322

概率论与数理统计
学习指导与提高

朱荣生 郭永强 编

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导与提高/朱荣生,郭永强编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2002.1
ISBN 7-81073-264-1

Ⅰ.概... Ⅱ.①朱...②郭... Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 008705 号

内 容 简 介

本书是以工程数学《概率论与数理统计》为主线,结合全国硕士研究生入学考试内容编写的学习指导书,并辅以 A、B 两套练习题供读者练习、提高。

本书包括概率论与数理统计两大部分。共分八章,每章含有内容提要、基本要求、例题、习题 A、B。

本书适合高等院校非数学专业学生作为《概率论与数理统计》课程学习方法的指导用书,也可供考生参加全国硕士研究生入学考试及其它各类考试的《概率论与数理统计》课程学习辅导之用。

哈 尔 滨 工 程 大 学 出 版 社 出 版 发 行
哈尔滨市南通大街145号 哈工程大学11号楼
发行部电话:(0451)2519328 邮编:150001
新 华 书 店 经 销
哈 尔 滨 工 业 大 学 印 刷 厂 印 刷
*
开本 850mm×1 168mm 1/32 印张 7.75 字数 225 千字
2001 年 12 月第 1 版 2001 年 12 月第 1 次印刷
印数:1—2100 册
定价:12.80 元

前　言

概率论与数理统计作为研究随机现象的一门数学学科，已经成为从事社会科学、自然科学、工程技术、管理、生产和经营、医学等领域工作人员的必备知识，是高等院校大多数专业的必修课，也是研究生入学考试中部分主要内容。

概率论与数理统计具有数学学科所共有的高度抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性。此外还具有内容丰富、概念完整、方法独特、结论深刻的特点。

为了使学生更好地理解和掌握有关的基本概念和解题方法，培养学生的逻辑推理能力和灵活运用所学的知识去分析、解决实际问题，我们以工程数学《概率论与数理统计》教材为主线，考虑到全国研究生入学考试的需要，力求做到深入浅出，突出重点、难点，以有实际意义的典型问题为出发点，编写了这本学习方法指导书。以期帮助读者深刻理解、牢固掌握基本概念，和提高分析问题、解决问题的能力。

解题是学好数学必不可少的过程，通过解题可以加深对概念的理解，巩固知识，掌握研究问题的方法和技能。为此我们精选了一些有实际意义的习题，并分为 A、B 两套，在习题 B 中选入大量的研究生入学试题，供读者练习之用。希望读者多练习、勤思考，练好解题基本功。在学习时应注意：①抓主要矛盾，如对于随机变量，只要知道其取哪些值，及取值的统计规律，其它问题就迎刃而解了；②熟练掌握一些有代表性的典型问题，学会举一反三；③学会将复杂问题转化成几个简单问题来处理，如全概率公式的应用；④对同一问题，从不同的角度分析、解决，可以一题多解，通过比较，提高解题能力。读者不妨一试。为了深化概念的理解，我们建

议在教学中引入多媒体课件和数学试验。例如对一些典型问题和概念仿真试验，在习题二、四我们已加入这部分的习题，供读者练习。

本书由华东船舶工业学院基础学科系朱荣生、郭永强编写，朱荣生副教授为主编。陈明、赵俊同志在习题选做、校对等方面做了许多工作。本书由江苏大学吴顺唐教授主审，并提出了许多宝贵的建议和意见，在此我们深表谢意。

本书在编写过程中，还参考了北京大学、上海交大、哈尔滨工程大学的有关书籍，并得到了工程数学教研室的同事们的大力支持，在此深表感谢。

由于编者水平所限，书中难免有不妥和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2001 年 10 月

目　录

预 备 知 识

基本原理与排列组合

1. 加法原理　设完成一件事有 n 类方法，只要选择任何一类中的一种方法，这件事就可以完成。若第一类方法有 m_1 种，第二类方法有 m_2 种，…，第 n 类方法有 m_n 种，并且这 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法里，任何两种方法都不相同，则完成这件事有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法。

例　题

例 1　由甲地到乙地，有飞机、火车、汽车三种交通工具。若飞机每天 2 班，火车每天 3 次，汽车每天 4 趟，问一天中由甲地赴乙地有几种走法？

解　一天中由甲地赴乙地有三种方法：乘飞机、乘火车、乘汽车，所以 $n=3$。其中乘飞机有 2 种方法，乘火车有 3 种方法，乘汽车有 4 种方法，所以 $m_1=2, m_2=3, m_3=4$。由加法原理可知一天中由甲地赴乙地共有

$$m_1+m_2+m_3=2+3+4=9(\text{种方法})$$

2. 乘法原理　设完成一件事有 n 个步骤，第一步有 m_1 种方法，第二步有 m_2 种方法，…，第 n 步有 m_n 种方法，并且完成这件事必须经过第一步，则完成这件事共有

$$m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n=\prod_{i=1}^{n}m_i(\text{种方法})$$

例 2 由甲地到乙地有 A、B 两条路线，由乙地到丙地有 C、D、E 三条路线，问由甲地经乙地赴丙地有几种不同的路线？

解 由甲地经乙地赴丙地可分两步完成，所以 $n = 2$。第一步由甲地到乙地，第二步再由乙地到丙地。因为第一步从甲地至乙地有两条路线可供选择，$m_1 = 2$。无论走哪一条路线到乙地后，第二步又有三条路线去丙地 $m_2 = 3$，由乘法原理可知由甲地经乙地赴丙地的不同的路线共有

$$m_1 \cdot m_2 = 2 \times 3 = 6(\text{种})$$

3. 排列　从 n 个不同的元素中，每次取出 m 个元素，按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个元素中每次取出 m 个元素的一个排列。

按照取法的不同，将排列分为选排列和可重复排列。

(1) 选排列　从 n 个不同的元素中，每次取出一个元素，取后不再放回，连续抽取 $m(m \leqslant n)$ 次，依次排成一列，称为选排列。其不同的排列种数用 P_n^m 或 A_n^m 表示，共有 $n(n-1)\cdots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ 种不同的排列。选排列的种数：

$$P_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

特别地，当 $m = n$ 时的排列(简称为全排列)共有 $n!$ 种不同排列，即 $P_n^n = n!$，并规定 $0! = 1$。

(2) 可重复排列　从 n 个不同元素中，有放回地依次取出 m 个元素进行排列，共有 n^m 种不同的排列。

例 3 由 1,2,…,9 九个数字可以组成多少个不同的 3 位数？

解 显然这是一个可重复的排列问题。$n = 9$，$m = 3$，所以九个数字可以组成 $9^3 = 729$ 个 3 位数。

例 4 从 10 件产品(其中 2 件次品、8 件正品) 中每次取 1 件观测后放回，共取 3 次(简称为有放回地取 3 件)，求这 3 件产品中：

① 恰有 2 件次品的排列数；

② 至多有 1 件次品的排列数。

解 ① 这是一个可重复的排列问题。

可知其排列数为 $3 \times 2^2 \times 8 = 96$

②"至多有 1 件次品"可分为"恰有 1 件次品"与"没有次品"两种情况,可以得到其排数为 $3 \times 2 \times 8^2 + 8^3 = 896$

例 5 在北京、武汉、广州的民用航空线上需要几种不同的飞机票?

解 由于从每一站到其它两个站都是不同的飞机票,而且往返两站之间的票也不相同,所以这是一个 $n = 3, m = 2$ 的选排列问题。因此共有:$A_n^m = 3 \times 2 = 6$ 种飞机票。

(3) 不全相异元素的全排列

设 n 个元素中只有 $m(m < n)$ 种不同的元素,其个数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_m, n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$,将这 n 个元素的全排列称为不全相异元素的全排列。其不同的排列种数为

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!}$$

4. 组合 从 n 个不同元素中,每次取出 $m(m \leqslant n)$ 个元素不考虑其先后顺序作为一组,称为从 n 个元素中取出 m 个元素的一个组合。共有

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

种不同的组合。一般,组合的组合种数用 $C_n^m = \binom{n}{m}$ 表示,$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!}$ 并且规定 $C_n^0 = 1$

主要组合公式

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

$$C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$$

$$C_{n_1+n_2}^m = \sum_{k=0}^{m} C_{n_1}^k C_{n_2}^{m-k}$$

例 6　在北京、武汉、广州的民用航空线上，头等舱座位有几种不同的票价？

解　因为在每两站之间只有一种票价，而且往返两站之间的票也不相同，所以这是一个 $n=3, m=2$ 的组合问题。因此有 $C_3^2 = \frac{3\times 2}{2\times 1}$ 种票价。

不同类元素的组合：从不同的 k 类元素中，取出 m 个元素。从第 1 类 n_1 个不同的元素中取出 m_1 个，从第 2 类 n_2 个不同的元素中取出 m_2 个，…，第 k 类n_k 个不同的元素中取出m_k 个，并且 $n_i \geqslant m_i > 0 (i=1,2,\cdots,k)$ 共有

$$C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \cdots C_{n_k}^{m_k} = \prod_{i=1}^{k} C_{n_i}^{m_i}$$

种不同取法。

例 7　从 3 个电阻，4 个电感，5 个电容中，取出 9 个元件，问其中有 2 个电阻，3 个电感，4 个电容的取法有多少种？

解　这是一个不同类元素的组合问题。共有

$$C_3^2 C_4^3 C_5^4 = C_3^1 C_4^1 C_5^1 = 60 \text{ 种取法}$$

例 8　从 10 件产品(其中 2 件次品，8 件正品)中任取 3 件，求这 3 件产品中：

(1) 恰有 2 件次品的组合数；

(2) 至多有 1 件次品的组合数。

解　(1) 这是一个不同类元素组合问题。可计算出其组合数为

$$C_2^2 C_8^1 = 8$$

(2)“至多有 1 件次品”可分为“恰有 1 件次品”与“没有次品”两种情况，其组合数为

$$C_2^1 C_8^2 + C_2^0 C_8^3 = 112$$

第一章　随机事件和概率

内容提要

概率论与数理统计是研究与揭示随机现象的数量规律性的一门数学学科。它与微积分学、线性代数等其它数学分支有着根本的区别，这是因为后者是“确定性现象”。为此应掌握分析，研究随机现象的理论、方法，清楚随机试验、随机事件、事件的概率等一系列最基本的概念，为后面章节的学习打好基础。

基本要求

1. 掌握随机实验、样本空间、随机事件的概念，熟悉事件之间的关系与运算；

2. 正确理解随机事件的概率的定义，熟练掌握概率的有关性质；

3. 熟练掌握古典概型问题的计算；

4. 熟练掌握条件概率、乘法公式、全概率公式、贝叶斯(Bayes)公式及应用；

5. 掌握事件与实验的独立性概念，并熟练运用。

1.1　随机现象及其统计规律

在客观世界中存在着两类不同的现象：确定性现象和随机现象(不确定性现象)。在一定条件下，某种结果必定发生或必定不发生的现象称为确定性现象。这类现象的一个共同点是事先可以断定其结果；而在一定条件下具有多种可能发生的结果的现象称为

随机现象。这类现象的一个共同点是事先不能预言多种可能结果中究竟哪一种结果出现。

一般来说,随机现象具有两重性:表面上的偶然性与内部蕴含着的必然规律性,随机现象的偶然性又称为随机性。在一次实验或观察中,结果的不确定性就是随机现象随机性的一面;在相同的条件下进行大量重复实验或观察时呈现出来的规律性是随机现象必然性的一面,称随机现象的必然性为统计规律性。

1. 随机试验与随机事件

为了叙述方便,把对随机现象进行的一次观测或一次实验统称为一个试验。如果这个试验满足下面的三个条件:(1) 在相同的条件下可以重复进行;(2) 试验的结果不唯一,但是可以事先明确都有哪些可能出现的结果;(3) 每次试验前不能预言哪个结果将出现。则称它是一个随机试验,简称为试验。一般用字母 E 表示。若实验 E 是由多个实验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 各做一次组成的,则称 E 为复合实验,记作

$$E = E_1 \cdot E_2 \cdot \cdots \cdot E_n$$

在随机试验中,每一个可能出现的不可分解的最简单的结果称为随机试验的样本点。用 e 表示,称由单个样本点构成的事件为基本事件。而由全体样本点构成的集合称为基本空间或样本空间,常用 S 或 U 表示。样本空间 S 的子集即随机事件,记为 A、B、C 等,事件 A 发生当且仅当 A 中的一个样本点出现。

例　题

例 1　设 E_1 为抛掷一枚匀称的硬币,观察正、反面出现的情况。记 e_1 是出现正面,e_2 是出现反面。于是 S 由两个基本事件 e_1,e_2 构成,即 $S_1 = \{e_1, e_2\}$。

例 2　设 E_2 为掷一粒骰子观察出现的点数。记 e_i 为出现 i($i = 1,2,\cdots,6$) 个点,于是有 $e_1 = 1, e_2 = 2, \cdots, e_6 = 6$,则 $S_2 = \{1,$

$2,\cdots,6\}$。

例3 设 E_3 为在相同条件下接连不断地定点投篮，投中为止，记录投球次数。记 e_i 为投了 i 次球($i = 1,2,\cdots$)，若令 $e_1 = 1$，$e_2 = 2,\cdots$，则 $S = \{1,2,\cdots\}$。

例4 设 E_4 为检查一批灯泡的质量，记录灯泡的使用寿命，令 e_i 为灯泡使用的时间t，显然 $t \in [0,\infty)$，$S = [0,\infty)$，通过上面的几个例子可以看出，随机试验大体可以分成只有有限个可能结果(如例1，例2)；有可列个可能结果(如例3)；无数个可能结果(如 E_4) 这样三种情况。

注意：一个试验中样本点个数的确定都是相对试验目的而言的，虽然我们不能事先预言试验的哪个结果出现，但是能够指出它出现的范围。因此，我们所讨论的随机试验是有着十分广泛的含义的。

例5 写出下列随机试验的样本空间 S：

(1) 同时掷两枚骰子，记录两枚骰子点数之和；

(2)10 件产品中有 3 件是次品，每次从中取 1 件，取出后不再放回，直到 3 件次品全部取出为止，记录抽取的次数；

(3) 生产某种产品直到得到 10 件正品，记录生产产品的总件数；

(4) 将一尺长的直棒折成三段，观察各段的长度。

解 (1)$S_1 = \{2,3,\cdots,12\}$

(2)$S_2 = \{3,4,\cdots,10\}$

(3)$S_3 = \{10,11,\cdots\}$

(4) 设 x,y,z 分别表示第一段、第二段、第三段的长度。则有

$$S_4 = \{(x,y,z) \mid x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z = 1\}$$

在例2中，$S = \{1,2,3,4,5,6\}$，而 E_2 中的一个事件是具有某些特征的样本点组成的集合。例如，设事件 $A = \{出现偶数点\}$，$B =$

{出现的点数大于3}，$C=${出现2点}，可见它们都是 S 的子集。显然，如果事件 A 发生，那么子集{2,4,6}中的一个样本点一定出现，反之亦然。故有 $A=\{2,4,6\}$。事件 B 发生就是指出现了样本点4，5或6，否则我们就说事件 B 没有发生，故有 $B=\{4,5,6\}$。类似地有 $C=\{2\}$。一般任一由样本点组成的 S 的子集都是随机事件。把样本空间 S 也作为一个事件。因为在每次试验中，必定有 S 中的某个样本点发生，即事件 S 在每次试验中必定发生，故称为必然事件。在例2中{点数小于等于6}就是一个必然事件。在例3中{至少投一次球}也是一个必然事件。任何随机试验的样本空间 S 都是必然事件。类似地，把不包含任何样本点的空集 Φ 也作为一个事件。显然它在每次试验中都不发生。在每次试验中必定不会发生的事件称为不可能事件，记为 Φ。在例2中"点数等于7"，"点数小于1"等都是不可能事件。在例3中"不出现正品"也是不可能事件。我们知道，必然事件 S 与不可能事件 Φ 都不是随机事件。因为作为试验的结果，它们都是确定性的，并不具有随机性，但是为了讨论问题方便，也将它们当作随机事件来处理。

1.2 事件之间的关系与运算

如果没有特别的说明，下面问题的讨论我们都假定是在同一样本空间 S 中进行的，设 A、B 为两个事件。

(1) 子事件　如果 A 中的每一个样本点都属于 B，则称事件 A 是 B 的子事件，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。这就是说，在一次试验中，若事件 A 发生必然导致事件 B 发生。

(2) 相等事件　如果 $A\subset B$ 与 $B\subset A$ 同时成立，则称事件 A 与 B 相等或等价，记为 $A=B$。即，在一次试验中，等价的两个事件同时发生或同时不发生，因此可以把它们看成是一样的。

(3) 和事件　把至少属于 A 或 B 中一个的所有样本点构成的

集合称为事件 A 与 B 的和，记为 $A \cup B$，即事件 $A \cup B$ 表示在一次试验中，事件 A 与 B 至少有一个发生。

(4) 积事件　把同时属于 A 及 B 的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的交或积，记为 $A \cap B$ 或 $A \cdot B$，有时也简记为 AB，也即事件 AB 表示在一次试验中，事件 A 与 B 同时发生。

上面的两种基本运算可以推广到多个事件的情况。

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生；

$A_1 A_2 \cdots A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生。

(5) 事件的差　事件 A 发生而事件 B 不发生称为事件 A 与 B 的差，记作 $A - B$。

(6) 互不相容事件　如果 $AB = \Phi$，那么称事件 A 与 B 是互不相容的(或互斥的)。即在一次试验中事件 A 与事件 B 不可能同时发生。

事件的互不相容关系也可以推广到多个事件的情形。即：如果 $A_1 A_2 \cdots A_n = \Phi$，则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互不相容的。如果 $A_i A_j = \Phi (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$，则称它们是两两互不相容的。

(7) 逆事件(对立事件)　事件 A 与 B 中有且仅有一个发生，即 $A \cup \overline{B} = S$，且 $A \cdot \overline{B} = \Phi$，称 B 为事件 A 的逆或 A 的对立事件，记作 $\overline{A}$。即在第一次试验中事件 A 与 $\overline{A}$ 至少有一个发生，而且不会同时发生。

事件之间的运算规律：

1) 交换律　$A \cup B = B \cup A \quad AB = BA$

2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(AB)C = A(BC)$

3) 分配律　$A(B \cup C) = AB \cup AC$

$A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$

4) 迪·摩根律　$\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B} \quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

注意:① 事件是由基本事件组成的,所以它是样本空间的子集,事件之间的关系和运算与集合之间的关系和运算完全一致,只是术语不同而已,如表 1 - 1 所示。

② 事件的运算性质完全等同与集合的运算性质。

表 1 - 1

记号	概率论	集合论
S	样本空间,必然事件	全集
Φ	不可能事件	空集
e	样本点	元素
A	事件	集合
$\overline{A}$	A 的逆事件	A 的余集
$A \subset B$	A 是 B 的子事件	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 与 B 相等	集合 A 与 B 相等
$A \cup B$	A 与 B 的和事件	A 与 B 的并集
$A \cap B$	A 与 B 的积事件	A 与 B 的交集
$A - B$	A 与 B 的差事件	A 与 B 的差集
$AB = \Phi$	A 与 B 互不相容	A 与 B 互不相交
$A\overline{B} = \Phi$ $A \cup B = S$	A 与 B 互为逆事件	A 与 B 互为余集

例 · 题

例 1 设 A,B,C 是三个随机事件。试用 A,B,C 表示下列各事件:

(1) 恰有 A 发生； (2) A 和 B 都发生而 C 不发生；

(3) 所有这三个事件都发生； (4) A,B,C 至少有一个发生；

(5) 至少有两个事件发生； (6) 恰有一个事件发生；

(7) 恰有两个事件发生； (8) 不多于一个事件发生；

(9) 不多于两个事件发生； (10) 三个事件都不发生。

解 按照事件之间的运算关系得

(1) $A\overline{B}\,\overline{C}$ (2) $AB\overline{C}$ (3) ABC (4) $A\cup B\cup C$

(5) $AB\cup BC\cup CA$ (6) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$

(7) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$ (8) $\overline{AB\cup BC\cup CA}$

(9) $\overline{A\cup B\cup C}$ (10) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

例 2 设某工人连续生产了 4 个零件，A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品（$i=1,2,3,4$），试用 A_i 表示下列各事件：

(1) 没有一个次品； (2) 至少有一个是次品；

(3) 只有一个是次品； (4) 至多有一个次品；

(5) 恰好有三个是次品。

解 (1) $A_1A_2A_3A_4$ (2) $\overline{A_1A_2A_3A_4}$

(3) $\overline{A_1}A_2A_3A_4\cup A_1\overline{A_2}A_3A_4\cup A_1A_2\overline{A_3}A_4\cup A_1A_2A_3\overline{A_4}$

(4) $\overline{A_1}A_2A_3A_4\cup A_1\overline{A_2}A_3A_4\cup A_1A_2\overline{A_3}A_4\cup A_1A_2A_3\overline{A_4}\cup A_1A_2A_3A_4$

(5) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4$

例 3 下列各式说明事件 A 和 B 之间存在何种关系？

(1) $AB=A$；(2) $A\cup B=A$。

解 (1) 因为“$AB=A$”与“$AB\subset A$ 且 $A\subset AB$”是等价的，由 $A\subset AB$ 可以推出 $A\subset A$ 且 $A\subset B$，因此有 $A\subset B$。

(2) 因为“$A\cup B=A$”与“$A\cup B\subset A$ 且 $A\subset A\cup B$”等价，由 $A\cup B\subset A$ 可以推出 $A\subset A$ 且 $B\subset A$，因此有 $B\subset A$。