内 容 提 要

本书是复旦大学物理系编写的《理论物理学基础教程丛书》中的一种，是作者在复旦大学物理类各专业长期讲授“数学物理方法”的基础上编写的。本书主要阐述复变函数论和数学物理方程，前者内容包括复变函数特别是解析函数的基本原理（积分、级数和解析延拓等）和应用（计算定积分、拉普拉斯变换、傅里叶变换和包散关系等）；后者内容包括数学物理方程的定解问题及其常见解法（行波法、分离变量法、积分变换法、保角变换法和格林函数法等）以及变分法和积分方程。为配合教学的需要，各章配有一定数量的例题和习题。

本书可作为理工科大学和高等师范大学物理类各专业以及相近的物理类专业的教材或参考书，也可供有关专业的研究生、教师和科学研究工作者参考。

理论物理学基础教程丛书

数 学 物 理 方 法

胡嗣柱 倪光炯 编著

复旦大学出版社出版

（上海国权路579号）

新华书店上海发行所发行 复旦大学印刷厂印刷

开本850×1168 1/32 印张17.75 插页 0 字数458,000

1989年1月第 1 版 1989年 1 月第 1 次印刷

印数1—4500

ISBN7—309—00064—1/O·012 定价：4.40元

序

《理论物理学基础教程丛书》包括《经典力学》、《数学物理方法》、《经典电动力学》、《量子力学》和《统计物理学》五种，这是根据我们多年来在复旦大学物理系教学实践的基础上编写的。我们在编写过程中力求注意以下几个问题：

1．理论联系实际。各门学科虽有自身的“纵向”逻辑体系，但这种体系的严格性不宜过分强调，以免相对忽视了各种具体的体系和物质属性的综合分析。物理讲的是“物”之“理”，我们一定要避免有“理”无“物”的毛病。加强各门学科之间的“横向”联系，则是克服这种毛病的有效方法之一。

2．在确保概念正确的基础上加强计算的训练。事实上，理论物理的正确概念只有通过大量计算才能真正学到手。经验告诉我们，必须大声疾呼地对我们的学生说：要动手算，多算算，算了再多想想。

3．反映科学的新进展。这一点要在基础课程里做到是相当困难的，但是又非做不可。为此目的，我们删除了一些较陈旧的内容，对那些最基本、最重要而又相当成熟的内容，则努力注意体系的改革和观点的提高，同时在保证准确性和稳定性的前提下，适当增加新的内容，以较快和较多地反映近代物理学的发展。

4．我们希望适应性广一些。这套教程希望不仅可以作为大学生的教学用书，而且可以作为教师和研究生的参考书。为此目的，我们在编写过程中努力做到简明扼要，条理清楚，使读者查阅起来感到比较实用和方便。

在复旦大学出版社的支持下，这套教程将陆续与读者见面，但限于我们的水平，书中的缺点和错误在所难免，希望读者批评指正。

复旦大学物理系理论物理教研室

1984年4月

作 者 的 话

我们自1958年开始在复旦大学物理系讲授“数学物理方法”，本书就是在长期从事“数学物理方法”教学实践的基础上，结合复旦大学的教学特点和科研实践，参考先期出版的同类书籍，适应读者学习《理论物理学基础教程丛书》中其他教程的需要，由原来的讲义经补充修改而成的。

“数学物理方法”这门课程，应该说不是理论物理学的主体，与“四大力学”的性质和任务有所不同，但两者是相辅相成的。若把知识结构比作一座大厦，那么单有纵向联系则是不牢固的，而数学物理方法在介绍数学方法的同时，正起了横向联系的加固作用。可以说，数学物理方法既是理论物理学的基础，又是一种“粘结剂”。如果结合“四大力学”，把数学物理方法的知识和技能牢固地掌握的话，就能为以后的学习和工作带来极大的方便。当然，要做到这一点决非易事，现在我们写这本书的目的就是希望能帮助读者缩短学习和掌握这门课程的过程。

物理问题一旦归结为数学问题，最重要的问题那就是要知道求解这个数学问题在数学上已提供了哪些方法，明确应用这些方法的条件是什么，以及如何正确地应用这些方法。因此，在有限的篇幅内，我们在寻求数学的实用性和严谨性的某种平衡时，把侧重点放在前者。根据这一原则，譬如，加强了级数展开方法、应用留数定理作定积分的计算、δ函数、色散关系，特别重视解本征值的问题、傅里叶变换法、拉普拉斯变换法、格林函数法以及特殊函数的渐近展开式，而且在阐述特殊函数的性质时也不是面面俱到的。

实践证明，只有勤思考多动手，才能迅速地掌握这门课程；然而，只有前者而不强调后者，也是无济于事的。为此，我们在各章中

安排了相当数量的典型例题，通过他们，力求给出一幅数学-物理的清晰图像：物理问题是如何归结为数学问题的→运用何种数学方法来求解→其解的物理意义又是什么。此外，各章都配备了适量的习题，其中有些具有一定的深度和难度，以加深对所学概念的理解和方法的应用，书末还附有各门习题的答案。

本书中的错误和不足之处，恳请读者批评指正。

1987 年 4 月于复旦大学

目　录

第七章　傅里叶变换和色散关系

第八章　线性常微分方程的级数解法和某些特殊函数

下篇　数学物理方程

第九章　数学物理方程的定解问题

第十章　行波法和分离变量法　本征值问题

第十一章 积分变换法

第十二章 球坐标下的分离变量法 勒让德多项式和球谐函数

第十三章 柱坐标下的分离变量法 贝塞耳函数

第十四章 平面静电场问题和保角变换法

第十五章　非齐次方程的定解问题和格林函数法

第十六章　变分法

第十七章　积分方程的一般性质和解法

上篇　复变函数论

第一章　复变函数和解析函数

本章介绍复变函数的基本概念，着重讨论满足一定条件的一类复变函数(即解析函数)的定义、充要条件和物理解释。解析函数是本篇各章要研究的主要对象。

§1.1　复数的基本概念

在讨论复变函数的基本原理之前，先介绍复数的有关概念。

1．复数及其代数运算

设 x 和 y 是两个实数，以 i 记 $\sqrt{-1}$ (即 $i^2=-1$)，则称 $z=x+iy$ 为一复数，其中 x 称为复数 z 的实部，记为 $\mathrm{Re}z$；y 称为 z 的虚部，记为 $\mathrm{Im}z$. $x-iy$ 称为 $z=x+iy$ 的共轭复数，记为 z^* 或 $\bar{z}$. 复数的上述表示式称为复数的代数式。

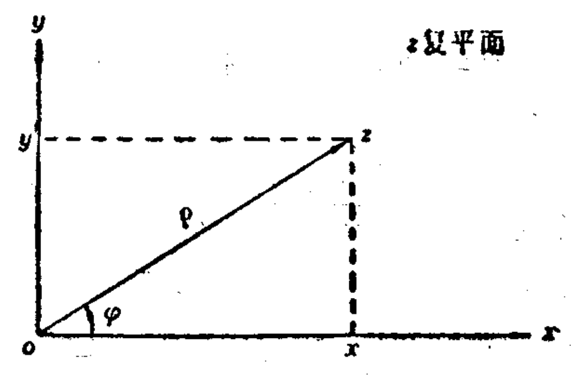

图　1.1

一个复数可以用平面上的一个点或一个矢量表示，如图 1.1 所示(当然

矢量的起点可以不在原点；也就是说，长度和方向都相同的矢量表示同一个复数）。这时 x 轴和 y 轴分别以 1 和 i 为单位，我们分别称它们为实轴和虚轴，而这样的平面称为复平面。

如改取极坐标 $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$（见图 1.1），则复数又可记为

$$z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi), \tag{1.1}$$

其中 ρ 称为 z 的模，记为 $|z|$；φ 称为 z 的幅角，记为 $\arg z$. 表示式 (1.1) 称为复数的三角式。注意，若 φ 是 z 的幅角，则 $\varphi+2n\pi$（n 是整数）也是 z 的幅角。(1.1) 式还可写为*

$$z=\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \tag{1.2}$$

这里的 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 理解为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\equiv 1+\mathrm{i}\varphi+\frac{(\mathrm{i}\varphi)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\mathrm{i}\varphi)^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\mathrm{i}\varphi)^n,$$

其中定义 $0!\equiv 1$. (1.2) 式称为复数的指数式。

当且仅当两个复数的实部和虚部分别相等时这两个复数才相等。复数的加减法：

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2). \tag{1.3}$$

复数的乘除法（利用 $\mathrm{i}^2=-1$）：

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1), \tag{1.4}$$

$$\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$(\text{设 } x_2+\mathrm{i}y_2\neq 0). \tag{1.5}$$

复数的乘除运算采用指数式 (1.2) 较为方便：

$$\rho_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}=\rho_1\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{1.6}$$

$$\frac{\rho_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad (\text{设 } \rho_2\neq 0). \tag{1.7}$$

复数 z 的 n（整数）次幂为

* 等式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$ 的证明见第三章。

$$z^n=(\rho e^{i\varphi})^n=\rho^n e^{in\varphi}, \tag{1.8}$$

而 z 的 n（自然数）次根式为

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}}=\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi}{n}}. \tag{1.9}$$

由此可见，若 φ_0 是 z 的幅角的某一值，则 $\sqrt[n]{z}$ 可取 n 个不同的值：

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}} \qquad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1). \tag{1.10}$$

2．无穷远点

复平面上模为无穷大的点规定为一点，称为无穷远点。复平面上只有一个无穷远点，这可作如下理解：作一半径为任意的球面，使它的南极与复平面上的原点 O 重合，如图 1.2 所示。对于复平

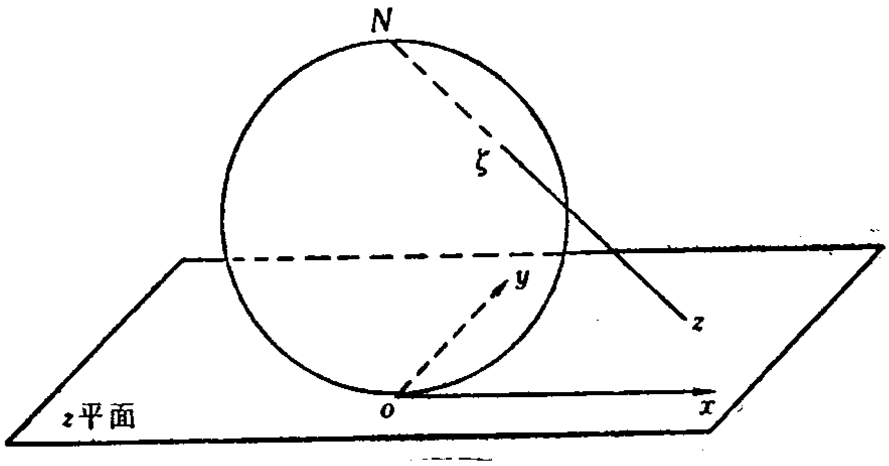

图　1.2

面上任意有限远点 z，连接球的北极 N 与点 z，此连线交球面于点 ζ. 显然 z 与 ζ 是一一对应的。这样，复平面上所有的有限远点已与该球面上除北极 N 点之外的所有点建立了一一对应的关系。当点 z 的模愈来愈大时，点 ζ 就愈来愈接近北极 N，可见点 N 就与无穷远点相对应。无穷远点就记为∞. 复平面上只有一个无穷远点，这还可论证如下：式

$$\zeta=\frac{1}{z} \tag{1.11}$$

将两个复平面 z 和 ζ 上的除原点外的所有有限远点之间建立了一

一对应关系。于是与 $\zeta=0$ 对应的就是 $z=\infty$. 基于这个原因，我们以后还会用变换关系 (1.11) 式将 z 的函数关于 $z=\infty$ 的讨论变为关于 $\zeta=0$ 的讨论。

既然一个复数可以用复平面上的一个点表示，复数列 $\{z_n=x_n+\mathrm{i}y_n\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$的极限问题就归结为平面上点列$\{(x_n, y_n)\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 的极限问题。

§1.2 复变函数及其导数 科希-黎曼条件

1. 复变函数及其导数

上节已定义复数的代数运算。有理分式(包括多项式)和根式是上节讨论的代数运算的组合。现在再定义一些初等函数。

指数函数

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}\equiv\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}. \tag{1.12}$$

三角函数

$$\sin z\equiv\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \tag{1.13}$$

$$\cos z\equiv\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \tag{1.14}$$

等等。

双曲函数

$$\mathrm{sh}\, z\equiv\frac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{2}, \tag{1.15}$$

$$\mathrm{ch}\, z\equiv\frac{\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}}{2}, \tag{1.16}$$

等等。

对数函数定义为指数函数的反函数：

$$\ln z=\ln(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\equiv\ln\rho+\mathrm{i}\varphi. \tag{1.17}$$

注意，若 φ_0 是 z 的幅角的某一值，则 $\ln\rho+\mathrm{i}(\varphi_0+2n\pi)$ (n 是整数)

都是 $\ln z$ 的值。可见对数函数是一个多值的函数。

幂函数则定义为

$$z^{\alpha}\equiv e^{\alpha \ln z}\ (\alpha\ \text{为复数}). \tag{1.18}$$

我们还可以用类似于实函数的定义方法定义反三角函数和反双曲函数。在以上各初等函数的定义中，当 z 取实数值时都与实函数的初等函数定义相一致。

一般地，当 $z=x+iy$ 在复平面上变化时，如果对于 z 的每一个值，都有一个或几个复数值 w 与之相对应，则称 w 为 z 的复变函数，写作

$$w=f(z)=u\ (x,\ y)+iv\ (x,\ y), \tag{1.19}$$

其中 u 和 v 是 x, y 的实函数。如果对于 z 的每一个值，w 各取一个值，则称 (1.19) 为单值函数，否则称为多值函数。z 的 n 次方根 (1.10)、对数函数 (1.17) 和幂函数 (1.18) 等都是多值函数。

复变函数 (1.19) 的极限和连续等问题等价于一对二元实函数 $u(x,\ y)$ 和 $v(x,\ y)$ 的极限和连续问题，这里不再详述。

现在定义函数的导数。设函数 (1.19) 是单值函数，当 z 在 z_0 的邻域内沿一切方向、按任何方式趋于点 z_0 时，即当 $\Delta z=z-z_0\to 0$ 时，若极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \tag{1.20}$$

具有同一的有限值，则称函数 $f(z)$ 在点 z_0 是可导的，而称此极限值为 $f(z)$ 在 z_0 的导数（或微商），记为 $f'(z_0)$*.

从形式上看，复变函数导数的定义与实变函数的一样，所以实变函数的求导规则对复变函数都适用。另一方面，从本质上看，复变函数可导的要求要比实变函数的高得多。为了看清楚这一点，让我们回忆一下实变函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的导数。记 $\Delta x=x-x_0$，$f'(x_0)$ 的存在仅要求当 x 沿着 x 轴（直线）从左边和右边

---

* 这里 $z_0\neq\infty$。$f(z)$ 在 $z=\infty$ 的导数定义为 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 在 $\zeta=0$ 的导数。

两个方向趋向于 x_0 时，$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 的极限值存在且相等，而 $f'(z_0)$ 则要求在复平面 z 上当 z 沿一切路径（不一定是直线路径）趋向于 z_0 时极限 (1.20) 存在且相等。正由于复变函数可导的要求比实变函数的高，由前者导出的结果也要比后者导出的结果为多，下面的科希 (Cauchy) -黎曼 (Riemann) 条件就是一例。

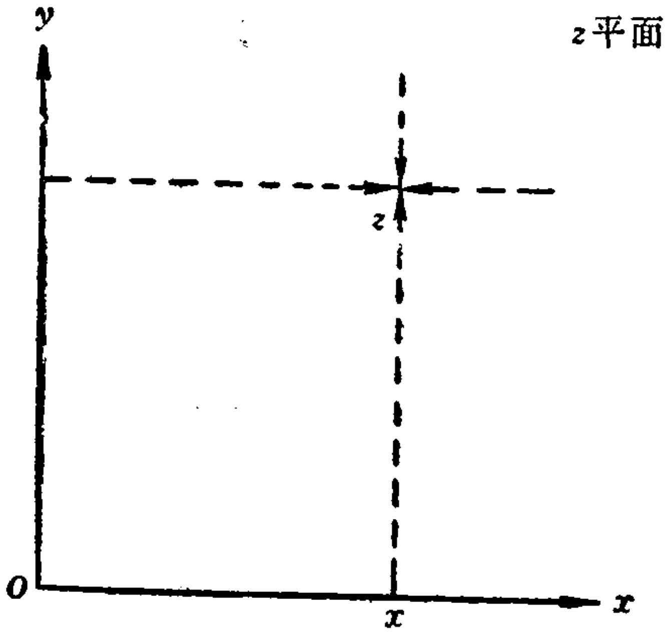

图 1.3

2. 科希-黎曼条件

若函数 (1.19) 在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可导，现在沿两个特殊路径取极限 $\Delta z\to 0$ (图 1.3)。先沿平行于实轴的直线（即 y 为常数）取 $\Delta z=\Delta x\to 0$，则由 (1.19) 式有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)+\mathrm{i}v(x+\Delta x,y)-u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}. \tag{1.21}$$

再沿平行于虚轴的直线（即 x 为常数）取 $\Delta z=\mathrm{i}\Delta y\to 0$，有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+\mathrm{i}v(x,y+\Delta y)-u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y}$$

$$=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \tag{1.22}$$

既然$f(z)$在z点可导，(1.21)式和(1.22)式应相等，因而

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}=-\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \end{cases} \tag{1.23}$$

这称为科希-黎曼条件(以下简记为C-R条件)。

从C-R条件的推导过程可见，(1.23)式仅是一点可导的必要条件而不是充分条件。在$u(x,y)$和$v(x,y)$的偏导数存在且连续的前提下，(1.23)式才是函数可导的充要条件.

定理 若$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$存在而且连续，则$f(z)$可导的充要条件是C-R条件.

证 我们只需证明充分性。因为$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$存在而且连续，则$u(x,y)$和$v(x,y)$可微*，即

$$\begin{aligned}\Delta u&=u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-u(x,\ y)\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+o\left[\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta v&=v(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-v(x,\ y)\\&=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+o\left[\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right],\end{aligned}$$

其中$o(\varepsilon)$表示数量级比ε更高的无穷小量，即($\varepsilon\sim\Delta x\sim\Delta y$)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}=0. \tag{1.24}$$

于是

---

* В·И·斯米尔诺夫著，孙念增译，高等数学教程，第一卷合订本，第二版，1959，人民教育出版社.

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Big\{\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\Big)$$
$$+\mathrm{i}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\Big)+o\,[\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}]\Big\}\Big/$$
$$(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y).$$

利用 C-R 条件,上式成为

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Big\{\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y\Big)$$
$$+\mathrm{i}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\Big)+o\,[\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}]\Big\}\Big/$$
$$(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x},$$

所以 $f(z)$ 可导。

从极限的定义式 (1.20) 出发或利用这个定理不难验证,除了多值函数 $\sqrt[n]{z}$, $\ln z$ 和 z^a 等暂且不考虑外,以 z 为自变量的一切初等函数在复平面上是几乎处处可导的*。函数的不可导的点称为该函数的奇点。然而,一个可导函数的复共轭函数便是不可导的了,请看:

【例】 $w=z^*=x-\mathrm{i}y$,这里 $u=x$, $v=-y$。因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=1$,而 $\frac{\partial v}{\partial y}=-1$,不满足 C-R 条件,所以函数 z^* 在复平面 z 上处处不可导。

从直角坐标系下的 C-R 条件 (1.23) 出发,利用自变量代换

---

* 几乎处处可导意即除了有限个点或至多无限可列个点 z_i ($i=1, 2, 3, \cdots$)外是可导的。所谓无限可列个点是指这些点的值可以用自然数加以编号,例如 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$。而连续取值的点,例如闭区间 [0, 1] 上的所有的点,则不是可列的。