数理统计

辅导材料

中国统计出版社

数理统计辅导材料

《数理统计辅导材料》编写组　编

中国统计出版社

数理统计辅导材料

《数理统计辅导材料》编写组　编

中国统计出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京顺义北方印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开本　6.625 印张　15 万字

1985 年 5 月第 1 版　1985 年 5 月北京第 1 次印刷

印数 1－50,000

统一书号：4006•063　　定价：1.30 元

出版说明

本书是为了配合中央广播电视大学《数理统计》（中国统计出版社出版）的教学而编写的。主要包括每章内容的简要概括和例题详解，以帮助广大学员更好地理解各章的要点，提高解题的技能。

本书由参加编著《数理统计》的李毓芝同志主编，各章的编写人员是：李毓芝（第一、二、三章）、项威（第四、五章）、朱维盛（第六章）、钟守洋（第七章）、虞正逸（第八章）、严建辉（导言、第九章）、谢鸿光（第十、十一章）。

限于我们的水平和编写时间仓促，缺点和错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

《数理统计辅导材料》编写组

1984 年 12 月

目　　录

导　言

在客观世界中，存在着各种现象。这些现象基本上可分为两类：

1. 确定性现象

所谓确定性现象，就是在一定的条件下，现象的可能结果只有一个。也就是说，这些现象的结果是必然的，或者必然发生，或者必然不发生；而且，我们在事前就可以把握其结果。

2. 不确定现象

所谓不确定现象，就是在一定的条件下，现象的可能结果不只是一个，可能这样出现，也可能那样出现，在事前我们是无法肯定的。

数理统计以研究不确定现象为基本内容，并把确定性现象当作不确定现象的特例来处理。

不确定现象就一次试验（或观察）来说，其结果虽然难以肯定，但通过大量观察，却可以看到它们都具有某种规律性。这种规律性就称为统计规律性。具有统计规律性的现象称为随机现象。

在随机现象中，一部分是直接跟数量相联系的，另一部分却没有具体的数量表现。但是，如果将那些没有具体数量表现的随机现象的各个可能结果赋予一定的数值，那么，这种随机现象的结果都对应于一定的数值，这样，它就成了一个变量。这种变量称为随机变量。数量统计学就是以随机变量为研究对象的。

习惯上，我们把所要研究的某种现象的全体称为总体（或母体）。总体是随研究对象的改变而改变的。总体所包括的个体称为总体的一个元素（或总体单位），一个总体的元素可以是几个、几十个、几十万个直到无穷多个。由于种种原因，我们往往不可能（也不必要）对总体中的每个单位毫无遗漏地进行了解，而只能从中抽取一部分加以研究。被抽到的这部分元素就构成总体的一个样本（或子样）。样本所含的元素的个数称为样本的容量。样本容量的多少，应根据具体研究的需要加以确定。

数理统计的基本特点可以简单地概括为：由抽取的样本估计总体。这里要求：

（1）抽取样本必须以随机原则为基础；

（2）样本的容量根据具体的要求而确定；

（3）估计总体必须采用科学的方法，必须以概率论为理论依据。

数理统计已成为人们认识自然、认识社会的一个强有力工具。

第一章　随机事件与概率

内 容 提 要

一、预备知识——排列与组合

1．加法原理

如果事件 A 有 m 种方式出现，另一不同的事件 B 有 n 种方式出现，那么，只要事件 A 和事件 B 不能同时出现，则事件 A 或事件 B 就有 $m+n$ 种方式出现。

2．乘法原理

如果事件 A 有 m 种方式出现，另一不同的事件 B 有 n 种方式出现，那么，事件 A 和事件 B 就能有 mn 种方式出现。

3．排列

从 m 个不同的元素中，任取 n（$n\leqslant m$）个不同的元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 m 个不同的元素中每次取 n 个不同的元素的一个排列，所作出的排列种数记作 P_m^n

$$P_m^n=\frac{m!}{(m-n)!}$$

4．重复排列

从 m 个不同的元素中，每次取出 n 个元素（元素可以重复出现，n 也不一定要小于或等于 m），按照一定的顺序排成一列，叫做从 m 个不同的元素中，每次取出 n 个元素的重复

排列，其可能有的排列种数为 m^n。

5. 组合

从m个不同的元素中，任取n（$n\leqslant m$）个元素编成一组，叫做从m个不同的元素中任取n个元素的一个组合。这些组合的种数记作 C_m^n

$$C_m^n=\frac{m!}{n!\ (m-n)!}$$

组合有两条重要的性质：

（1）$C_m^n=C_m^{m-n}$

（2）$C_m^n+C_m^{n-1}=C_{m+1}^n$

6. 二项式定理

当n为正整数时，有

$$(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^na^0b^n$$

二、随机事件与概率

1. 随机事件

对随机现象进行的观察或试验称为随机试验。在一定的条件下进行的随机试验中，可能发生或可能不发生的事情称为随机事件。随机事件在一次随机试验中可能发生也可能不发生，表现出不确定性，但在同样的条件下进行的大量重复试验中又具有某种明显的规律性（即所谓统计规律性）。随机事件通常以大写字母 A、B、…等来表示。随机事件常简称为事件。

随机事件有两种极端情况：

必然事件　即在任何一次试验中必然发生的事件。

不可能事件　即在任何一次试验中都不可能发生的事件。

2. 随机事件的概率

在一组不变的条件 S 下，重复作m次试验，n 为在m 次试验中事件 A 发生的次数。当m很大时，如果事件 A 发生的频率$\frac{n}{m}$稳定地在某一常数 p 附近摆动，并且随着试验次数m的增加，其摆动幅度会越来越小，则称事件 A 为随机事件，并称数值 p 为事件 A 在条件组 S 下发生的概率，记作

$$P(A)=p$$

在处理实际问题时，常常也把多次的大量试验所测得的一系列频率的平均值或一次大量试验中所测得的频率当作概率的近似值。

3． 古典概型

在古典概型问题中，所有可能的试验结果只有有限多个，即试验的基本事件个数是有限的，并且，所有这些基本事件都是等可能的。

设古典概型问题中基本事件总数为m，事件 A 由其中某 n 个基本事件构成，则出现事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{n}{m}$$

若事件组 A_1，A_2，…，A_n 满足

（1）A_1，A_2，…，A_n 发生的机会相同（等可能性）；

（2）在任何一次试验中，A_1，A_2，…，A_n 至少有一个发生（完全性）；

（3）在任何一次试验中，A_1，A_2，…，A_n 至多只有一个发生（互不相容性），

则称事件组 A_1，A_2，…，A_n 为等可能完备事件组。

三、事件的关系和运算

1． 事件之间的相互关系

（1）包含关系

如果事件 A 的发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或说事件 A 包含在事件 B 中，记作 $B \supset A$。

（2）相等关系

对于事件 A 和事件 B，若有 $A \subset B$，且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$。

（3）互不相容关系

对于事件 A 和事件 B，如果二者不能同时出现，则称事件 A 和事件 B 互不相容。

（4）互逆关系

对于事件 A 和事件 B，若它们是互不相容的，并且，在任何一次试验中，事件 A 或事件 B 中必有一个发生，则称事件 A 和事件 B 为互逆或互为对立的关系。

2. 事件的运算

（1）事件的和

设有事件 A 和事件 B，“A、B 二事件中至少有一个发生”这一事件，称为事件 A 与事件 B 之和，记作 $A+B$ 或 $A \cup B$。

（2）事件的积

设有事件 A 和事件 B，“A、B 二事件同时发生”这一事件，称为事件 A 与事件 B 之积（或交），记作 AB 或 $A \cap B$。

（3）事件的差

设有事件 A 和事件 B，“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件，称为事件 A 与事件 B 之差，记作 $A-B$。

（4）事件的逆

“事件 A 不发生”是一个事件，叫做事件 A 的逆事件，

记作 $\bar{A}$。

3．儿条基本的运算法则

（1）交换律

$A+B=B+A$

$AB=BA$

（2）结合律

$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$

$ABC=(AB)C=A(BC)$

四、概率的加法定理

若事件 A 与事件 B 互不相容，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

推论 1

若 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容(即 $A_iB_j=V, i\neq j$)，则

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

推论 2

对立事件的概率之和等于 1，即

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

推论 3

若 $B\subset A$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

推论 4

对于任意两个事件 A、B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

五、条件概率与乘法定理

1. 相依事件

如果事件 A 的概率随事件 B 是否发生而定，事件 B 的概率随事件 A 是否发生而定，则称事件 A 与事件 B 为相依事件。

2. 条件概率

在事件 B 已经发生的条件下事件 A 发生的概率，叫做事件 A 在给定 B 的条件下的条件概率。记作 $P(A|B)$。

3. 乘法定理

两个事件 A、B 之积（交）的概率等于其中的一个事件（其概率不为0）之概率乘以另一事件在已知前一事件发生的条件下的条件概率，即

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

实际上，常常可以先利用试验方法求得 $P(A)$及 $P(B|A)$然后再应用上式去计算 $P(AB)$。

对于 A_i $(i=1,2,\cdots,n)$，如果 $P(A_i>0)$，$P(A_1A_2)>0$，…，$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

4. 事件的独立性

若对事件 A 和事件 B，有

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件 A、B 为相互独立的事件。

5. 关于独立事件的两个命题

(1) 如果事件 A、B 相互独立，则 $\bar{A}$，B；A，$\bar{B}$；$\bar{A}$，$\bar{B}$ 这三对事件也是相互独立的。

（2）如果 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，则这几个事件至少发生一个的概率为

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$$

如果对于整数 k：$2\leqslant k\leqslant n$，有

$$P(A_{i1}\cdot A_{i2}\cdots A_{ik})=P(A_{i1})P(A_{i2})\cdots P(A_{ik})$$

这里 i_1、i_2、i_k 满足 $1\leqslant i_1\leqslant i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，则称 A_1，A_2，…，A_n 是相互独立的。

实际上，往往先由试验方式出发去判断试验和事件的独立性。得到肯定的结论后，就可利用上述公式去计算有关的概率。

六、全概率公式与贝叶斯公式

1. 全概率公式

设事件组 A_1，A_2，…，A_n 满足

（1）A_1，A_2，…，A_n 互不相容，并且有

$P(A_i)>0\qquad(i=1，2，\cdots，n)$

（2）$A_1+A_2+\cdots+A_n=U$

（满足以上两个条件事件组称为完备事件组）

则对任一事件 B，都有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

当直接计算 $P(B)$ 比较困难而计算 $P(A_i)$、$P(B|A_i)$（$i=1，2，\cdots，n$）比较简单时，可以利用上式去计算 $P(B)$。此时解决问题的关键是如何找出完备事件组 A_1，A_2，…，A_n。

2. 贝叶斯公式

设 A_1，A_2，…，A_n 为一完备事件组，则对于任一具有

正概率的事件 B，有

$$P(A_m|B)=\frac{P(A_m)P(B|A_m)}{\sum\limits^{n} P(A_i)\ P(B|A_i)}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)\quad(m=1,2\cdots,n)$$

七、独立试验序列概型

设在单次试验中，事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则在 n 次重复试验中

$$P(\text{“}A\text{ 发生 }k\text{ 次”})=C_n^k p^k q^{n-k}$$
$$(q=1-p,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

当 p 很小而 n 很大时，有近似公式

$$P(\text{“}A\text{ 发生 }k\text{ 次”})\approx\frac{(np)^k}{k!}e^{-np}$$

当 p 不是很小而 n 很大时，有近似公式

$$P(\text{“}A\text{ 发生 }k\text{ 次”})\approx\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t_k^2}$$

其中 $t_k=\dfrac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$

在考虑实际问题时请注意：同时观察在相同条件下进行的 n 个试验与重复观察同一试验 n 次有相同的意义。

在学完这一章后，要求能够弄清随机事件的概念，熟悉事件的关系与运算，正确理解概率的定义并能利用有关公式去处理一些比较简单但有一定典型意义的概率问题。

例 题

一、由五个数字0、1、2、3、4排列起来能组成多少个不同的五位数？

解　五个数字的全部排列共有 $5!=120$ 种，其中数字0排在首位者不构成五位数，这样的数字共有 $4!$ 种（即24种）。所以，由0、1、2、3、4这五个数字排列起来能组成：

$$5!-4!=96 \text{ 个不同的五位数。}$$

二、在0、1、2、3、4五个数字中任意抽取3个（允许重复）组成三位数，一共有多少种不同的组成方法？

解　在五个数字中任意抽取3个的重复排列共有 $5^3=125$ 个，其中以数字0为首位者不组成三位数，这样的数字有 $5^2=25$ 个。所以，所求的组成方法种数为：

$$5^3-5^2=100 \text{（种）}$$

三、有13个球队参加比赛，先分两组赛，第一组7个队，第二组6个队。每组进行单循环赛，然后由两组第一、二名进行单循环赛定前四名名次。问共要进行多少场比赛？

解　球赛为两队一场，无次序，所以这是组合问题。第一组7个队要进行 $C_7^2=\frac{7\times 6}{2\times 1}=21$ 场比赛；第二组6个队要进行 $C_6^2=\frac{6\times 5}{2\times 1}=15$ 场比赛。两组第一、二名共4个队还要进行 $C_4^2=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$ 场比赛，所以，总共要进行 $C_7^2+C_6^2+C_4^2=21+15+6=42$ 场比赛。

四、将 *MATHEMATICS* 一词中的字母，每次选四个来排列，问共有多少种不同的排列方法？

解　*MATHEMATICS* 一词中共有8个不同的的字母，其中 *A*、*M* 和 *T* 各有两个。今从中任选四个构成一组，