

数学论文集

复旦大学数学系 編

上海科学技术出版社

数 学 论 文 集

复旦大学数学系 編

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本論文集是复旦大学数学系师生在1960年上半年所完成的一部分科学研究成果。内容包括54篇数学論文,其中有的是为生产部門解决实际問題的总结,有的是大型工程中的数学問題的研究,还有基础理論的研究,論题相当广泛,成果十分丰富,体现了理論密切联系实际的方针。可供高等学校、工程技术部門研究参考。

数 学 论 文 集

复旦大学数学系 編

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业許可証出033号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本 787×1092 1/18 印張 27 10/18 字数 564,000

1960年5月第1版第1次印600册

1962年3月第2版 1962年3月第1次印刷

印数 1—8,000

統一书号: 13119·363

定 价: (十四) 3.80 元

前 言

本論文集收集了复旦大学数学系师生所写的 58 篇科学論文。这些論文是 1959 年 10 月到 1960 年 5 月期間科学研究成果的一部分,都未曾发表过。

这些論文都是全系师生在党的领导下,破除迷信、解放思想、密切結合国家建設的需要和教学工作的需要而开展群众性科学研究的成果。这些論文有的是結合生产实际問題和理論問題的研究,如双曲綫图上作业法操作規律及理論,典型双曲型方程組的不連續初值問題等;有的論文如非均匀正交各向异性板撓度方程的一些解法,是解决一系列实际問題后所作出的帶有比較普遍意义的总结;也有一部分論文是继承发展原有学科的理論研究成果,如多元条件正定广义函数,論无限連續拟群的不可約一阶迷向群等等。所有这些論文,都还有許多不成熟的地方,有待于进一步提高,希望同志們批評和指教。

复旦大学数学系

, 1960 年 5 月

DAB 14/108

目 录

前言

典型双曲型方程組的不連續初始值問題·····	非綫性偏微分方程小組 (1)
平面超音速尖头繞流問題·····	非綫性偏微分方程小組 (17)
具間断系数的准綫性方程·····	非綫性偏微分方程小組 (29)
具間断系数准綫性方程激波的形成·····	非綫性偏微分方程小組 (33)
拟綫性双曲型方程組的无激波整体解的討論·····	非綫性偏微分方程小組 (36)
一种多变量的拟綫性偏微分方程的柯西問題·····	非綫性偏微分方程小組 (40)
旋轉体在超音速流中具有最小阻力問題·····	柳兆荣、苏远生、謝寿鑫 (46)
含小参数的双曲型方程的混合問題·····	江福汝 (52)
部分高阶导数項含有小参数的二阶綫性方程的退化問題 1955—1960 級方程組 (60)	
高阶导数具有小参数的二阶綫性椭圆型方程的第三边值問題·····	1955—1960 級方程組 (65)
非均匀正交各向异性板撓度方程的一些解法 ··· 1956—1961 級非綫性方程專門化 (71)	
閉胸式盾构的正面阻力·····	吳立鵬等 (122)
直角梯形混凝土墩应力分析 ·····	1956—1961 級方程組 (151)
算子 T^n 的性质及应用举例 ·····	陈傳璋、李明忠、朱学炎 (167)
二阶非綫性方程稳定性問題的一解 ·····	金福临、朱家駿等 (175)
自由等值梁多节点計算和撓度表·····	1956—1961 級非綫性方程專門化 (183)
船舶振动中基本函数的选择和二种能量法的比較·····	1956—1961 級非綫性方程專門化 (187)
底部非剛性的坝体温度应力 (平面問題) ·····	1956—1961 級泛函組 (205)
土坝坝基下孔柱截水墙应力分析 ·····	1956—1961 級泛函組 (209)
高压輸电架的撓度、强度及稳定性計算·····	1956—1961 級方程組 (213)
架构式汽輪机組基座計算理論 ·····	力学組学生振动理論科研小組 (221)
双曲綫图上作业法操作規律及理論 ·····	1958—1963 級第一班 (243)
紡紗配棉問題 ·····	1957—1962 級王震源、宋念慈等 (260)
“公共汽車”模型的排队系統·····	陈开明 (268)
$M/E_k/1$ 排队系統的队长分布和等待時間分布···	吳立德、陈开明、費荣昌、叶济川 (274)

多維离散齐次随机場的綫性內插·····	陶宗英(283)
馬尔可夫过程及其无穷小算子·····	吳立德(288)
河流及其支流洪水的組合与分解·····	1956—1961 級概率論專門化(295)
統計分析在紡織工业上的若干应用 ·····	概率論組生产实习队(298)
积雪深度的估計·····	1956—1961 級概率論專門化(310)
非綫性抛物型方程数值解 ·····	李立康、吳昌熾(315)
用积分关系法解抛物型方程收斂性問題 ·····	李立康、吳昌熾等(326)
在重根附近使用牛頓法的收斂性定理·····	蔣尔雄(331)
綫性代数方程組的严格高斯主元法的程序設計·····	計算数学程序設計小組(337)
矩陣的第一种模为 1 的迭代收斂性定理·····	蔣尔雄(343)
正交法求逆陣的标准程序設計·····	聞人德泰(347)
函数化方法·····	許自省(352)
定点机上浮点运算系統·····	程瑞英(369)
論无限連續拟群的不可約一阶迷向群·····	谷超豪(376)
論李-嘉当变换拟群的可約性 ·····	胡和生(394)
容許可逆的共形运动的黎曼空間与辛尺度空間·····	胡和生(398)
完全半可約空間性质的研究 ·····	1955—1960 級几何組(405)
包含仿射群的有限連續群·····	陈胜凡(410)
关于核空間的共軛空間上的分布 ·····	夏道行、严紹宗(413)
关于方程 $\frac{\partial U}{\partial z} = AU$ 的黎曼存在問題 ·····	1957—1961 級映照組(419)
具有无界型特征的拟似共形映照的存在定理·····	任福尧(427)
量子場論中广义函数的 Paley-Wiener 型定理·····	張文泉、吳卓人(433)
多元条件正定广义函数·····	夏道行、吳卓人、張文泉(437)
拟似共形映照中一些极值問題·····	何成奇(449)
关于 E_p 空間的最佳逼近·····	周德梅(455)
在有限閉区間上用多項式逼近实函数的杰克森定理的改进·····	郑 权(460)
連續函数用它的蔡查罗平均数来勻迫·····	鄒 悦、区銳森、吳靄成(468)
飞耶平均与共軛函数·····	貝嘉庆、郑 权、秦国强(472)
法巴多項式的估計及其在逼近論中的应用·····	李鍾魯(480)

典型双曲型方程組的不連續初始值問題

非綫性偏微分方程小組

§1 引言 預备知識 主要結果

我們考虑的典型双曲型方程組是指空气动力学中一維等熵运动方程組:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (1-1)$$

于此, t ——時間, x ——位置坐标, ρ ——密度, u ——速度, $p=p(\rho)$ ——压力。为簡單起見,只考虑完全气体,即設

$$p=A\rho^\gamma, \quad (\gamma>1) \quad (1-2)$$

当 p 为 ρ 的更复杂一些的函数的情况,可以完全同样的进行討論。同样的方程在浅水流动中也可遇到。经过拉格朗日坐标变换,可得形如

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p(\tau)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (p'(\tau)<0) \quad (1-3)$$

的方程組,它在非綫性彈性力学中也有应用。

与綫性方程組不同,这些方程組的柯西問題的解甚至当初始条件足够光滑的时候也可能包含强間断,因此我們考察具有間断初始条件的柯西問題,它是非綫性方程理論中的根本問題之一,間断綫兩側的关系由激波的条件来确定。

我們設初始条件为

$$t=0, \quad \rho=\rho_0(x), \quad u=u_0(x), \quad (1-4)$$

于此, $\rho_0(x)$ 、 $u_0(x)$ 是在 $x>0$ 及 $x<0$ 时充分光滑的函数,在 $x=0$ 时有第一类間断点。本文研究方程(1-1)在初始条件(1-4)下的間断解在原点附近的构造,指出可能发生的各种情况并給出决定激波的方法。在初始条件是常数但在一点有間断的情况,这样的問題称为“黎曼問題”,在 Courant-Friedrichs 的书^[1]上已有了完滿的解答。間断解的唯一性已为 Годунов^[2], Олейник^[3], Рождественский^[4] 等人所

研究,故不再加以考虑。

我們研究的方程組是等熵运动的方程組,所决定的激波还不是真正的气体动力学中的激波(因为气体越过激波时熵要增加),但对弱激波而言,熵的改变是很微小的(对于压力、密度的变化为三阶无穷小),故仍不失为是一个很好的近似,而浅水流动中所产生的不連續波正是我們所研究的情况,这是水利工程所必須考虑的。自然,我們現在所得到的結果还只是闡明一些最典型的情况,实际上对不稳定流往往采取較复杂一些的 Saint Venant 方程,不过,这里的某些結果也有助于理解那时的情况。

方程組 (1-1) 是可化約系統。因此我們主要应用速度图的方法化为綫性方程組来研究。

方程組 (1-1) 的黎曼不变量为

$$2r = u + \frac{2c}{\gamma-1}, \quad 2s = -u + \frac{2c}{\gamma-1} \quad (1-5)$$

于此 c 为音速

$$c = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)^{1/2} = \sqrt{A\gamma\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}}. \quad (1-6)$$

在以下的討論中,我們有时用黎曼不变量把方程組 (1-1) 化为下列形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial r}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1-7)$$

于此

$$\begin{cases} u = r-s \\ c = \frac{\gamma-1}{2}(r+s). \end{cases} \quad (1-8)$$

对于使 $r_s s_t - r_t s_s \neq 0$ 的解,可用速度图化为 (r, s) 平面上的綫性方程組:

$$\begin{cases} x_r = (u-c)t_r = \left(r-s - \frac{\gamma-1}{2}(r+s) \right) t_r \\ x_s = (u+c)t_s = \left(r-s + \frac{\gamma-1}{2}(r+s) \right) t_s. \end{cases} \quad (1-9)$$

由綫性方程組 (1-9) 滿足 $x_r t_s - x_s t_r \neq 0$ 的解就可以得到 (1-7) (即 (1-1)) 的解。因此我們能把有关方程組 (1-1) 的問題化到綫性方程組 (1-9) 的相应問題来解决。

在不連續解的不連續綫 (激波) 兩側,應該滿足一定条件,在我們的情况下它标志着越过激波要保持質量守恒,动量守恒和能量轉化的規律^①。設不連續綫的

① 这是指在发生激波时部分机械能轉化为热能的现象。

斜率为 $\frac{dx}{dt}$, 不连续线两边的状态分别用下标“0”和“1”来表示。

越过激波的质量守恒和动量守恒规律可表示为:

$$\rho_0 \left(u_0 - \frac{dx}{dt} \right) = \rho_1 \left(u_1 - \frac{dx}{dt} \right) \quad (1-10)$$

$$(\rho_0 u_0) \left(u_0 - \frac{dx}{dt} \right) - (\rho_1 u_1) \left(u_1 - \frac{dx}{dt} \right) = p_0 - p_1 \quad (1-11)$$

記

$$v_0 = u_0 - \frac{dx}{dt}, \quad v_1 = u_1 - \frac{dx}{dt}$$

这些条件又可表示为

$$\rho_0 v_0 = \rho_1 v_1 = m \quad (1-12)$$

$$m v_0 + p_0 = m v_1 + p_1 \quad (1-13)$$

从(1-10)或(1-12)式中解出 $\frac{dx}{dt}$, 可得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\rho_1 u_1 - \rho_0 u_0}{\rho_1 - \rho_0}, \quad (1-14)$$

或用黎曼不变量 r, s 表示为:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(r_1 + s_1)^{\frac{2}{\gamma-1}} (r_1 - s_1) - (r_0 + s_0)^{\frac{2}{\gamma-1}} (r_0 - s_0)}{(r_1 + s_1)^{\frac{2}{\gamma-1}} - (r_0 + s_0)^{\frac{2}{\gamma-1}}}, \quad (1-15)$$

从(1-12)(1-13)中消去 m , 可得

$$(p_0 - p_1)(\tau_0 - \tau_1) = m(v_1 - v_0)(\tau_0 - \tau_1) = (v_1 - v_0)(v_0 - v_1)$$

于此

$$\tau = \frac{1}{\rho}$$

即

$$u_1 - u_0 = v_1 - v_0 = \pm \sqrt{[p(\tau_0) - p(\tau_1)](\tau_1 - \tau_0)} \quad (1-16)$$

在完全气体时, $p = A\rho^\gamma = A\tau^{-\gamma}$ 此关系式为

$$u_1 - u_0 = \pm \sqrt{A(\tau_0^{-\gamma} - \tau_1^{-\gamma})(\tau_1 - \tau_0)} \quad (1-17)$$

它是两状态可用激波連結的条件。

若令 $c' = \frac{2c}{\gamma-1}$, 它可写为:

$$u_1 - u_0 = \pm \frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{(c_0'^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} - c_1'^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}})(c_1'^{\frac{2}{1-\gamma}} - c_0'^{\frac{2}{1-\gamma}})} \quad (1-18)$$

用黎曼不变量 r, s 来表示, 此条件可写为

$$\begin{aligned} & (r_1 - s_1) - (r_0 - s_0) \\ & = \pm \frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{[(r_0 + s_0)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} - (r_1 + s_1)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}][(r_1 + s_1)^{\frac{2}{\gamma-1}} - (r_0 + s_0)^{\frac{2}{\gamma-1}}]} \end{aligned} \quad (1-19)$$

另外越过激波时应成立条件:

$$u_- \geq u_+, \quad (1-20)$$

即间断线右方的速度应不超过左方的速度(我们以“-”表示左边的状态,以“+”表示右边的状态),这是由于熵增加或机械能减少所致。因此凡能和左方状态 (u_-, c_-) 用激波连接的状态应满足

$$u - u_- = -\frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\left(c_-^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} - c'^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\right) \left(c'^{\frac{2}{1-\gamma}} - c_-^{\frac{2}{1-\gamma}}\right)} \quad (1-21)$$

在 (u, c) 平面上固定一点 (u_-, c_-) , (1-21)所表示的曲线如图1所示,称为激波极线。

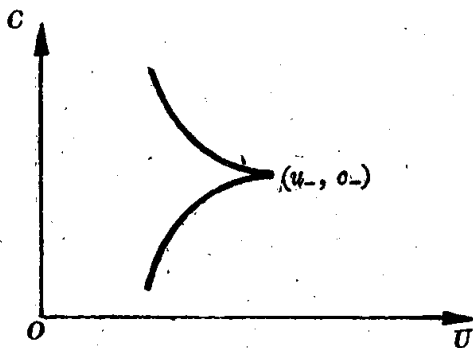


图 1

同理,凡能和左方状态 (r_-, s_-) 用激波连接的状态应满足

$$(r-s) - (r_- - s_-) = -\frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\left[(r_- + s_-)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} - (r+s)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\right] \left[(r+s)^{\frac{2}{\gamma-1}} - (r_- + s_-)^{\frac{2}{\gamma-1}}\right]} \quad (1-22)$$

同理凡能和右方状态 (u_+, c_+) 用激波连接的状态应满足

$$u - u_+ = \frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\left(c_+^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} - c'^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\right) \left(c'^{\frac{2}{1-\gamma}} - c_+^{\frac{2}{1-\gamma}}\right)} \quad (1-21')$$

它在 (u, c) 平面上的图像如图2所示。

又凡能和右方状态 (r_+, s_+) 用激波连接的状态应满足

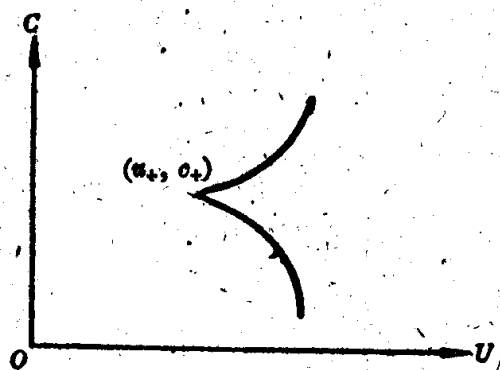


图 2

$$(r-s) - (r_+ - s_+) = \frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\left[(r_+ + s_+)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} - (r+s)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\right] \left[(r+s)^{\frac{2}{\gamma-1}} - (r_+ + s_+)^{\frac{2}{\gamma-1}}\right]} \quad (1-22')$$

在黎曼问题的情况,即在初始条件为常数但有间断的情形问题的解由一些常态通过激波或中心扩散波(中心单波)来联结所构成。通过激波连接的条件已如上所述,通过中心扩散波连接的条件应为

$$r = \text{const 或 } s = \text{const}, \quad (1-23)$$

$$\text{即} \quad u + \frac{2c}{\gamma-1} = \text{const 或 } u - \frac{2c}{\gamma-1} = \text{const}, \quad (1-24)$$

同时,通过中心扩散波时要成立

$$u_+ \geq u_-, \quad (1-25)$$

因此,凡能和 (u_-, c_-) 用中心扩散波连接的状态可用图 3a 所示的二直线所示。

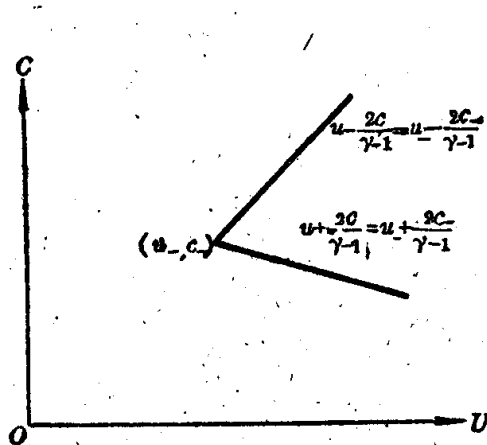


图 3

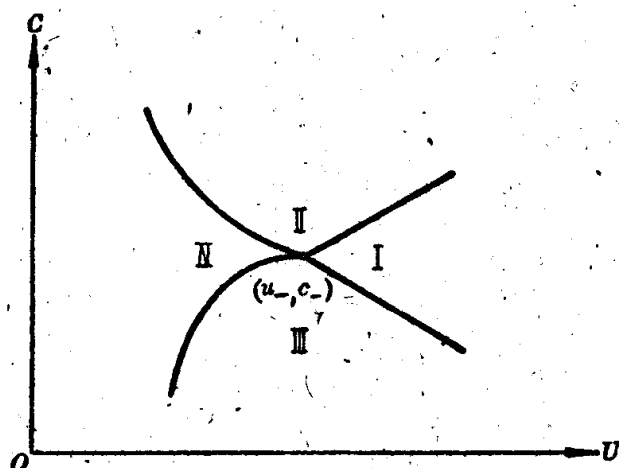


图 4

合并图 1 和图 3, 可以得到图 4, 它把 (u, c) 平面分为四个区域。在黎曼问题的情况已经证明:当右方的初始值 (u_+, c_+) 落在第一个区域中时,解可由一些常态通过两个中心扩散波来联结,得到弱间断(因而是连续的)解,特别 (u_+, c_+) 落在第一区域的两边界上的时候,解只要用一个中心扩散波联结就行。当 (u_+, c_+) 落在第 II、第 III 区域中的时候,解可由一些常态通过一个激波和一个中心扩散波来联结,特别当 (u_+, c_+) 落在第 II、第 III 的另一条边界上时,解只要用一个激波来联结,此时得到不连续解。当 (u_+, c_+) 落在第四区域中的时候,解可由一些常态通过两个激波来联结,此时仍得到不连续解。

在本文中,我们按初始值的左方极限 $(u_0(-0), c_0(-0))$ 同样可以作出图 4, 并对初始值之右方极限 $(u_0(+0), c_0(+0))$ 落在第 I 区域, 第 II 或第 III 区域及第 IV 区域的情况分别加以讨论得到如下的结果:

(1) 设初始值的右方极限 $(u(+0), c(+0))$ 落在如图所示的第 I 区域中, 即有

$$r_0(+0) \geq r_0(-0), \quad s_0(+0) \leq s_0(-0) \quad (1-26)$$

$(r_0(x), s_0(x))$ 是 $t=0$ 时 (r, s) 的初始值。

此时是间断消失的情况,即在 $t>0$ 处,存在着连续的(但可能有弱间断)局部解。此解可在速度图平面上解三个古尔沙问题而得到。

当初始值的右方极限落在第一区域的边界上时,同样的结果也成立,但解古尔沙问题的个数将减少。

(2) 设初始值的右方极限 $(u(+0), c(+0))$ 落在如图所示的第 II, 第 III 区域中,此时方程在 origin 出现包含一个激波的局部解。除个别情况外,激波的决定可归结为速度图平面上的线性双曲型方程组 (1-9) 的不定边界问题。在两根边界中有一根为固定的特征线,在其上给定 t 的数值,在未定边界上要满足如下的两个边界条件:

$$H(t, x, r, s) = 0, \quad \frac{dx}{dt} = R(t, x, r, s) \quad (1-27)$$

这两根边界间无特征线。

此不定边界问题的局部解是存在的,且可由解一组非线性微积分方程组而得到。

特别当初始值在 origin 的左方极限落在第 II、第 III 区域的左边边界上时,也成立同样的结论。这说明一经发生激波以后,如无其他的干扰,激波的状态可以继续下去。

(3) 设初始值的右方极限 $(u(+0), c(+0))$ 落在如图所示的第 IV 区域中时,方程在 origin 附近会出现包含两个激波的局部解,在大部分情况下,它同样可化为速度图平面上解方程组 (1-9) 的不定边界问题,但此时两个边界都是不定的,它们间没有特征线,在上面都有形状为 (1-27) 的边界条件。此不定边界问题可化为一组含有某一类型的有限方程的微积分方程组来解决。在一定条件下,这一方程组的解是存在的。

§ 2 间断消失的情况

我们首先考虑初始值之右方极限落在第一个区域中的情形,此时应有

$$r_0(-0) \leq r_0(+0), \quad s_0(-0) \geq s_0(+0) \quad (2-1)$$

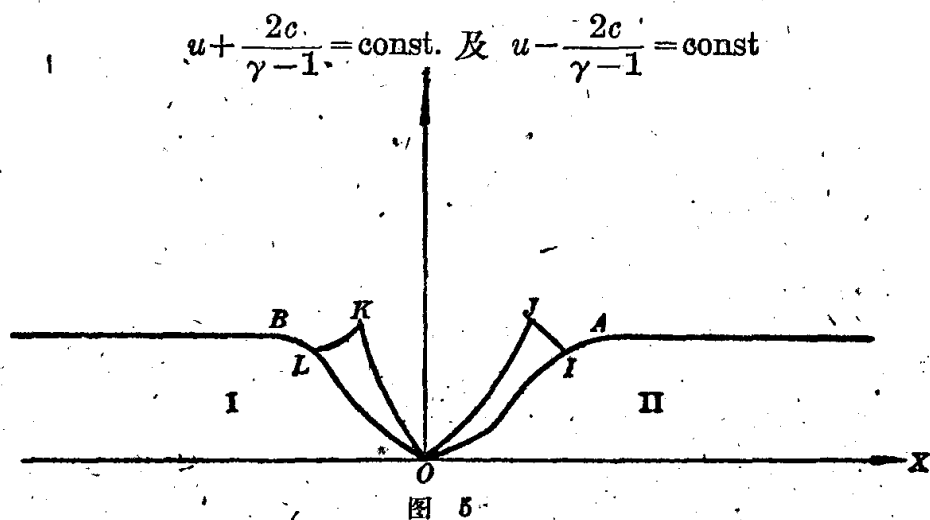
这里 r_0, s_0 表示初始函数,即 $t=0$ 时 r, s 应采取的数值。

这时,我们要证明如下的事实:

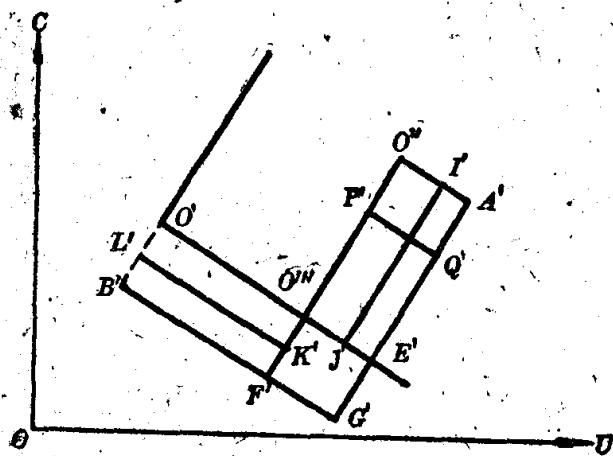
方程组 (1-1) 在满足 (2-1) 的初始条件下,在 $0 < t < h$ 的范围内 (h 适当小的正数) 必有一解,此解在 $t > 0$ 为连续,但可能有弱间断。

我们先依 $x > 0$ 及 $x < 0$ 的初始条件来解柯西问题,由拟线性双曲型方程组局部解的存在定理,可在如图 5 的区域 I, II 中各得到一解,于此 OA, OB 分别为特

征綫, OA 为第一类特征綫 (其斜率为 $\frac{dx}{dt} = u + c$) OB 为第二类特征綫 (其斜率为 $\frac{dx}{dt} = u - c$)。利用解作速度图, 为方方便計, 我們在 (u, c) 平面上作速度图, 这时两族特征綫分別为



由于 O 点为初始条件第一类間断点, 故其速度图綫为两点, 設依 $r_0(-0), s_0(-0)$ 所决定的点为 O' , 依 $r_0(+0), s_0(+0)$ 所决定的点为 O'' 。在条件(2-1)下, 显然可見, O'' 落在图 6 中所示的区域内。設 A, B 的速度图分別为 A', B' (A', B' 也可能重合于 O'' 或 O' , 这时可利用中心“单波”来代替下文中所說的古尔沙問題) 則



$O'A'$ 与 $O'B'$ 分別为第一类或第二类特征綫。过 O' 点作第一类特征綫与过 O'' 点的第二类特征綫交于 O''' 点, 由(1-8)(1-9)可知在 (u, c) 平面上可作出对应的方程組

$$\begin{aligned}
 -x_u + \frac{\gamma-1}{2} x_c &= (u+c) \left(-t_u + \frac{\gamma-1}{2} t_c \right) \\
 x_u + \frac{\gamma-1}{2} x_c &= (u-c) \left(t_u + \frac{\gamma-1}{2} t_c \right)
 \end{aligned} \tag{2-2}$$

这是一个双曲型方程组, 以 $u + \frac{2c}{\gamma-1} = \text{const}$, $u - \frac{2c}{\gamma-1} = \text{const}$ 为特征线。我们令 $O'O'''$, $O''O'''$ 上 $t=0, x=0$, 而 $O''A'$ 上 t, x 的数值为由特征线 OA 所确定, $O'B'$ 上 t, x 的数值为由特征线 OB 所确定, 那末可依这些边界条件, 解区域 $O''A'E'O'''$ 及区域 $O'O'''F'B'$ 的古尔沙问题, 于此 $A'E'$, $O'''E'$, $O'''F'$, $F'B'$ 均为特征线。本来古尔沙问题只须知道各特征线上一个未知函数的数值就够了, 但由于现在所给的两个未知函数的数值是相容的, 故不会影响解的存在性, 这样就能作出在这二个区域中的解, 因而得到在 $O'''E'$, $O'''F'$ 上函数 t, x 的数值, 依这些数值, 再解区域 $O'''E'G'F'$ 中的古尔沙问题, 于此 $G'E'$, $F'G'$ 也为特征线, 就得到在区域 $O'''E'G'F'$ 中的解。

我们来看解 $t=t(u, c)$, $x=x(u, c)$ 在 (t, x) 平面上的图象, O'', O''' 的象为点 O , 作第一类特征线 $P'Q'$, 沿着它们 $\frac{dx}{dt} = u+c$, 它在 (t, x) 平面上的象应为过 O 点的一根特征线, 当 P' 自 O'' 向 O''' 移动时, $u + \frac{\gamma-1}{2}c$ 单调减少, 而在 $O''O'''$ 上 $u - \frac{\gamma-1}{2}c = \text{const}$, 因此沿 $O''O'''$ 线 $\frac{dx}{dt} = u+c$ 亦是单调减少的, 因此必存在特征线 $I'J'$ 使得区域 $O''I'J'O'''$ 在 t, x 平面上的象 OIJ 为单叶的, 且在 OA 之左。同样, 存在区域 $O'O'''F'B'$ 中的特征线段 $K'L'$, 使区域 $O'L'K'O'''$ 的象 OKL 为单叶的, 且在 OB 之右。又沿 $O'''K'$, $\frac{dx}{dt} = u-c$, 沿 $O'''J'$, $\frac{dx}{dt} = u+c$, 故 OK 必在 OJ 之左。由此也可以见到, 区域 $O'''E'G'F'$ 在 O''' 点近旁一个范围内在 (t, x) 平面上的象必为曲线 OJ , OK 之某一段所围成的区域, 只要初始函数 $r=r_0(x)$, $s'=s_0(x)$ 在 $(0, 0)$ 点的左右极限均不为 ∞ , 则可证 $J = \frac{\partial(t, x)}{\partial(r, s)}$ 在 O''' 点不等于 0。这样, 速度图法就有效, 这就证明了我们所要求的结果。

(注1) 我们所作的图形也有可能延伸到 $c < 0$ 的部分, 这时会发生所谓逸速现象。在

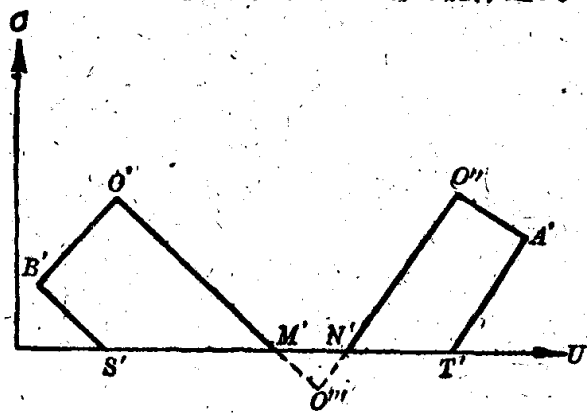


图 7

遇到有这样的区域, 我们就以 $c=0$ 来代替, 而不再解古尔沙问题到整个区域。更具体的说, 如 F' 或 E' 在 $c < 0$ 部分, 而 O''' 在 $c > 0$ 部分, 我们的作法事实上没有什么问题, 当 O''' 也在 $c < 0$ 时, 我们可作 $O'M'S'B'$ 区域中 $O'M'$ 近旁在 (t, x) 平面上的像, 也可以作 $O''N'T'A'$ 区域中 $O''N'$ 近旁在 (t, x) 平面上的像, 而 O 的在 $t > 0$ 的邻域中未被掩盖的部分为逸速的区域, 在这个区域中为 $c=0$, 力学意义是出现真空。

(注2) 也有可能 A' 在 O'' 的另一側, 这时区域 $O''E'G'F'$ 与区域 $O'O''F'B'$ 有公共部分, 但这并不妨碍解的制作, 只是速度图发生了折迭, 但在 (t, x) 平面上的像仍为图5的情形而不受影响。

(注3) $O'O''$ 二者之一有可能重合于 O''' , 这时只須解二次古尔沙問題就可以制作出局部解来。

§3 产生一个激波的情况

現在我們考虑初始值之右方极限 $(u_0(+0), c_0(+0))$ 落在图4的第II或第III区域中的情况。和 §2 中一样, 我們先依 $x > 0$ 及 $x < 0$ 之初始条件来解柯西問題, 可在如图8所示的区域I, II中各得一局部解。同样在 (u, c) 平面上考虑速度图, 設依 $(u_0(-0), c_0(-0))$ 所决定的点为 O' , 依 $(u_0(+0), c_0(+0))$ 所决定的点为 O'' , 按

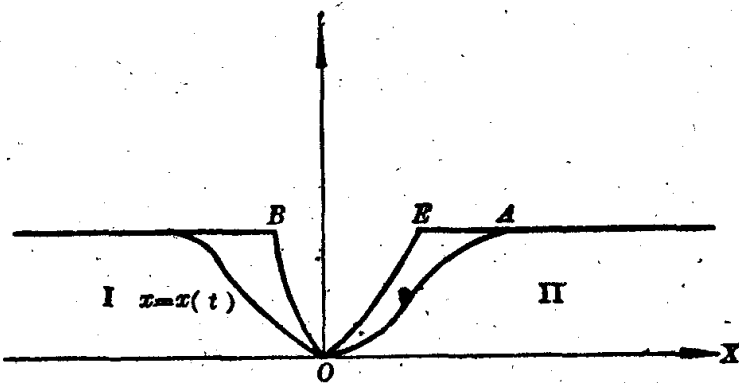


图 8

条件, O'' 落在如图9所示的区域内。設 OA 之像为特征綫 $O''A'$, 与 §2 中一样, 我們过 O'' 点作第二类特征綫与过 O' 点的激波极綫交于 O''' 点。我們令 $O''O'''$

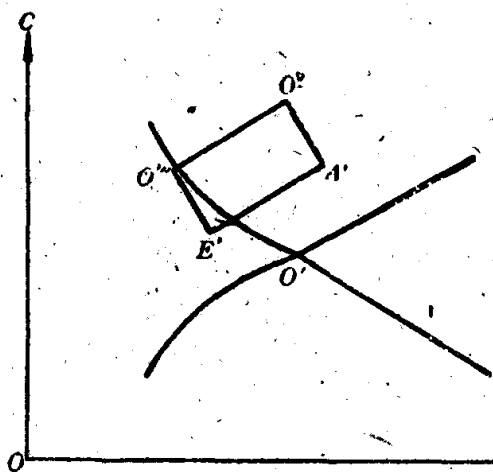


图 9

上 $t=0, x=0$, 而 $O''A'$ 上 t, x 的数值由特征綫 OA 所确定, 可在区域 $O''O'''E'A'$ 中解古尔沙問題, 于此 $O'''E', A'E'$ 为特征綫。不妨碍一般性, 所得的解在 (x, t) 平面上的像 OAE 是单叶的, 且在 OA 之左。从图9可見, O', O''' 能用激波連結。为了构造我們問題的解, 設想在 (x, t) 平面上通

过 O 点有一間断綫, 其方程为 $x=x(t)$; 为使此間断綫能銜接 O''' 与 O' 两点, 其在原点之斜率, 必須由公式(1-14)用 O', O''' 所規定之 (ρ, u) 之值代入去确定。根据在間断綫的一側是超音速, 另一側是亚音速的性質, 可知在間断綫的左边可作二根向下的特征綫而在右側只有一根向上的特征綫, 因此此間断綫虽未确定, 但一定在区域I的内部。設在区域I中原有的局部解为 $r_-(x, t), s_-(x, t)$, 在間断綫之左側

仍采用此解,則越过間断綫后在間断綫右側的 r 和 s 之值可由公式(1-15)和(1-22)所决定。

求方程(1-1)的間断解的問題归結为解决如下的不定边界問題:对方程組(1-7),在固定边界 OE (特征綫)上取已确定的 r (或 s) 的数值,在不定边界 $x=x(t)$ 上,取由(1-15)和(1-22)所决定的 r 和 s 的数值。它們之間无特征綫。

要解决如此的不定边界問題,采用速度图是很方便的。我們在 (r, s) 平面上考虑方程組

$$\begin{cases} x_r = (u-c)t_r = \left(r-s - \frac{\gamma-1}{2}(r+s)\right)t_r \\ x_s = (u+c)t_s = \left(r-s + \frac{\gamma-1}{2}(r+s)\right)t_s \end{cases} \quad (3-1)$$

的不定边界問題:在两根边界中有一根为固定的特征綫 $r=r_0$, 在其上給定

$$t=t(s), \quad (t(s_0)=0) \quad (3-2)$$

另一根为不定边界 $r=\varphi(s)$, $r_0=\varphi(s_0)$, 在其上有两个边界条件:

$$H(t, x, r, s) = 0, \quad \frac{dx}{dt} = R(t, x, r, s), \quad x(r_0, s_0) = 0, \quad (3-3)$$

它們之間无特征綫。

如果 $r=r_0$ 和 $t=t(s)$ 是由 OE 綫上的值所确定,而 H 和 R 能由(1-15)及(1-22)利用 $r_-(x, t)$, $s_-(x, t)$ 所决定,也就是(3-3)可分別写为:

$$\begin{aligned} H(t, x, r, s) &= (r-s) - (r_-(x, t) - s_-(x, t)) \\ &+ \frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\left[(r_-(x, t) + s_-(x, t))^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} - (r+s)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\right] \left[(r+s)^{\frac{2}{\gamma-1}} - (r_-(x, t) + s_-(x, t))^{\frac{2}{\gamma-1}}\right]} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3-4)$$

$$\frac{dx}{dt} = R(t, x, r, s) = \frac{(r+s)^{\frac{2}{\gamma-1}}(r-s) - (r_-(x, t) + s_-(x, t))^{\frac{2}{\gamma-1}}(r_-(x, t) - s_-(x, t))}{(r+s)^{\frac{2}{\gamma-1}} - (r_-(x, t) + s_-(x, t))^{\frac{2}{\gamma-1}}} \quad (3-5)$$

則方程組(3-1)的不定边界問題的解如果存在且满足

$$J = x_r t_s - x_s t_r \neq 0, \quad (3-6)$$

則它在 (x, t) 平面上的映象,就是上述方程組(1-1)的不定边界問題的解。

現在来解决方程組(3-1)的不定边界問題。从(3-1)消去 x 可得

$$t_{rs} + \frac{m}{r+s}(t_r + t_s) = 0. \quad (3-7)$$

此为 Euler-Poisson 方程。以 $v(r_1, s_1; r, s)$ 表示方程(3-7)的黎曼函数,它以 (r, s) 为参数,对变元 r_1, s_1 满足方程

$$v_{r_1 s_1} - \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\frac{m}{r_1 + s_1} v \right) - \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{m}{r_1 + s_1} v \right) = 0$$

和边界条件

$$r_1 = r, \quad v(r, s_1; r, s) = \exp \int_s^{s_1} \frac{m}{r+s_1} ds_1$$

$$s_1 = s, \quad v(r_1, s; r, s) = \exp \int_r^{r_1} \frac{m}{r_1+s} dr_1$$

大家知道此黎曼函数可表示为高斯超越几何級数的形式。

由于假设 $t(r_0, s_0) = 0$, 方程(3-7)的一般解的表达式为

$$t(r, s) = \int_{r_0}^r v(\tau, s_0; r, s) \Phi(\tau) d\tau + \int_{s_0}^s v(r_0, \tau; r, s) \Psi(\tau) d\tau \quad (3-8)$$

其中 $\Phi(\tau)$, $\Psi(\tau)$ 为任意函数。

由此可得

$$\left. \begin{aligned} t_r(r, s) &= v(r, s_0; r, s) \Phi(r) + \int_{r_0}^r \frac{\partial v}{\partial r}(\tau, s_0; r, s) \Phi(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_{s_0}^s \frac{\partial v}{\partial r}(r_0, \tau; r, s) \Psi(\tau) d\tau \\ t_s(r, s) &= v(r_0, s; r, s) \Psi(s) + \int_{r_0}^r \frac{\partial v}{\partial s}(\tau, s_0; r, s) \Phi(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_{s_0}^s \frac{\partial v}{\partial s}(r_0, \tau; r, s) \Psi(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

再由(3-1)可得

$$\begin{aligned} x_r(r, s) &= \left[(r-s) - \frac{\gamma-1}{2}(r+s) \right] \left\{ v(r, s_0; r, s) \Phi(r) \right. \\ &\quad \left. + \int_{r_0}^r \frac{\partial v}{\partial r}(\tau, s_0; r, s) \Phi(\tau) d\tau + \int_{s_0}^s \frac{\partial v}{\partial r}(r_0, \tau; r, s) \Psi(\tau) d\tau \right\} \\ x_s(r, s) &= \left[(r-s) + \frac{\gamma-1}{2}(r+s) \right] \left\{ v(r_0, s; r, s) \Psi(s) \right. \\ &\quad \left. + \int_{r_0}^r \frac{\partial v}{\partial s}(\tau, s_0; r, s) \Phi(\tau) d\tau + \int_{s_0}^s \frac{\partial v}{\partial s}(r_0, \tau; r, s) \Psi(\tau) d\tau \right\} \quad (3-10) \end{aligned}$$

由于 $x(r_0, s_0) = 0$ 可得

$$\begin{aligned} x(r, s) &= \int_{r_0}^r \left[\alpha - s_0 - \frac{\gamma-1}{2}(\alpha + s_0) \right] \left\{ \Phi(\alpha) + \int_{r_0}^{\alpha} \frac{\partial v}{\partial r}(\tau, s_0; \alpha, s_0) \Phi(\tau) d\tau \right\} d\alpha \\ &\quad + \int_{s_0}^s \left[(r-\beta) + \frac{\gamma-1}{2}(r+\beta) \right] \left\{ v(r_0, \beta; r, \beta) \Psi(\beta) \right. \\ &\quad \left. + \int_{r_0}^r \frac{\partial v}{\partial s}(\tau, s_0; r, \beta) \Phi(\tau) d\tau + \int_{s_0}^{\beta} \frac{\partial v}{\partial s}(r_0, \tau; r, \beta) \Psi(\tau) d\tau \right\} d\beta \quad (3-11) \end{aligned}$$

为要满足边界条件, 由(3-2)可得

$$\int_{s_0}^s v(r_0, \tau; r_0, s) \Psi(\tau) d\tau = t(s). \quad (3-12)$$

把(3-3)的第一式沿 $r = \varphi(s)$ 微分, 得到沿 $r = \varphi(s)$ 应有