现代控制系统理论小丛书

分布参数控制系统

王康宁 著

科学出版社

现代控制系统理论小丛书

分布参数控制系统

王 康 宁 著

科 学 出 版 社

1 9 8 6

内 容 简 介

本书是“现代控制系统理论小丛书”之一．这套小丛书介绍了现代控制系统理论的各个部分，并着重说明这种理论如何由工程实践的需要而产生，又怎样应用它来解决工程设计中的实际问题．

本书与同类书不同之处在于内容比较全面．主要论述了分布参数控制系统的可控性、可观测性、镇定问题、极点配置问题、参数辨识与最优控制问题．也介绍了本书需要的准备知识——线性算子半群与发展方程．本书可供从事分布参数控制系统理论研究的人员参考，也可作为高等院校有关专业的教材或教学参考书．

现代控制系统理论小丛书

分布参数控制系统

王康宁 著

责任编辑 刘兴民 袁放尧

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年6月第一版 开本：787×1092 1/32

1986年6月第一次印刷 印张：13

印数：0001—3,000 字数：293,000

统一书号：15031·724

本社书号：4822·15—8

定价：3.05元

现代控制系统理论小丛书序言

在五十年代末六十年代初，在工程实践的基础上，特别是在空间技术等方面的实践基础上，自动控制理论发展到以状态变量为标志的现代控制理论的阶段．这种新的理论对于控制系统的性能提供了更深入的认识，使得在实践中发现的一些现象得到更好的说明．这些理论成果在以往十几年当中又在许多空间技术与航海、航空的型号设计中得到了应用，受到了实践的检验．

工程实践迫切需要发展理论，而一些新技术，特别是计算技术与现代数学的方法使现代控制理论的发展成为可能．为了控制更复杂的系统，并提高控制精度，数字控制逐渐代替模拟装置．这主要是利用了数字电子计算机，同时有赖于新的数学的描述与方法．

解放以来，我国科学技术得到迅速发展．我国人造地球卫星的发射与回收的成功以及其它尖端技术上的巨大成就都表明我国的控制技术已经达到较高的水平．我们应当本着“精益求精”的精神，使利用数字电子计算机来控制的这种先进技术更广泛地应用到各种有关的工程技术中去，并在工程实践中不断总结提高．我们撰写这一套“现代控制系统理论小丛书”，就是为了介绍现代控制系统理论的各个部分，并着重说明这种理论怎样由工程实践的需要而产生，又怎样用来解决工程设计中的实际问题．

这套小丛书，理论与实际并重．从每一种书来说，或偏重基础理论的阐述，但也给出应用的例子；或偏重于一项工程问

题，但也把它放在坚实的理论基础之上．本丛书之所以叫做“小丛书”，主要是指每种书的篇幅小，而不是指通俗普及性小册子．本书主要是为从事控制理论研究的科研工作者和工程技术人员而撰写的．

本丛书包括线性系统理论、非线性系统理论、极值控制理论、系统辨识、最优估计与随机控制理论、分布参数系统理论及其他有关内容．全套丛书计划分十几册出版．

希望这套丛书对于我国实现四个现代化作出它的贡献．

关肇直

1982 年 5 月于北京

序　　言

随着五十年代空间科学与技术的进步，现代控制理论逐步地发展起来. 自动调节原理是用传递函数或脉冲响应函数来描述控制系统的输入-输出关系的. 因此,传递函数或脉冲响应函数描述了控制系统的运动规律. 现代控制理论则是在引入状态空间与状态变量的概念的基础上，直接用微分方程来描述控制系统的运动规律. 因此，当人们从现代控制理论的观点来研究、设计一个控制系统时,首先必须建立它的数学模型，用严格的数学方法来描述其运动规律. 其次要确定对系统控制的目的和周围环境对系统的影响，同样要用数学的方法来描述控制的准则和对系统的外部干扰. 现代控制理论总是用数学的形式来表述控制原则. 这个控制原则又有可能应用到任何一个具体的控制系统中去.

在用常微分方程来描述集中参数控制系统方面，在五十年代中期和六十年代初期出现了几项著名的工作：在系统的最优控制方面，有 Pontryagin, L. C. 极大值原理；在线性系统方面，有可控性、可观测性的概念和判别准则；在带随机干扰的系统方面，有递推滤波理论. 这些工作的出现不仅对实际工作有指导意义,而且还引起了一系列理论工作的发展.

在六十年代初期，由于实际需要和集中参数系统控制理论发展的影响，现代控制理论的一个新的分支——分布参数系统的控制开始发展起来. 分布参数系统是指有无穷个自由度的系统. 用数学的语言讲,就是用偏微分方程或偏微分-积分方程或积分方程描述的系统. 在实际中，通常是偏微分方

程描述的系统．例如，温度场的控制、弹性振动系统的控制、核反应堆的控制等都是分布参数系统的控制．不同于用常微分方程描述的集中参数系统，分布参数系统的状态空间是一个函数空间——无穷维空间，分布参数系统在每一时刻的状态是一个函数．因此，分布参数系统的控制既有其复杂性又有其特殊规律．分布参数系统是无穷维系统，所以泛函分析是适宜研究分布参数系统的控制问题的数学工具．

现代控制理论，按控制的问题分类，通常分成最优控制和系统与控制两部分．分布参数系统的控制在发展过程中，由于科学、技术领域中不断提出分布参数系统的控制问题，需要从理论上系统地、严密地进行研究．因此，除工程师、系统科学家外，一些数学家也进入到这一领域从事开辟性的工作．在分布参数系统的最优控制方面，Lions J. L. 院士的早期著作(见参考文献[13])问世以后，在学术界引起了强烈的反响．在分布参数系统的系统、控制方面，Russell D. L. 教授在可控性、镇定问题方面较早地进行了研究．随着分布参数系统的控制理论的发展，研究的问题愈加广泛，用的数学方法也愈多样．

分布参数系统的控制这一领域的研究工作，我国几乎与国际上同时起步．分布参数系统的控制理论在我国的发展表明，结合实际的控制系统开展理论研究，才能推动控制理论生气勃勃地向前发展．本书将系统地介绍我国学者近十年来在分布参数系统控制领域的一部分理论研究工作．书中讲述的几个问题都是国际上近些年来在这一领域中理论研究工作较活跃的问题．同任何一部著作一样，本书不可能讲述在这一领域里的每一个重要的问题．也不可能介绍我国学者在这一领域里的每一个重要的工作．由于本书体系的缘故，仅介绍了用 Banach 空间中的发展方程描述的控制系统的有关问题．再者，由于本书是“现代控制系统理论小丛书”的一册，为了与该

从书的其它分册匹配，篇幅上不能过大．因此，在本书中也不可能全面将我国学者有关的重要工作加以介绍，敬请读者谅解．

本书的第一章系统地介绍了准备知识——线性算子半群与发展方程．就本书而言，该章似乎篇幅稍大，但是考虑到想进一步了解该领域的初学者，给予这方面系统的准备知识是必要的．在研究各种不同的问题需要的一些专门的泛函分析知识，都在有关的章节中作了介绍．第二章讲可控性、可观测性．这是现代控制理论的两个基本概念．着重阐明这两个概念在有穷维空间中的系统同无穷维空间中的系统之间的差异．第三章论述具有实际背景的弹性振动系统的镇定问题．第四章讲述极点配置问题．第五章讲述了在石油勘探、开发中的双重孔隙、单孔隙储集层系统的参数辨识问题，这个问题在生产上和理论上都很重要．第六章讲述了具有各种泛函指标的系统的最优控制问题．

本书的内容曾给研究生讲授过一次．但鉴于作者的水平，书中的缺点在所难免．请读者批评指正．于景元同志在审阅本书原稿时，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢．

王康宁

1983年9月

目　　录

现代控制系统理论小丛书序言
序言
第一章　线性算子半群与发展方程 …… 1
§1.1　线性算子半群的概念及例子 …… 2
§1.2　线性算子半群的生成算子 …… 4
§1.3　压缩线性算子半群与散逸算子 …… 13
§1.4　紧线性算子半群 …… 14
§1.5　解析半群 …… 20
§1.6　线性算子半群的扰动 …… 23
§1.7　非齐次一阶发展方程 …… 28
§1.8　例子 …… 34
§1.9　线性算子群与二阶发展方程 …… 37
§1.10　时变一阶发展方程 …… 50
§1.11　Lions 型的发展方程 …… 66
§1.12　Hilbert 空间中的一阶发展方程 …… 91
第二章　可控性、可观测性 …… 104
§2.1　关于泛函分析的一些定理 …… 104
§2.2　无穷维空间中的控制系统的可控性的定义问题 …… 111
§2.3　可控性、可观测性的条件(I) …… 115
§2.4　可控性、可观测性的条件(II) …… 124
第三章　分布参数控制系统的镇定 …… 139
§3.1　四阶常微分算子的性质 …… 143
§3.2　振动闭环系统的算子的谱 …… 147
§3.3　振动系统的可控性、可观测性 …… 160
§3.4　具有双观测器的振动系统 …… 165

§3.5 稳定性 …… 170
§3.6 分布参数系统与集中参数系统的耦合系统的镇定问题 …… 175
§3.7 闭环系统的算子 $\mathscr{A}_1$ 的谱 …… 180
§3.8 以角速度或线加速度反馈时闭环系统的算子 $\mathscr{A}_1$ 的谱的分布 …… 192
§3.9 姿态反馈时闭环系统的算子 $\mathscr{A}_2$ 的谱的分布 …… 197
§3.10 以角速度和角度反馈时闭环系统的算子 $\mathscr{A}_2$ 的谱的分布 …… 200
第四章 分布参数控制系统的极点配置 …… 205
§4.1 几个引理 …… 206
§4.2 用一阶发展方程描述的控制系统的极点配置 …… 211
§4.3 用二阶发展方程描述的控制系统的极点配置 …… 219
§4.4 结果的应用与分析 …… 225
§4.5 算子 A 具有重本征值时系统的极点配置 …… 231
§4.6 分布参数多输入控制系统的极点配置 …… 232
§4.7 分布参数与集中参数的耦合系统的极点配置 …… 237
第五章 分布参数系统的参数辨识 …… 251
§5.1 Banach 空间中的隐函数定理 …… 251
§5.2 双重介质储集层系统的参数辨识 …… 255
§5.3 双重介质储集层系统的参数可辨识性 …… 276
§5.4 双重介质储集层系统的可观测性 …… 288
§5.5 单介质储集层系统的参数辨识 …… 292
§5.6 单介质储集层系统的参数可辨识性 …… 304
第六章 最优控制问题 …… 310
§6.1 具有二次泛函指标的系统的最优控制 …… 310
§6.2 具有二次判据的线性系统的最优控制 …… 327
§6.3 无穷时间的最优控制 …… 342
§6.4 算子 Q 为不定型的算子的 Riccati 方程 …… 355
§6.5 时间最优控制 …… 371
§6.6 一般泛函指标的最优控制 …… 393

参考文献 ………………………………………………………………… 401

第一章 线性算子半群与发展方程

在现代控制理论中，许多工程控制系统，例如，弹性振动系统的控制、温度场的控制，核反应堆的控制等系统都是以偏微分方程或偏微分-积分方程来描述其运动规律. 这一类型的控制系统是具有无穷自由度的系统，称为分布参数控制系统. 对于分布参数控制系统的偏微分方程的定解问题，在 Lions, J. L. 和 Magenes, E. 的《非齐次边值问题和应用》一书中作了专门的研究. 在分布参数系统的控制理论中，如果输入输出映像有一解析表达式，即使是理论上的表达式，也将对某些问题的研究带来更大的方便. 在用线性算子半群理论来求解非齐次一阶或二阶发展方程时，解对非齐次项的依赖关系，便可以用一个公式表达出来，从而给出控制系统的输入输出映像的表达式. 为此目的，在这里我们不去详述线性算子半群重要性质的各个方面，只对为了积分发展方程所需要的半群的基本性质和常用的发展方程的理论作扼要的叙述.

线性算子半群理论的基础工作，大约在 1948 年由 Hille, E 与 Yosida, E. 分别建立. 他们引入了线性算子半群的生成算子概念，得到了生成算子的特征. 研究了线性算子半群的可微分性，得到了齐次一阶发展方程的解用线性算子半群表示出来的公式. Kato, T. 于 1953 年研究了时变一阶发展方程的积分问题，引入了基本解算子，得到了齐次、非齐次一阶发展方程的解用基本解算子表示出来的公式. Tanable, T. 于 1960 年左右对时变一阶发展方程的基本解算子的构造和性质做了一系列的研究. Phillips, R. S. 于 1953 年左右对线

性算子半群的生成算子加上一个扰动算子后生成线性算子半群问题进行了研究，还研究了散逸算子生成压缩半群问题，并把它用到抛物型和双曲型偏微分方程的积分问题. 近些年来，还把线性算子半群与发展方程理论系统地应用到了分布参数系统的控制的各种问题之中. Fujie, Y. 和 Tanable, H. 于1973年研究了 Lions 型的一阶发展方程的软解(Mild Solution)问题，用线性算子半群理论，软解可用基本解算子表示出来. 这样，我们就能够用 Lions 型的一阶发展方程的软解来研究当控制函数出现在偏微分方程的边界条件上的分布参数系统的边界控制问题.

§1.1 线性算子半群的概念及例子[1]

设 E 是 Banach 空间，从 E 到 E 的单参数有界线性算子族 $\{T_t; t \geqslant 0\}$ 称为线性算子半群，是指它满足条件：

$$T_t T_s = T_{t+s},\ \forall t, s \geqslant 0,\ T_0 = I,$$

这里 I 是 E 中的不变算子.

线性算子半群 $\{T_t; t \geqslant 0\}$ 称为强连续的(或 (C_0) 类的)，是指它满足条件：

$$s - \lim_{t \to t_0} T_t x = T_{t_0} x,\ \forall t_0 \geqslant 0,\ x \in E.$$

线性算子半群 $\{T_t; t \geqslant 0\}$ 称为标准型的，是指存在常数 $\beta \geqslant 0$，使得

$$\|T_t\| \leqslant e^{t\beta},\ \forall t \geqslant 0.$$

特别，当 $\beta = 0$ 时，线性算子半群 $\{T_t; t \geqslant 0\}$ 称为压缩半群.

为简便起见，本书后面凡叙述的线性算子半群，均指 (C_0) 类半群.

例 1 在区间 $[0, \infty)$ 上一致连续有界函数全体，记为

$C[0,\infty)$，在 $C[0,\infty)$中按通常的函数运算及范数

$$\|x\| = \sup_{0 \leqslant t < \infty} |x(t)|.$$

$C[0,\infty)$ 是 Banach 空间. 用公式

$$(T_t x)(s) = x(t+s)$$

定义的 $C[0,\infty)$ 中的有界线性算子单参数族 $\{T_t;\ t \geqslant 0\}$ 是压缩线性算子半群.

例 2 考虑 Banach 空间 $C(-\infty,\infty)$. 在 $C(-\infty,\infty)$ 中用公式

$$(T_t x)(s) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(s-\tau)^2}{2t}} x(\tau)\,d\tau, & \text{当 } t > 0, \\ x(s), & \text{当 } t = 0. \end{cases}$$

定义的有界线性算子单参数族 $\{T_t;\ t \geqslant 0\}$ 是压缩半群.

设 $\{T_t;\ t \geqslant 0\}$ 是 E 中线性算子半群，对任一实数 α，$0 < \alpha < \infty$，则 $\|T_t\|$ 在 $[0,\alpha]$ 上有界. 事实上，若 $\sup_{0 \leqslant t \leqslant \alpha} \|T_t\| = \infty$，则存在 $\{t_n\} \subset [0,\alpha]$，使得 $\|T_{t_n}\| > n\ (n = 1,2,\cdots)$，于是存在序列 $\{t_n\}$ 的子序列 $\{t_{n_k}\}$，$t_{n_k} \to t_0 \in [0,\alpha]$ 当 $k \to \infty$ 时. 但是线性算子半群 $\{T_t;\ t \geqslant 0\}$ 是强连续的，所以，$s - \lim_{k \to \infty} T_{t_{n_k}} x = T_{t_0} x$. 依共鸣定理，$\|T_{n_k}\| \leqslant C$，$\forall k = 1, 2, \cdots$，这里 C 是一个正常数. 这同 $\|T_{n_k}\| > n_k\ (k = 1, 2, \cdots)$ 相矛盾. 故 $\|T_t\|$ 在任一有界区间 $[0,\alpha]$ 上有界.

令

$$p(t) = \log \|T_t\|,$$

$$\omega_0 = \inf_{t > 0} p(t)/t,$$

则
$$\omega_0 = \lim_{t \to \infty} p(t)/t.$$

事实上，当 ω_0 是有穷时，对任给 $\varepsilon > 0$，存在数 $t^* > 0$，

使得 $p(t^*)/t^* \leqslant \omega_0 + \varepsilon$. 对每一 $t > t^*$, 存在正整数 n 和实数 r, $0 \leqslant r < t^*$, 使得 $t = nt^* + r$. 由 T_t 的半群性质有 $p(t+s) \leqslant p(t) + p(s)$, $\forall t, s > 0$. 因此

$$\omega_0 \leqslant p(t)/t \leqslant \frac{np(t^*)}{nt^* + r} + \frac{p(r)}{t} \leqslant \frac{p(t^*)}{t^*} + \frac{p(r)}{t}$$

$$\leqslant (\omega_0 + \varepsilon) + p(r)/t.$$

因为 $p(r)$ 在区间 $[0, t^*]$ 上有界. 故 $\omega_0 \leqslant \varlimsup\limits_{t\to\infty} p(t)/t \leqslant \omega_0 + \varepsilon$. 由于 ε 是任意的, 因此 $\omega_0 = \varlimsup\limits_{t\to\infty} p(t)/t$. 同样可得 $\omega_0 = \varliminf\limits_{t\to\infty} p(t)/t$. 从而 $\omega_0 = \lim\limits_{t\to\infty} p(t)/t$.

对 $\omega_0 = -\infty$, 可类似地证明, $\omega_0 = \varlimsup\limits_{t\to\infty} p(t)/t = -\infty$.

因为 $\|T_t\|$ 在每一个有穷区间上有界, 因此存在正数 M_ε, 使得

$$p(t) \leqslant \log M_\varepsilon + t(\omega_0 + \varepsilon), \quad \forall t \geqslant 0.$$

因此, 当 ω_0 有穷时, 对任给 $\varepsilon > 0$, $\{T_t;\ t \geqslant 0\}$ 满足条件:

$$\|T_t\| \leqslant M_\varepsilon e^{t(\omega_0+\varepsilon)}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

§ 1.2 线性算子半群的生成算子[2,1]

设 $\{T_t;\ t \geqslant 0\}$ 是 Banach 空间 E 中的线性算子半群, 定义

$$D(A) = \left\{x \,\middle|\, x \in E,\ s - \lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \text{存在}\right\}$$

当 $x \in D(A)$ 时, 定义算子

$$Ax = s - \lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t x - x}{t}$$

易知 A 是定义在 $D(A)$ 上的线性算子, 称为线性算子半群 $\{T_t;\ t \geqslant 0\}$ 的生成算子.

定理 1 在 Banach 空间 E 中的线性算子半群 $\{T_t;t\geq 0\}$ 的生成算子 A 是 E 中的闭稠定算子. 如果 $x\in D(A)$, 则 T_tx 在区间 $[0,\infty)$ 上强可微,并且

$$\frac{d}{dt}T_tx = AT_tx = T_tAx,\ \forall t\in[0,\infty). \qquad (1.2.1)$$

证明 首先证明 $D(A)$是 E 中的稠子集. 任一 $x\in E$, 对每一 $t>0$ 定义

$$x_t = \frac{1}{t}\int_0^t T_s x ds.$$

线性算子半群$\{T_t;\ t\geqslant 0\}$是强连续的,因此,$s-\lim\limits_{t\downarrow 0} x_t = x$, 另一方面,对每一 $t>0$,

$$\frac{T_sx_t - x_t}{s} = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{s}\int_t^{t+s} T_\tau x d\tau - \frac{1}{s}\int_0^s T_\tau x d\tau\right].$$

因此

$$s-\lim_{s\downarrow 0}\frac{T_sx_t - x_t}{s} = \frac{T_tx - x}{t}.$$

这就是说,对每一 $t>0$, $x_t\in D(A)$. 故 $D(A)$在 E 中稠.

现在来证明式 (1.2.1). 任取一 $x\in D(A)$,

$$\frac{T_{t+s}x - T_tx}{s} = \frac{T_s - I}{s}T_tx = T_t\frac{T_sx - x}{s},\ \forall t,\ s>0.$$

由算子 A 的定义得:

$$s-\lim_{s\downarrow 0}\frac{T_sx - x}{s} = Ax.$$

所以

$$s-\lim_{s\downarrow 0}\frac{T_{t+s}x - T_tx}{s} = s-\lim_{s\downarrow 0}\frac{T_s - I}{s}T_tx$$

$$= s-\lim_{s\downarrow 0}T_t\frac{T_sx - x}{s} = AT_tx = T_tAx,$$

从而对每一 $t\geqslant 0$, $T_tx\in D(A)$. 这就证明了 T_tx 有右导数

$\frac{d^+}{dt}T_tx$ 存在。并且有

$$\frac{d^+}{dt}T_tx = AT_tx = T_tAx, \forall t \geqslant 0.$$

下面要证明 T_tx 的左导数存在，并且等于右导数。为此，对任一 $y \in E^*$，数值函数 $f(t) = \langle T_tx, y\rangle$ 对 $t \geqslant 0$ 连续，并且存在右导数，这个右导数等于 $\langle AT_tx, y\rangle = \langle T_tAx, y\rangle$，这个右导数是 t 的连续函数。依 Dini 定理，$f(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上可微，因此

$$\langle T_tx - T_sx, y\rangle = \int_s^t \langle T_\tau Ax, y\rangle d\tau, \forall 0 \leqslant s < t.$$

由于 $y \in E^*$ 是任意的，于是

$$T_tx = T_sx + \int_s^t T_\tau Ax d\tau, \forall 0 \leqslant s < t.$$

矢值函数 T_tAx 在 $[0, \infty)$ 上连续，由此得 T_tx 对 t 可微，并且

$$\frac{d}{dt}T_tx = T_tAx, \forall t \geqslant 0, x \in D(A).$$

现在来证明算子 A 是闭的。任取 $\{x_n\} \subset D(A)$，使得 $s - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 和 $s - \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y_0$，由上面已证的 T_tx_n 的可微性得

$$T_tx_n = x_n + \int_0^t T_\tau Ax_n d\tau, \forall t > 0,$$

在上式的两端取极限得

$$T_tx_0 = x_0 + \int_0^t T_\tau y_0 d\tau.$$

于是

$$s - \lim_{t\downarrow 0} \frac{T_tx_0 - x_0}{t} = s - \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t T_\tau y_0 d\tau = y_0,$$