接近于真值。由误差理论证明，$\bar{n}$的标准误差与n_i的标准误差有如下关系

$$\sigma_{\bar{n}}=\frac{\sigma_n}{\sqrt{k}}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(n_i-\bar{n})^2}{k(k-1)}} \tag{0-6}$$

从(0-6)式可以看出，$\bar{n}$的标准误差与测量次数k有关，k越大，$\sigma_{\bar{n}}$越小。

从(0-4)、(0-5)和(0-6)式可看出：σ_n的大小反映k个测量值的离散程度，σ_n越大，测量值越分散，精密度越小；反之，σ_n越小，测量值越集中，精密度越高。

测量值偏离平均值的大小，通称为偏差，而测量值偏离真值的大小，称为误差。有时把偏差也称为误差，两者不做严格区分。

由(0-4)式可以看出，σ_n可以写为

$$\sigma_n=\sqrt{\overline{x^2}} \tag{0-7}$$

当k趋近于无穷，而测量值n连续分布的情况下，有

$$\overline{x^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x$$

$$\text{而}\quad\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}\sigma^3$$

$$\therefore\overline{x^2}=\sigma^2 \tag{0-8}$$

比较(0-7)和(0-8)两式可以看出，在分布函数中的σ正是式(0-4)所定义的标准误差σ_n，以后单次测量值的标准误差就用σ表示，测量值的平均值的标准误差才加脚标，即$\sigma_{\bar{n}}$。

σ是分布函数中的一个参量，σ值的大小与分布函数曲线的形状有关，如图0-6所示，由图可知，σ值越小，测量值越集中，表示测量精密度高。可以另外引入精密度指数h，它与σ的关系为

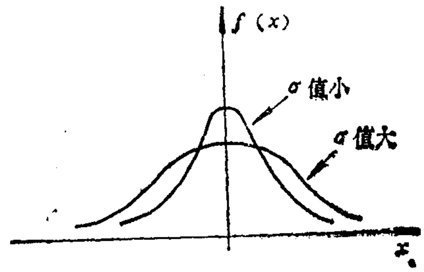


图0-6

$$h=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$$

(3) σ的物理意义、劣值的剔除　N在$n\pm\sigma$区间内，即x在$-\sigma$到$+\sigma$区间内的几率为

$$\int_{-\sigma}^{+\sigma}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\sigma}^{+\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=68.3\% \tag{0-9}$$

同样有：

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-2\sigma}^{+2\sigma}f(x)\mathrm{d}x=95.4\%\\&\int_{-2.5\sigma}^{+2.5\sigma}f(x)\mathrm{d}x=98.8\%\\&\int_{-3\sigma}^{+3\sigma}f(x)\mathrm{d}x=99.7\%\\&\int_{-4\sigma}^{+4\sigma}f(x)\mathrm{d}x=99.99\%\\&\int_{-0.674\sigma}^{+0.674\sigma}f(x)\mathrm{d}x=50\%\end{aligned}\right\} \tag{0-10}$$

在对一个物理量进行多次测量时，可能会有个别的测量值与其他数据很不一致。这时我们就需要判断这个反常的数据是不是由于某种错误造成的，并应剔除，或是属于正常的测量值，只是误差较大，应与其他数据一样一起被采用。

比如，测量六次摆的周期，得到的六个数为

3.8,　3.5,　3.9,　3.9,　3.4,　1.8　(秒)　(0-11)

在这一组数据中，第六个数据1.8秒的第一位数就与所有其他数据不同，需要决定如何处理。依据正态分布，对同一物理量，某测量值偏离其他测量值较远，虽然出现的几率较小，仍是可能的。但是，出现象(0-11)中第六个数据那样大的偏离可能性是非常小的，所以我们偏向于怀疑1.8秒是由于某些未察觉的错误或其它外界原因造成的，或是读错了数，或者是计时器出了毛病，在计时过程中停止了计时。如果仔细检查，有可能找出出现反常数据的原因。在这种情况下，就应该把这个反常数据剔除掉。

但有时可能找不到出现反常数据的原因，则应设法判断数据是否反常，以决定是否剔除。

不同测量次数下的 t 值　　表0-3

k \ t \ γ	90%	95%	99%
2	6.31	12.71	63.66
3	2.92	4.30	9.93
4	2.35	3.18	5.84
5	2.13	2.78	4.60
6	2.02	2.57	4.03
7	1.94	2.45	3.71
8	1.90	2.37	3.50
9	1.86	2.31	3.36
10	1.83	2.26	3.25
11	1.81	2.23	3.17
12	1.80	2.21	3.11
13	1.78	2.18	3.05
14	1.77	2.16	3.01
15	1.76	2.15	2.98
16	1.75	2.13	2.95
17	1.75	2.12	2.92
18	1.74	2.11	2.90
19	1.73	2.10	2.88
20	1.73	2.09	2.86
25	1.71	2.06	2.79
30	1.70	2.05	2.76
40	1.69	2.02	2.71
60	1.67	2.00	2.66
120	1.66	1.98	2.62
∞	1.65	1.96	2.58

为解决此问题，可利用(0-10)中的几个积分式子。从(0-10)的第二个式子和第三个式子可以看出，真值落在$n\pm2.5\sigma$区间内的几率是98.8%，落在$n\pm3\sigma$区间内的几率是99.7%，测量值偏离真值超过2.5σ和3σ的几率分别为1.2%和0.3%，即可能性是非常小的。

因此，可以规定，在$\bar{n}\pm3\sigma$之外的测量值是反常的，应予剔除。有的规定数据在$\bar{n}\pm2.5\sigma$区间之外者为反常数据予以剔除。我们采用前者。

数据剔除的问题是一个重要的问题，对反常数据如何处理意见还不完全一致，决定2.5σ或是3σ毕竟是一个主观的决定，反常数据有时也可能包含着重要的物理内容，轻率地决定剔除是不妥当的，以(0-11)中的一组数据为例，最好的办法是对摆的周期的测量再重复多次。

按照规定，测量值不在$\bar{n}\pm3\sigma$区间内就予以剔除，(0-11)中的最后一个数据1.8秒是否该剔除呢？

前五个数据的平均值为$\bar{n}=3.7$秒

$$\sigma=0.2\text{秒},\qquad 3\sigma=0.6\text{秒}$$

第六个数据偏离平均值为$|1.8-\bar{n}|=1.9$秒$>3\sigma$，故1.8秒应剔除。

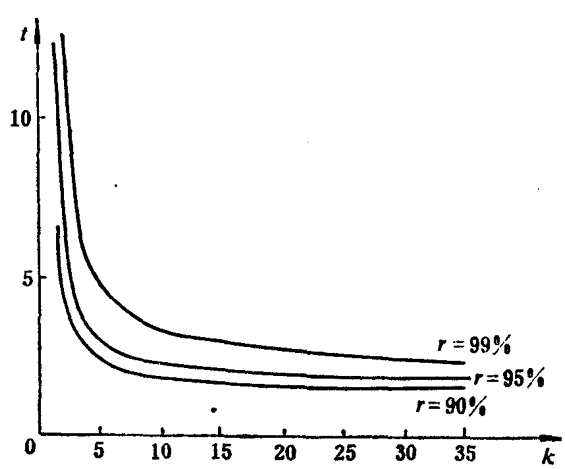
(4) *测量次数与误差的关系 置信度* 一测量值如果写成$n\pm\sigma$，真值N在这个范围内出现的几率为68.3%，或者说$n\pm\sigma$这一测量结果只有68.3%的可能性是正确的，可信的，68.3%就称为$n\pm\sigma$的置信度，用γ表示。因此，$n\pm2\sigma$的置信度$\gamma=95.4\%$，$n\pm3\sigma$的置信度是99.7%。

一般而言，$n\pm t\sigma$中的t值与置信度γ有关。即$t=t(\gamma)$，上述不同γ情况下的t值都是属于测量次数k为无限的情况，如果测量次数k为有限量，t值还和测量次数有关。

以置信度为90%，95%和99%为例，把不同测量次数下的t值，列表如表0-3所示。

把表中数据作图，得到图0-7。

从图0-7可以看出，当k值比较小时，t值随着k值减小而急剧增大，但是当k值超过10以后，t值就基本不再变化。因此，在多次测量中，测量很多很多次当然更好，但收效不大，一般测量十次左右就可以了。



k－t关系图

图0-7

(5) *算术平均误差$\overline{\Delta n}$* 在估计偶然误差时，除标准误差外，有时也采用算术平均误差，算术平均误差$\overline{\Delta n}$是

$$\overline{\Delta n}=\frac{\sum_{i=1}^{k}|n_i-\bar{n}|}{k} \tag{0-12}$$

在测量次数很多时，$\overline{\Delta n}$和σ有如下关系

$$\overline{\Delta n}\doteq0.8\sigma$$

$n\pm\overline{\Delta n}$的置信度为57.63%。

算术平均误差和标准误差是表示测量误差的两种方法。由于在正态分布函数$f(x)$中出

现的是标准误差σ，如果已知直接测量值的标准误差，可以计算出间接测量值的标准误差，有相同的置信度。算术平均误差就没有这个性质，即如果已知直接测量值的算术平均误差（或标准误差），就没有办法计算间接测量值的算术平均误差。因此，如果只是对误差进行粗略估计，测量误差的两种表示方法都可以用；如果要求对误差进行严格评估，用标准误差σ更为合理。在本书所列实验项目中，主要是用算术平均误差$\overline{\Delta n}$表示测量误差的大小，对标准误差σ的意义只要求有一般的了解。

（6）*单次测量结果的误差估计*　实验中有时不允许或没必要进行多次测量，只是进行一次测量，这时取仪器最小分度的一半为测量误差，比如用米尺测量长度$l=3.24$厘米，米尺的最小分度是0.1厘米，误差就定为$\Delta l=0.05$厘米，这样确定的误差一般都是比进行多次测量后得到的$\overline{\Delta n}$大。即$l=3.24\pm0.05$厘米有较高的置信度。

在多次测量中，如果测量次数为k，而k个测量值又非常接近，甚至在k个测量值中有许多个完全相同，比如用游标卡尺测量钢管的外径D_1，得到的十个数据为

19.52　19.52　19.52　19.52　19.52

19.50　19.52　19.52　19.52　19.52　（毫米）

计算出　$\overline{D_1}=19.52$毫米

$\sigma_{\overline{D1}}=0.002$毫米

$\overline{\Delta D_1}=0.002$毫米

在这种情况下，测量误差很小，和用千分尺测量产生的误差有相同的数量级，这不合理。如果十个数据都是19.52毫米，用$\overline{\Delta D_1}$表示的误差为零，若只考虑$\overline{\Delta D_1}$，更不合理。这时用仪器误差表示测量误差，对精度为0.02毫米的游标卡尺，仪器误差为0.01毫米，因此，测量结果应写为$D_1=(19.52\pm0.01)$毫米。

3.系统误差　除去偶然误差外，另一种性质的误差是系统误差，这种误差常常是恒定的。找到产生系统误差的原因后，可以使系统误差减小。例如，用一把比标准尺长度偏短的尺子测量长度时，读数总是偏大，用一支比标准钟走得慢的表测量时间时，读数总是偏小，这样产生的误差是系统误差。平时使用的尺子不是标准尺，使用的钟也不是标准钟，测量中系统误差总是存在的。如果系统误差和偶然误差相比至少小一个数量级，就可以忽略系统误差。否则两种误差都要计入。

用千分尺测量长度，如零记数$S_0>0$，则读数总是偏大，这也是系统误差。

造成系统误差的最明显的原因是仪器没有调整好，如尺子的长短，钟表的快慢，千分尺的零记数不为零，仪器未经过标定，等等。

实验方法不妥当也会产生系统误差。比如我们用停表测量一物体从静止状态沿斜面顶端下滑到地面所需要的时间t，本应该把物体放到斜面顶端后一松手就开始计时。如果看到物体开始下滑才计时，这样测得的下滑时间总是偏小。

在测黄铜棒线膨胀系数的实验中，金属棒是用100°C的水蒸汽加热的，用温度计测得最后达到的温度t_2是金属棒中部的温度，由于热量散失，金属棒两端的温度要低一些，如果把t_2视为整个金属棒达到的温度，这样计算出来的线膨胀系数α总是偏小，这也是由于实验条件或实验方法方面的缺欠带来的系统误差。

系统误差的特点在于误差的单向性，即总是正性误差或总是负性误差。

系统误差的大小多半是难于估计的，也难于发现。用不同的仪器设备或用不同的实验方法，或在不同的实验条件下进行测量，然后进行比较，就可以发现系统误差。要找出产生系统误差的原因，采取措施尽量减小系统误差。减小系统误差有以下一些方法：

(1) 对数据进行修正，以抵消系统误差对数据的影响 比如用千分尺测量长度，因未考虑零记数S_0而使读数都偏大，产生系统误差，修正数据的办法是将测量值都减去S_0。

(2) 改进仪器设备 如果系统误差是由于仪器设备本身产生，则要改进仪器设备，如对仪器进行标定，换掉偏短的尺子或偏慢的钟，就可以大大减小测长或测时中出现的系统误差。

(3) 改进实验条件或实验方法 例如，用惠斯登电桥测电阻时，桥的电阻丝直径常常不够均匀，所测出的电阻值常偏大或偏小。我们采用将未知电阻和做为标准的电阻箱位置对换的方法，进行两次测量，对结果取平均值做为测量值，以减小由于电阻丝截面不均匀而产生的系统误差。

实验中总是同时存在着系统误差和偶然误差，只是在一个实验中可能有一个是主要的，另一个太小可以忽略。也有时两个误差的数量级相同，哪一个都不能忽略，这时考虑实验误差应该包括偶然误差和系统误差。

有时难于区分偶然误差和系统误差。比如，一支手表如果24小时内慢2秒，用它计时会产生系统误差。如果这支手表在24小时内最多差2秒，没有说明是快还是慢，也可能差值不到2秒。这时，系统误差可以当做偶然误差处理。偶然误差中的仪器误差多半就是属于这种情况。

4. 绝对误差和测量结果的表示　相对误差

(1) 绝对误差 误差的绝对值，即误差的大小称为绝对误差。如前边引入的

单次测量(即多次测量中的某一次测量)的标准误差

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i-\bar{n})^2}{k-1}}$$

平均值$\bar{n}$的标准误差

$$\sigma_{\bar{n}}=\frac{\sigma}{\sqrt{k}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i-\bar{n})^2}{k(k-1)}}$$

算术平均误差

$$\overline{\Delta n}=\frac{\sum_{i=1}^{k}|n_i-\bar{n}|}{k}$$

只进行一次测量时，用仪器最小分度的一半表示测量误差的大小。

这些都是绝对误差，只是具体地表述方法不同。一般用Δn表示测量的绝对误差。

(2) 测量结果的表示 不论是直接测量或是间接测量，测量结果应表示成如下形式：

$$N=n\pm\Delta n \tag{0-13}$$

其中n是测量值，Δn是绝对误差。怎样求出n和Δn，和进行测量的具体情况有关。

关于绝对误差Δn，应包括系统误差和偶然误差。系统误差主要是仪器误差，仪器误差是在正确使用仪器的条件下，在测量次数无限增大时，最佳测量值$\bar{n}$可能具有的最大误差。仪器误差是由仪器的精度所限定的，是由制造工厂或计量单位使用更精密的量具经过检定、

比较给出的。故

$$\Delta n = \Delta n_{偶} + \Delta n_{仪}$$

当$\Delta n_{偶} \gg \Delta n_{仪}$时，可以不考虑仪器误差，反之，当$\Delta n_{仪} \gg \Delta n_{偶}$时，就只考虑仪器误差。

在不考虑仪器误差的情况下，在多次测量中，用

$$N = \bar{n} \pm \Delta n \quad (\text{或} N = \bar{n} \pm \sigma_{\bar{n}})$$

表示测量结果。

对于一次测量，Δn可根据仪器的精度和读数的判断能力来确定。

(3) *相对误差* 实验中有时需用相对误差说明测量的准确程度，因为待测量的大小不同时，绝对误差可以相同，但测量结果的优劣可以不同。例如用米尺测量长度，若被测物体的长度分别为90.00厘米和1.00厘米，绝对误差都是0.05厘米，前者测量90厘米差 0.05 厘米，后者只测 1 厘米就差0.05厘米，两者的测量优劣显然不相同。相对误差是绝对误差与真值的比值，即

$$E = \frac{\Delta n}{|N|}$$

其中Δn是绝对误差，N是真值。一般测量中绝对误差很小，即$\Delta n \ll n$，而$N \doteq n$，故相对误差可以表示为$E = \frac{\Delta n}{|n|}$，分母用测量值代替真值。

绝对误差和相对误差从不同的角度说明测量的精确程度，它们的值越小，表示测量值越接近于真值。

二、误差的传递公式

以上讨论的是直接测量结果的误差问题。既然直接测量有误差，将直接测量结果代入公式进行计算，得到的间接测量结果也必然存在误差。直接测量的误差导致间接测量出现误差，这就是误差的传递。

1. **最大误差** 设直接测量量为A，B，C，…，而间接测量量N是A，B，C，…等的函数，$N = f(A, B, C, \cdots)$。$A, B, C \cdots$等的测量结果为$a \pm \Delta a$，$b \pm \Delta b$，$c \pm \Delta c$，…。

计算出间接测量的测量值为

$n \pm \Delta n' = f(a \pm \Delta a, b \pm \Delta b, c \pm \Delta c, \cdots)$

由于 $n = f(a, b, c, \cdots)$

$\therefore \quad \pm \Delta n' = f(a \pm \Delta a, b \pm \Delta b, c \pm \Delta c, \cdots) - f(a, b, c \cdots)$

按高等数学中多元函数的泰勒公式展开，并忽略Δa，Δb，Δc等的高次项，上式变为

$$\pm \Delta n' = \pm \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a \pm \frac{\partial f}{\partial b} \Delta b \pm \frac{\partial f}{\partial c} \Delta c \pm \cdots$$

$\Delta n'$是n的误差。由于误差传递系数$\pm \frac{\partial f}{\partial a}$，$\pm \frac{\partial f}{\partial b}$，$\pm \frac{\partial f}{\partial c}$等的符号可能不完全相同，等式右边诸项所代表的误差有一部分互相抵消，使$\Delta n'$变小。如果等式右边各项误差的符号都相