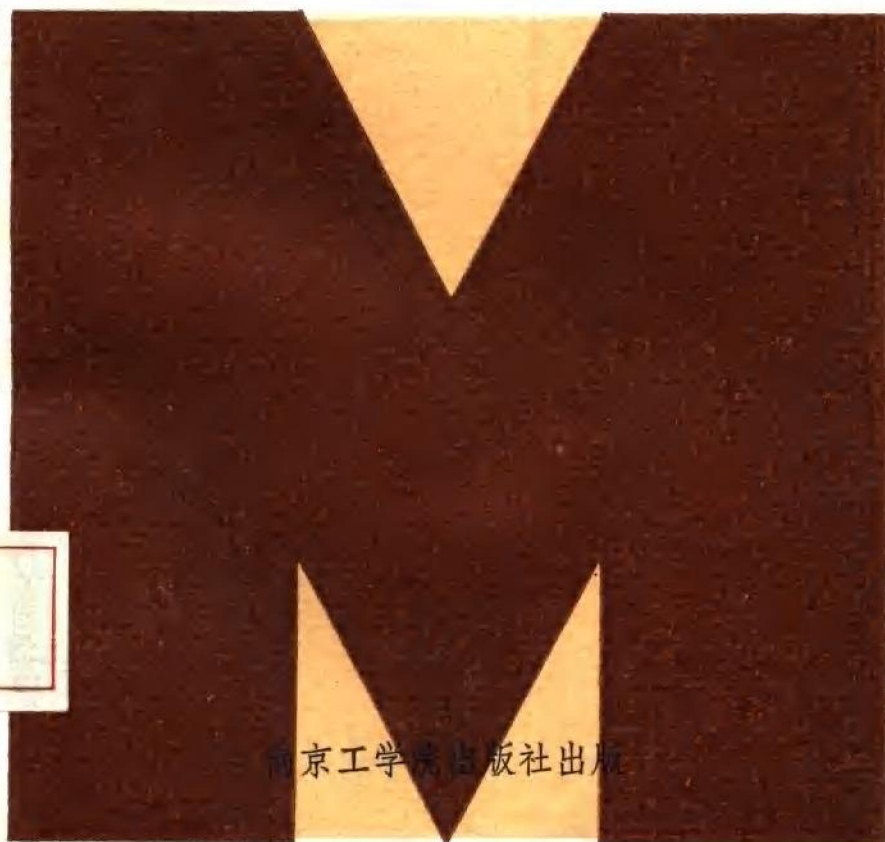


● MECHANICS OF MATERIALS

材料力学

● 蒋嘉俊 汪鸣皋 主编 (下 册)



南京工学院出版社出版

材料力学(下册)

蒋嘉俊 汪鸣皋 主编

南京工学院出版社出版

南京四牌楼2号

江苏省新华书店发行 南京通信工程学院印刷厂印刷

开本787×1092毫米1/32 印张8.13 字数183,000

1987年5月第1版 1987年7月第1次印刷

印数: 1—8500册

ISBN 7-81023-027-(1)/O·27

统一书号: 13409·014 定价: 1.10元

内 容 简 介

本书是根据高等工业专科学校三年制机械专业和土建专业的材料力学课教学基本要求而编写的教材。本课程总学时范围为72~90。

本书共有十四章，分上下两册出版。上册包括第一章到第八章以及附录型钢表，内容有：拉伸和压缩、剪切、扭转、截面图形几何性质、弯曲内力、弯曲强度和弯曲变形。下册包括第九章到第十四章，计有：应力状态和强度理论、组合变形、能量法、动荷载、交变应力及压杆稳定等。本书公式推导严谨、简明，内容叙述紧凑、易懂，并有适量的习题，以利培养学生的设计计算能力和思考分析能力。

本书主要作为高等工业专科学校、职业大学机械或土建等专业的材料力学课教材，也可作为职工大学、业余大学、夜大学等成人教育相应专业的教材，并可供有关工程技术人员或自学者参考。

前 言

本书是按高等学校三年制机械和土建专业材料力学课程的教学基本要求而编写的。讲授全书所需的学时数根据所授专业的不同,可在72~90学时范围内自行安排。

本书由蒋嘉俊、汪鸣皋主编统稿。参加编写工作的同志有:上海大学工商管理学院蒋嘉俊(第一、八章)、张健英(第二、五、六、七章)、倪天视(第十、十三章);金陵职业大学刘阿多(第三章);江南大学唐广千(第九、十一章);彭城大学袁广生(第十二章)和沙洲职业工学院汪鸣皋(第四、十四章)。刘阿多同志还参加了部分校审工作。

本书力求贯彻理论联系实际,删繁就简的原则,尽量使本书易教易学,适合高等工业专科学校有关专业使用。

本书由无锡轻工业学院吴家骥同志主审,并于1986年7月在沙洲召开了审稿会。许多兄弟院校的代表对书稿进行了认真的审阅,并提出了很多宝贵的意见或建议,谨此一并表示衷心的感谢。

限于我们的水平和经验,书中难免会有一些缺点和错误,恳切希望读者提出批评和指正。

编 者

1986.8

第九章 应力状态和强度理论	(1)
§ 9—1 应力状态的概念	(1)
§ 9—2 二向应力状态分析	(4)
§ 9—3 三向应力状态的最大应力	(16)
§ 9—4 广义虎克定律	(18)
§ 9—5 三向应力状态下的变形比能	(21)
§ 9—6 强度理论简介	(23)
习 题	(34)
第十章 组合变形时强度计算	(38)
§ 10—1 组合变形的概念和实例	(38)
§ 10—2 斜弯曲	(39)
§ 10—3 拉伸(压缩)与弯曲的组合变形	(46)
§ 10—4 扭转和弯曲的组合变形	(49)
习 题	(56)
第十一章 能量法	(62)
§ 11—1 杆件的变形能计算	(62)
§ 11—2 莫尔定理	(68)
§ 11—3 图乘法	(79)
* § 11—4 卡氏定理	(85)
§ 11—5 功的互等定理与位移互等定理	(93)
§ 11—6 在解静不定结构中能量法的应用	(96)
习 题	(102)
第十二章 压杆稳定	(107)
§ 12—1 压杆稳定的概念	(107)

§ 12—2 细长压杆的临界压力 欧拉公式·····	(110)
§ 12—3 欧拉公式的适用范围 临界应力总图·····	(122)
§ 12—4 压杆的稳定校核·····	(129)
§ 12—5 用折减系数法计算压杆稳定性·····	(132)
§ 12—6 提高压杆稳定性的措施·····	(138)
习 题·····	(140)
第十三章 动载荷 ·····	(144)
§ 13—1 动荷概念及实例·····	(144)
§ 13—2 构件作匀加速直线平动或匀速转动时的应 力计算·····	(145)
§ 13—3 构件在单自由度系统强迫振动时的应力计 算·····	(149)
§ 13—4 构件受冲击时的应力和变形计算·····	(154)
§ 13—5 冲击韧性·····	(162)
习 题·····	(165)
第十四章 交变应力 ·····	(170)
§ 14—1 交变应力和疲劳破坏·····	(170)
§ 14—2 交变应力的循环特性·····	(172)
§ 14—3 材料的持久极限、影响构件持久极限的因 素·····	(174)
§ 14—4 对称循环下构件的疲劳强度计算·····	(183)
* § 14—5 非对称循环下构件的疲劳强度计算·····	(185)
* § 14—6 弯曲与扭转组合时构件的疲劳强度计算··	(192)
§ 14—7 提高构件疲劳强度的措施·····	(195)
习 题·····	(197)
习题答案 ·····	(203)

第九章 应力状态和强度理论

§ 9—1 应力状态的概念

当直杆受到轴向拉伸（压缩）时，虽然同一横截面上各点的应力相同，但是随着所取截面方位的不同，应力也是不相同的。而直杆受到扭转或弯曲时，即使在同一横截面上，各点的应力也是不同的。总之，在受力构件上任意一点处，它的应力随着截面方位的不同而不同。我们把通过某一点的各个不同方位上的应力情况，称为一点的应力状态。

为了对受力构件进行全面的强度分析，就必须了解各个点处不同截面上的应力情况，从而可以找出那个截面上作用着最大正应力，哪个截面上作用着最大的剪应力，用来对构件进行强度校核。这就是研究应力状态的目的。

分析一点的应力状态，可以围绕该点取出一个微小的正六面体即单元体，算出它的各个面上的应力。单元体一般取得极其微小，可以认为单元体各面上的应力都是均匀分布；同时在两个平行平面上的应力都是相等的，均等于通过所研究的点并与上述截面平行的面上的应力。

例如研究图9-1(a)所示杆件A点的应力，可在A点周围取出一个单元体，如图9-1(b)所示。根据受拉杆件的应力计算公式，知左右两侧面仅有正应力，即 $\sigma = P/A$ ，其它各面上无应力作用。再以图9-2(a)所示的悬臂梁为例，围绕A点取出单元体（图9-2(b)），其左右两侧上有已知正应力

$$\sigma = \frac{M(x)y}{I_z} \text{ 和剪应力 } \tau = \frac{Q(x)S_z^*}{I_z b}。$$

根据剪应力互等定理，在上下两面上也有剪应力 τ ，再研究B

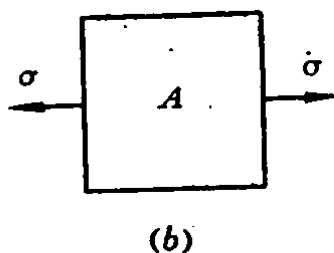
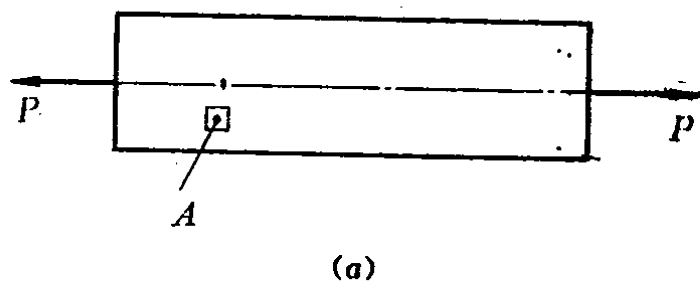


图9-1

点，由于 B 点在梁底部，在横截面上该点只有正应力，而剪应力为零。 B 点的应力状态如图9-2(c)所示。

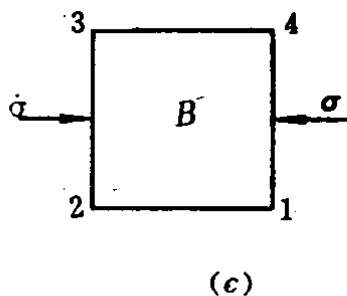
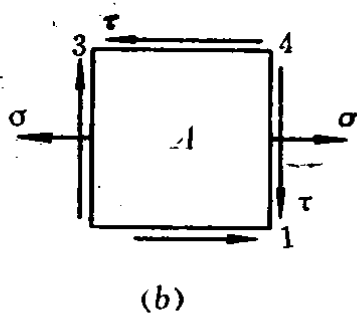
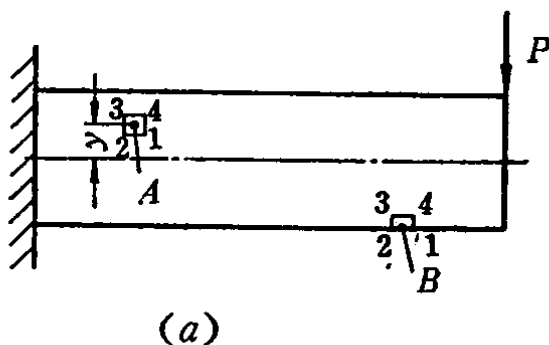


图9-2

一般说来，在单元体的各面上既有正应力，又有剪应力。在图9-1(b)及图9-2(c)所示单元体上只有正应力而无剪应力，则此剪应力为零的面称为主平面；主平面上的正应力称为主应力。通过受力构件的任意点，都可找到三个相互垂直的主平面，因而每一点都有三个主应力，分别用 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 表示，并按照它们的代数值顺序排列，即 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。按照单元体上主应力有几个不为零的情况，可将应力状态分为三类：

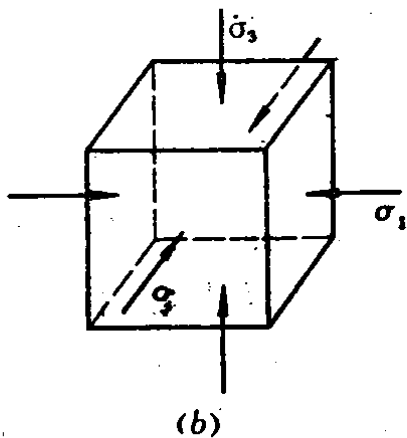
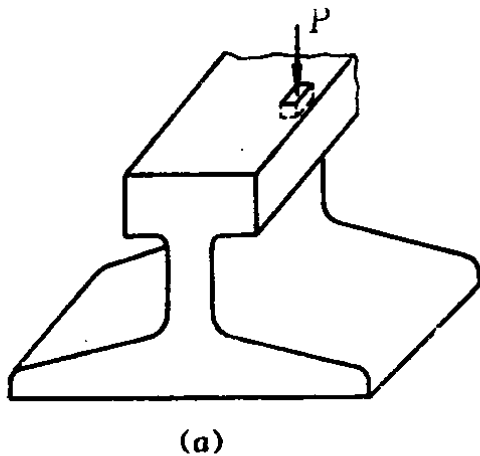


图9-3

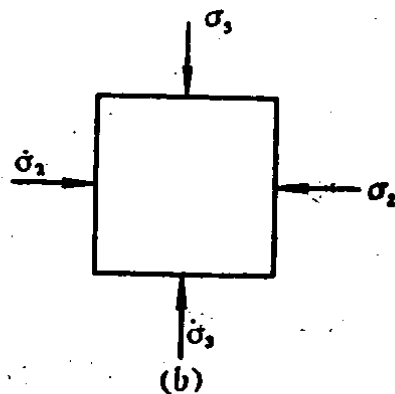
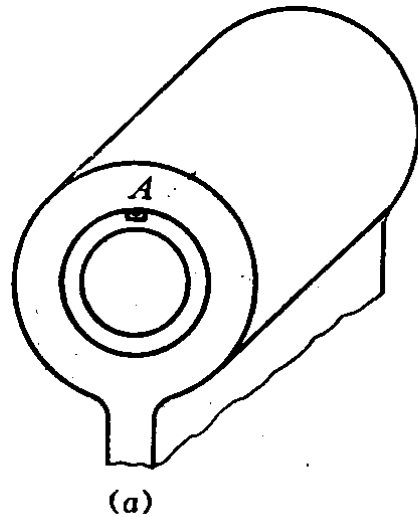


图9-4

1. 三向应力状态或空间应力状态——三个主应力都不等于零。

例如，图9-3(a)所示钢轨在车轮压力下，在受压区域内取出的单元体上，它的三个主应力都不等于零（图9-3(b)）。

2. 二向应力状态——二个主应力不等于零

这是比较常见的一种应力状态。例如，图9-4(a)所示过盈配合压入某零件中的衬套，在衬套内取出的单元体上有二个主应力，在前后面上的主应力为零（图9-4(b)）。又例如，圆轴扭转时，除轴线上各点以外，其它任意一点的应力情况；以及剪切弯曲时，除梁内上下边缘各点以外，其它各点的应力情况都属于二向应力状态。

三向应力状态和二向应力状态统称为复杂应力状态。

3. 单向应力状态或简单应力状态——一个主应力不等于零其它二个主应力都等于零

例如，轴向拉(压)杆各点（图9-1(b)）；剪切弯曲时，梁内上下边缘的剪应力等于零，而只有单向正应力（图9-2(c)）。

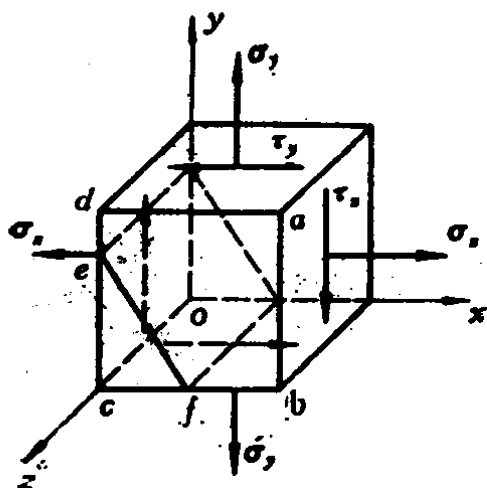
§ 9—2 二向应力状态分析

一、解析法

如图9-5(a)所示二向应力状态的一般情况，其中与 x 轴垂直平面上的应力为正应力 σ_x 和剪应力 τ_x ，与 y 轴垂直平面上的应力为正应力 σ_y 和剪应力 τ_y ，与 z 轴垂直平面上没有应力。上述二向应力状态可以用平面图形来表示（图9-5(b)）。

现在来求单元体上任一斜截面 ef 上的应力。设 x 轴与该截面 ef 的外法线 n 夹角为 α ，并规定从 x 轴逆时针转向转到外法线 n 的 α 角为正，正应力和剪应力的符号仍按前规定。图9-5(b)中表示的 α 角，以及正应力和剪应力都为正值。

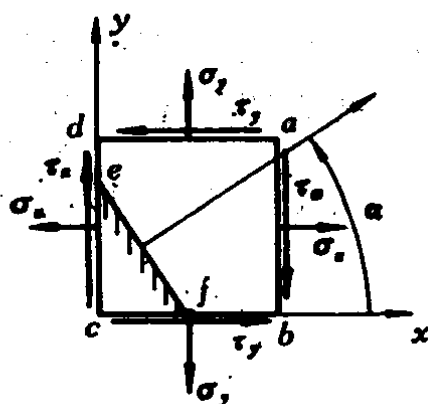
用截面法取出分离体（图9-5(c)），把斜截面上的应力分解为垂直于该截面上的正应力 σ_α 和平行于该截面上的剪应力



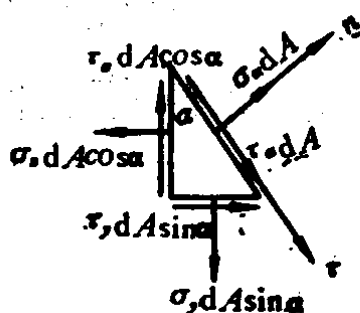
(a)



(c)



(b)



(d)

图9-5

τ_{α} 。在图上, σ_{α} 和 τ_{α} 假设都是正值。设 ef 截面积为 dA , 则 ec 和 cf 的截面积分别为 $dA \cos \alpha$ 和 $dA \sin \alpha$ 。各截面上的合力示于图9-5(d)。由平衡条件 $\sum F_x = 0$, 可得

$$\sigma_{\alpha} dA + (\tau_{xy} dA \cos \alpha) \sin \alpha - (\sigma_x dA \cos \alpha) \cos \alpha + (\tau_{yx} dA \sin \alpha) \cos \alpha - (\sigma_y dA \sin \alpha) \sin \alpha = 0$$

根据剪应力互等定理, τ_{xy} 和 τ_{yx} 的大小相等。且利用三角公式

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

代入上式，简化后可得

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \quad (9-1)$$

同理，由平衡条件 $\sum F_{\tau} = 0$ ，可得

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha \quad (9-2)$$

利用公式(9-1)和(9-2)可求得在二向应力状态下，任意斜截面上的正应力和剪应力。公式表明， σ_{α} 和 τ_{α} 都为 α 角的函数。为了求得 σ_{α} 的极值，可根据式(9-1)，令

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = 0$$

即

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} (-2 \sin 2\alpha) - \tau_x (2 \cos 2\alpha) = 0$$

化简后，得到

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha = 0 \quad (a)$$

将式(a)和式(9-2)相比，可以知道，正应力为极值所在的平面，就是剪应力 τ_{α} 等于零的平面，也就是主平面。设该平面的外法线与 x 轴所成的角为 α_0 ，由式(a)可得

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = - \frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (9-3)$$

由式(9-3)可求出 α_0 的两个数值, 即 α_0 和 $\pi/2 + \alpha_0$, 这样就可定出两个主平面的外法线方位。其中一个是最大正应力所在平面, 另一个是最小正应力所在平面, 两者是互相垂直的。

根据三角函数关系, 式(9-3)可化得

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}} = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}} \quad (b)$$

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_0}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}} = \pm \frac{-2\tau_x}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}} \quad (c)$$

将(b), (c)两式代入式(9-1), 得到

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \quad (9-4)$$

对于二向应力状态, 可用(9-3)和(9-4)两式来求出主平面的位置和主应力的大小。

要确定最大剪应力所在的平面, 可仿照上述方法, 将式(9-2)对 α 角求导数, 并令

$$\frac{d\tau_x}{d\alpha} = 0$$

由此得

$$\frac{d\tau_x}{d\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha - 2\tau_x \sin 2\alpha = 0$$

设最大剪应力所在平面的外法线与 x 轴所成的角为 α_1 , 由上式可得

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_x} \quad (9-5)$$

由式(9—5)可求出 α_1 的二个数值, 即 α_1 和 $\pi/2 + \alpha_1$, 可见最大与最小剪应力所在的平面也是互相垂直的。根据三角函数关系, (9—5)式可化得

$$\cos 2\alpha_1 = \pm \frac{2\tau_x}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}}$$

$$\sin 2\alpha_1 = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}}$$

将上两式代入式(9—2), 可得

$$\begin{matrix} \tau_{max} \\ \tau_{min} \end{matrix} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \quad (9-6)$$

将式(9-4)相减, 上式也可化为

$$\begin{matrix} \tau_{max} \\ \tau_{min} \end{matrix} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) \quad (9-7)$$

将式(9-3)和式(9-5)比较, 得到

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_1} = -\operatorname{ctg} 2\alpha_1 = \operatorname{tg}(2\alpha_1 \pm 90^\circ)$$

$$\text{即} \quad 2\alpha_0 = 2\alpha_1 \pm 90^\circ$$

$$\text{或} \quad \alpha_0 = \alpha_1 \pm 45^\circ$$

由此可见, 主平面与是大和最小剪应力所在的平面各成 45° 。

例9—1 已知某单元体的应力状态(图9—6(a)), 试求图示 I—I 截面上的应力 σ_{I-I} 和 τ_{I-I} , 并求其主应力和主平面的位置, 以及最大剪应力和它的方位。

解 按符号规定, $\sigma_x = 40 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_y = -20 \text{ MN/m}^2$, $\tau_x = -10 \text{ MN/m}^2$, $\alpha = -60^\circ$ 。代入式(9-1)和式(9-2)可得

$$\sigma_{I-I} = \sigma_a = \frac{40 + (-20)}{2} + \frac{40 - (-20)}{2} \cos(-120^\circ)$$

$$- (-10) \sin(-120^\circ) = -13.7 \text{ MN/m}^2$$

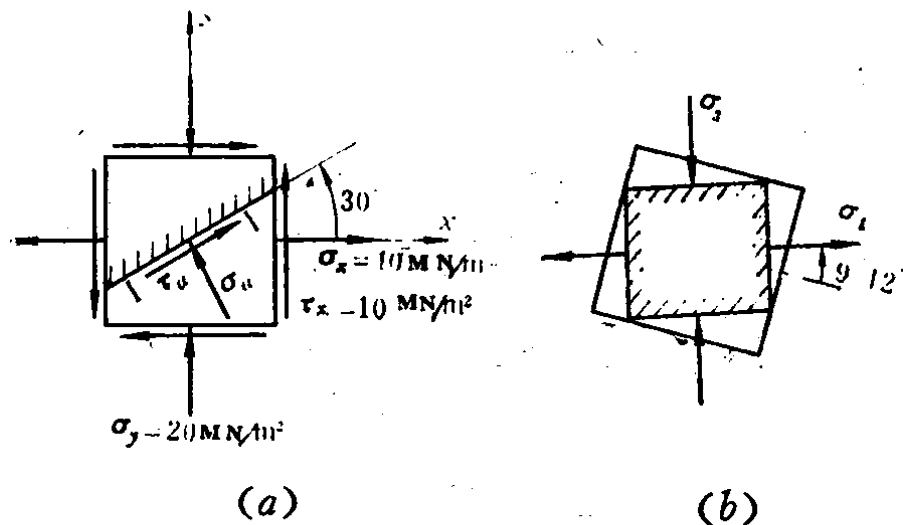


图9-6

$$\begin{aligned}\tau_{1-1} = \tau_a &= \frac{40 - (-20)}{2} \sin(-120^\circ) + (-10) \cos(-120^\circ) \\ &= -21 \text{ MN/m}^2\end{aligned}$$

δ_{1-1} 和 τ_{1-1} 的方向如图(9-6(a))所示。

由式(9-3)求得主平面的位置(图9-6(b))

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2(-10)}{40 - (-20)} = 0.333$$

由此得

$$2\alpha_0 = 18^\circ 24' \quad \text{及} \quad 198^\circ 24'$$

$$\text{或} \quad \alpha_0 = 9^\circ 12' \quad \text{及} \quad 99^\circ 12'$$

由式(9-4)求得主应力数值

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{40 + (-20)}{2} + \sqrt{\left[\frac{40 - (-20)}{2}\right]^2 + (-10)^2} \\ \sigma_{\min} &= \frac{40 + (-20)}{2} - \sqrt{\left[\frac{40 - (-20)}{2}\right]^2 + (-10)^2} \\ &= 41.6 \text{ MN/m}^2 \\ &= -21.6 \text{ MN/m}^2\end{aligned}$$

按主应力的顺序排列可写出

$$\sigma_1 = 41.6 \text{ MN/m}^2 \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -21.6 \text{ MN/m}^2$$

由式(9-5)求得最大剪应力的平面位置

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_1 = \frac{40 - (-20)}{2(-10)} = -3$$

得到 $2 \alpha_1 = 108^{\circ} 24'$ 或 $\alpha_1 = 54^{\circ} 12'$

由式(9-7)求得最大和最小剪应力值

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \pm 31.6 \text{ MN/m}^2$$

二 图解法

由式(9-1)和式(9-2)可知,任一斜截面上的应力 σ_α 和 τ_α 都是以 2α 为参数的变量,因此 σ_α 和 τ_α 之间必存在一定的函数关系,即 $\sigma_\alpha = f(\tau_\alpha)$ 。若把式(9-1)和式(9-2)中的 2α 消去,即可得到 σ_α 和 τ_α 之间的关系。为此,可将式(9-1)改写为

$$\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

把上式和式(9-2)两边各自平方,然后相加,即可消去 2α 参数而得

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2 \quad (a)$$

式中 σ_x 、 σ_y 和 τ_x 均为已知数,而 σ_α 、 τ_α 为未知数,故式(a)是圆的轨迹方程式。如以 σ 为横坐标, τ 为纵坐标,则圆心的坐标为 $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$, 半径为 $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$ 。任意斜截面上的 σ_α 和 τ_α 可用圆周上各点的坐标值来确定。这个圆称为应力圆,又称莫尔圆。

根据单元体上的已知应力 σ_x 、 σ_y 和 τ_x 、 τ_y (图9-7(a)),要作出相应的应力圆,可在 $\sigma - \tau$ 直角坐标系内,取适当比例,

使 $\overline{OB_1} = \sigma_x$, $\overline{B_1D_1} = \tau_x$, $\overline{OB_2} = \sigma_y$, $\overline{B_2D_2} = \tau_y$ (图9-7(b))

连接 D_1D_2 与横坐标交于 C 点, 以 C 点为圆心, $\overline{CD_1}$ 或 $\overline{CD_2}$ 为半径, 即可绘出应力圆。

若求单元体外法线 n 对 x 轴成 α 角的斜截面上的应力 σ_α 和 τ_α 可在应力圆上自 D_1 点量出与单元体上 α 角转向相同的圆心角 2α 得到圆周上 E 点, E 点的坐标即表示所求斜截面上的应力。可以证明 E 点的横坐标 (图9-7(b)),

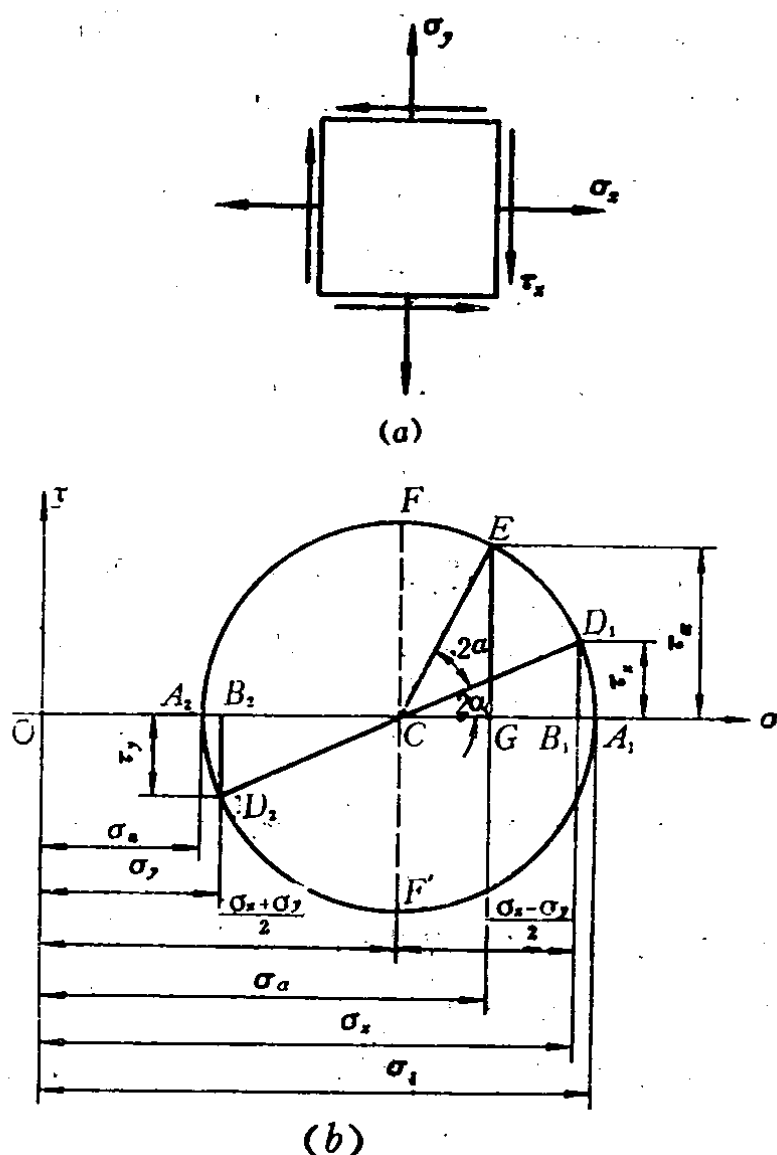


图9-7