复变函数与拉普拉斯变换

（第二版）

金忆丹 编著

浙江大学出版社

复变函数与拉普拉斯变换

（第二版）

金忆丹　编著

浙江大学出版社

复变函数与拉普拉斯变换

（第二版）

金忆丹　编著

责任编辑　陈晓嘉

*　*　*

浙江大学出版社出版

（杭州玉古路20号　邮政编码310027）

浙江大学出版社计算机中心电脑排版

杭州富阳何云印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

*　*　*

850×1168　32开　8.5印张　227千字

1987年8月第1版　　1994年6月第2版

1996年10月第3次印刷

印数：5501—8500

ISBN 7-308-01502-5/O·175　定价：8.60元

编写说明

工程数学由多门数学课程组成，它的涉及面和应用性很广.几年来我们曾先后出版过多种工程数学教材.为了适应形势，及时总结经验，不断扩大教学成果，使我校工程数学教学质量能保持持续的稳定与提高，我们重新组织人力，对《线性代数》、《概率论与数理统计》、《复变函数与拉普拉斯变换》、《常微分方程》、《工程技术中的偏微分方程》、《数值计算方法》等六门课程的教材全部作了改编，以适应我校教学规范化的要求.

最近出版的这一套工程数学教学规范化系列教材，具有如下特点：

1.**适应性** 提高和加宽了知识的深度与广度，能较广泛地适用于多种专业，不同层次的要求.

2.**少而精** 虽然新教材充实了不少新的内容，但整个篇幅与学时数都没有增加.

3.**实用性** 学以致用是编写这套教材的一个原则，因此新教材增加了很多实用性内容.例如，在《常微分方程》中增加了建模的实例；在《复变函数与拉普拉斯变换》中增加了用复变函数方法解决工程实际问题的实例；在《工程技术中的偏微分方程》中增加了差分法及有限元法等内容，以便扩大计算机的应用范围；在《概率论与数理统计》中增加了统计部分比重，等等.

4.**便于教学** 新教材融入了我系教师长年积累的经验与资料，用更为直观，更易为学生接受的方式处理疑难内容，起到深入浅出的效果，值的一提的是，《线性代数》、《复变函数与拉普拉斯变换》中还

选编了大量的思考题，以帮助同学们复习.

我们希望这套工程数学系列教材能成为深受广大师生欢迎的教材.

浙江大学应用数学系

1994年3月

序　言

复变函数是高等学校工科类学生必须具备的工程数学知识，也是高等微积分的重要后继课程之一．它的理论与方法被广泛地应用于自然科学的许多领域，如电子工程、控制工程、理论物理与流体力学、弹性力学、热力学等，是专业理论研究和实际应用方面不可缺少的有力的数学工具．

本书是按照大学工科的工程数学教学大纲修订的，凡超过大纲的部分都打上了"*"号(仅供需要的专业选用)．在编写过程中，作者主要参照了1987年8月浙江大学出版社出版的，由金忆丹、凌坚、陈育樟编写的《复变函数与拉普拉斯变换》一书，是在广泛吸收了使用该书的教师与各工科专业的反馈意见基础上重新编写的．针对该课程内容多而学时相对较少的情况，在如何保证学生掌握复变函数的基本理论与方法上作了考虑．除保持了原书的主要优点外，对原书作了较大改动，增添了一些内容供不同专业、不同程度的学生在保证基本要求的同时根据需要选用．如增加了"调和函数平均值性质及泊松公式"、"解析函数在无穷远点的性态"、"积分路径(实轴)上有单极点的积分"、"保角映射的应用"等．本书的例题与习题也略有增加、调整．

本书力求把复变函数的基本理论、概念与方法叙述、推理得清晰、透彻，例题的配备也力求能使学生加深理解概念与方法、得到运算上的训练．本书的特色还体现在对一些较为抽象的复变函数理论与方法在工程技术中的应用作了一些介绍，例如关于保角映射在热传导问题上的应用等．

拉普拉斯变换作为复变函数在数学其他分支中的一个应用，同时也是工程技术中必不可少的一个重要数学方法而被列为本书的最

后一章，这颇受工科类各专业的欢迎.

本书前六章的章末都附有思考题，可以帮助学生加深理解课文内容，克服概念与运算中常易发生的谬误. 每章配有适量习题，书末附有习题答案或提示以供读者参考. 全书末尾有四个附录表，以便读者在应用时备查.

本书由复旦大学任福尧教授主审，北京大学张顺燕教授、北京理工大学杨维奇教授、杭州大学姚璧芸教授、浙江大学郭竹瑞教授参加了评审，他们对本书提出了许多宝贵的意见，对于他们所给予的热情指教，作者在此表示衷心的感谢.

本书初稿得到浙江大学丁善瑞副教授、葛显良副教授的认真审阅，并提出了修改意见；成书过程中，浙江大学应用数学系函数论教研室尹永成副教授与其他同事们给予了热情关怀与支持，在此一并致谢.

由于编者水平有限，错误与不妥之处在所难免，敬请读者批评指教.

编者

1994 年 4 月于浙大求是园

目　　录

第一章　预备知识

§1.1　复数

1.1.1　复数的定义

形如

$$z = x + iy \text{ 或 } z = x + yi$$

的数，称为复数，其中 x 和 y 是任意实数，i 称为虚数单位($i^2 = -1$)，实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，记为

$$x = \mathrm{Re}z, \quad y = \mathrm{Im}z.$$

实部为零且虚部不为零的复数，即 $x = 0, z = iy(y \neq 0)$，称为纯虚数. 虚部为零的复数，即 $y = 0, z = x$，就是实数，可见全体实数是全体复数的一部分.

复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 和 $z_2 = x_2 + iy_2$ 相等，必须而且只须它们的实部和虚部分别相等. 这样，一个复数 z 等于零，必须而且只须它们的实部与虚部同时等于零. 两个复数不能比较大小.

实部相同、虚部只差一个符号的两个复数，互为共轭复数，即对于复数 $z = x + iy$，其共轭复数可表示为 $x - iy$，记 $\bar{z} = x - iy$，显然 $\overline{(\bar{z})} = z$.

1.1.2 复平面与复数的模及辐角

由上可知,复数 $z = x + iy$ 实际上由一个有序数对 (x,y) 唯一确定,它们之间可以建立起一个一一对应的关系,类似于用数轴上的点与实数建立的一一对应关系那样,我们可以借助于横坐标为 x、纵坐标为 y 的二维直角坐标平面上的点 (x,y) 与复数 $z = x + iy$ 建立起一一对应关系.今后,凡是说到点 $z(x,y)$ 即与复数 $z = x + iy$ 表示同一意义.

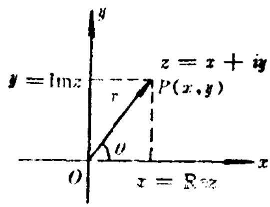

图 1-1　复数 $z = x + iy$

由于 x 轴上的点对应着实数,所以称 x 轴为实轴;y 轴上的非原点的点对应着纯虚数,所以称 y 轴为虚轴.这样,我们把表示复数 z 的平面称为复平面或 z 平面或 $\mathbb{C}$ 平面,见图 1-1.

在复平面上,复数 $z = x + iy$ 还可以用由原点引向点 z 的向量 OZ 来表示,这种表示方法能使复数的加(减)法如向量的加(减)法一样用几何作图来表示.向量 OZ 的长度称为复数 z 的模,记为 $|z|$ 或 r,因此有

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0 \qquad (1.1.1)$$

显然,$|\mathrm{Re}z| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}z| + |\mathrm{Im}z|$,$|\mathrm{Im}z| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}z| + |\mathrm{Im}z|$.

当 $z \neq 0$ 时,实轴正向与复数 z 所表示的向量 OZ 的夹角 θ 称为 z 的辐角,记为

$$\theta = \mathrm{Arg}\, z$$

显然有 $\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x}$.

任一非零复数 z 有无穷多个辐角,通常把满足条件

$$-\pi < \theta_0 \leqslant \pi \qquad (1.1.2)$$

的辐角 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}\, z$ 的主值,记为 $\theta_0 = \arg z$,于是

$$\theta = \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{1.1.3}$$

1.1.3 复数的其他表示法

利用直角坐标与极坐标的关系

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

还可以将复数 $z = x + iy$ 转化为下面的三角形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.1.4}$$

利用欧拉(Euler)公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，又可将复数 z 转化为指数形式

$$z = re^{i\theta} \tag{1.1.5}$$

复数的上述三种形式可以互相转换，以适应讨论不同问题及计算方面的需要．把复数 $z = x + iy$ 化为三角形式或指数形式，需计算复数 z 的模 $|z| = r$ 和辐角 $\theta = \mathrm{Arg}\, z$，当 $\arg z$ $(z \neq 0)$ 表示为辐角 $\mathrm{Arg} z$ 的主值时，它与反正切 $\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{y}{x}$ 的主值 $\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}\right)$ 之间有如下的关系：

$$\underset{(z\neq 0)}{\arg z =} \begin{cases} \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x > 0 \quad (\text{Ⅰ、Ⅳ 象限}) \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x = 0, y > 0 \\ \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{当 } x < 0, y \geq 0 (\text{Ⅱ 象限与负实轴}) \\ \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{当 } x < 0, y < 0 (\text{Ⅲ 象限}) \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{当 } x = 0, y < 0 \end{cases} \tag{1.1.6}$$

对于 $x < 0, y > 0$；$x < 0, y < 0$ 的情况，见图 1-2 与图 1-3.

例 1 求 $\mathrm{Arg}(-3-4i)$.

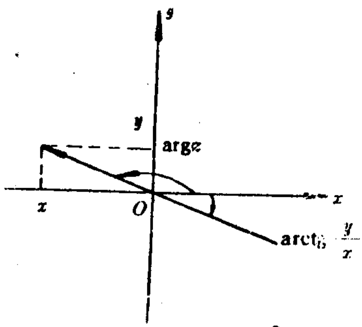

图 1-2　arg z(当 $x<0,y>0$ 时)

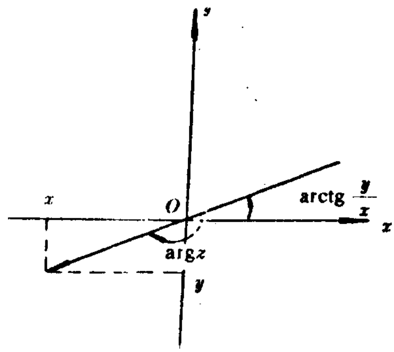

图 1-3　arg z(当 $x<0,y<0$ 时)

解　由(1.1.3)式可知

$$\text{Arg}(-3-4i)=\arg(-3-4i)+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

再由(1.1.6)式知

$$\arg(-3-4i)=\arg\text{tg}\frac{(-4)}{(-3)}-\pi=\text{arc tg}\frac{4}{3}-\pi.$$

所以有

$$\text{Arg}(-3-4i)=\text{arc tg}\frac{4}{3}+(2k-1)\pi$$
$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

例 2　计算 $z=e^{i\pi}$.

解　因为 $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$,所以 $e^{i\pi}=-1$.

例 3　将 $z=-1+i\sqrt{3}$ 化为三角形式和指数形式.

解　因为 $x=-1$　$y=\sqrt{3}$,所以

$$|z|=r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2,$$

由于

$$\text{arc tg}\frac{y}{x}=\text{arc tg}\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\text{arc tg}\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3}.$$

所以

$$\arg z = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

从而有

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

§1.2 复数的运算

复数的运算法则规定，其施行于实数时必须与实数的运算法则相符合，同时要求复数运算能满足实数运算的一般规律.

1.2.1 复数域

我们定义两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的加法、减法及乘法如下：

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \\ &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0) \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

容易验证，复数的加法与乘法满足交换律、结合律及乘法对于加法的分配律. 减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算，所以全体复数在引进上述运算后就称为复数域. 在复数域内，我们熟知的一切代数恒等式仍然成立，例如