美国数学奥林匹克

试题与解答

熊 斌 编著

MEIGUO SHUXUE

AOLINPIKE
SHITI
YU JIEDA

技教育出版社

美国数学奥林匹克试题与解答

熊 斌

上海科技教育出版社

(沪)新登字 116 号

美国数学奥林匹克试题与解答
熊 斌
上海科技教育出版社出版发行
(上海冠生园路 393 号)
各地新华书店经销 江苏太仓印刷厂印刷
开本787×1092 1/32 印张 5.25 字数115000
1993年8月第1版 1993年8月第1次印刷
印数 1—5300
ISBN 7-5428-0709-9
G·666
定价：2.80 元

前　言

美国数学奥林匹克(简称 USAMO) 始于 1972 年，至今已举行了 20 届. 美国数学奥林匹克的试题由美国数学协会命题. 每届竞赛的试题有 5 道，要求在 3.5 小时内完成. 它是美国国内水平最高的中学生数学竞赛，并在国际数学竞赛的领域中有着较大的影响.

在美国，每年的 2 月下旬或 3 月初举行美国中学数学竞赛(简称 AHSME)，大约有 40 万人参赛。自 1983 年起，在该赛中得分大于或等于 100 分(满分为 150 分)的学生被邀请参加 3 月下旬举行的美国数学邀请赛(简称 AIME，满分为 15 分)，然后，从参赛者所获得的成绩(即 AHSME 的得分 +10 × AIME 的得分) 中选出大约 150 人参加 4 月下旬举行的美国数学奥林匹克(满分为 100 分)，并以“AHSME 的得分 +10 × AIME 的得分 +4 × USAMO 的得分”计算参赛者的成绩. 这样，有 20 名左右的优秀学生被挑选出来组成美国数学奥林匹克国家集训队. 接着，从 6 月上旬始，在西点美国陆军军官学校进行三个星期的数学奥林匹克训练，最后，从中选出 6 名学生组成国际数学奥林匹克美国代表队，参加当年 7 月中旬举行的国际数学奥林匹克(简称 IMO).

美国数学奥林匹克试题新颖别致，内容覆盖面广，许多试题出自名家之手，体现了现代数学思想和方法，以及当今美国数学教学的一些动向.

随着我国数学教育改革的深化，数学课外活动和数学竞

赛在数学教学中的地位和作用，日益被广大的数学教师了解和关注．它是发现人才，培养人才，发展学生个性，贯彻因材施教的一种有效途径．

当前，全国各地的数学奥林匹克学校犹如雨后春笋．本书的出版是为数学奥林匹克学校，以及那些学有余力、有志于参加数学竞赛的学生提供合适的参考资料；本书也可作为担任数学竞赛、数学课外活动的教练员和辅导教师的研究与参考用书．

本书共有试题100道．我们把这些试题分成代数(A)，不等式(I)，数论(N)，几何(G)，组合(C)，概率(P)六大类．并把试题和试题解答分为两部分：试题部分是按每年的试题顺序编排，每个试题前有记号(X/n)，其中X表示所属类的字母A、I、N、G、C、P，n表示所属类的题号．例如，(A/2)表示这个题的解答在代数(A)部分的第2题；解答部分是按内容A、I、N、G、C、P编排的，每个试题前的记号(m/n)表示这个题是第m届的第n题，例如，(12/3)表示这个题是第12届的第3题．这样的编排方式，有利于学生学习和教师辅导，有利于对某一课题有兴趣的读者作进一步研究用．

在编写过程中，参阅了"The American Mathematical Monthly"，"Mathematics Magazine"，"Mathematics Teacher"，"M S. Klamkin, 1988, USA Mathematical Olympiads 1972～1986"，另外也参阅了一些中文书刊，在此向这些作者表示感谢．

囿于水平，错误和不妥之处恐难避免，恳请读者不吝赐教，提出宝贵意见．

编　者

1991年6月于华东师大

目　录

美国数学奥林匹克试题

第1届(1972年)美国数学奥林匹克

1. (N/1) 记号$(a,b,\cdots,g)$和$[a,b,\cdots,g]$分别表示正整数$a,b,\cdots,g$的最大公因数和最小公倍数，例如，$(3,6,18)=3$，$[6,15]=30$. 证明：

$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]}=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}.$$

2. (G/14) 一个给定的四面体$ABCD$是等腰的，即$AB=CD$，$AC=BD$，$AD=BC$. 证明：这个四面体的各个面都是锐角三角形.

3. (P/4) 一个随机数选择器只能从1，2，…，9这九个数字中任选一个，并且以等概率作这些选择. 试确定在$n(n>1)$次选择后，选出的n个数的乘积能被10整除的概率.

4. (I/7) 令R为非负有理数，试确定整数a,b,c,d,e,f，使得对于R的每一种选择，都有

$$\left|\frac{aR^2+bR+c}{dR^2+eR+f}-\sqrt[3]{2}\right|<|R-\sqrt[3]{2}|.$$

5. (G/10) 一个给定的凸五边形$ABCDE$具有如下性质：五个三角形ABC,BCD,CDE,DEA,EAB中的每一个面积都等于1. 证明：每个具有上述性质的五边形都有相同的面积，计算这个面积，并且有无限多个不全等的具有上述性质的五边形.

第2届(1973年)美国数学奥林匹克

1. (I/21) P,Q两点在正四面体$ABCD$的内部. 证明：$\angle PAQ<60°$.

2. (A/13) 设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$为如下定义的两个整数数列：

$$x_0=1, x_1=1, x_{n+1}=x_n+2x_{n-1}(n=1,2,3,\cdots),$$

$$y_0=1, y_1=7, y_{n+1}=2y_n+3y_{n-1}(n=1,2,3,\cdots).$$

于是，这两个数列的前几项为：

$$x: 1,1,3,5,11,21,\cdots,$$

$$y: 1,7,17,55,161,487,\cdots.$$

证明：除了“1”这项外，不存在那样的项，它同时出现在两个数列中.

3. (P/2) 在一个给定的正$(2n+1)$边形的顶点中随机地选取三个不同的顶点. 如果一切这种取法的可能性是相等的，求这个正多边形的中心位于随机所取三点构成的三角形内部的概率.

4. (A/5) 试确定下列方程组的所有实根或复根：

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3, \\ x^3+y^3+z^3=3. \end{cases}$$

5. (N/8) 证明：三个不同素数的立方根不可能是一个等差数列中的三项(不一定是连续的).

第3届(1974年)美国数学奥林匹克

1. (A/8) 设a,b,c表示三个不同整数，又设$P(x)$表示整系数多项式. 证明：不可能同时成立$P(a)=b$, $P(b)=c$, $P(c)=a$.

2．(I/1)　证明：如果 a, b, c 都是正实数，那么

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

3．(I/20)　半径为1的球面上两点用球内长度小于2的曲线段连结起来，证明：这条曲线段一定落在这个球的某半个球内．

4．(P/5)　父亲，母亲和儿子决定举行某种家庭游戏比赛．每局由两人参加，没有和局．因为父亲是最弱的，所以让他选定第一局的两个参加者．每局获胜者与未参加此局比赛的人进行下一局的比赛．在比赛中某人首先获胜两局就算取得锦标．如果儿子是最强的，那么从直观上看，父亲若决定自己与母亲进行首局比赛将使他取得锦标的概率最大．证明：这种策略确实是最优的（假定任一选手每局战胜其他选手的概率在整个比赛过程中不变）．

5．(G/11)　考虑如图1所示的两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PQR$．在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=120°$．证明：$x=u+v+w$．

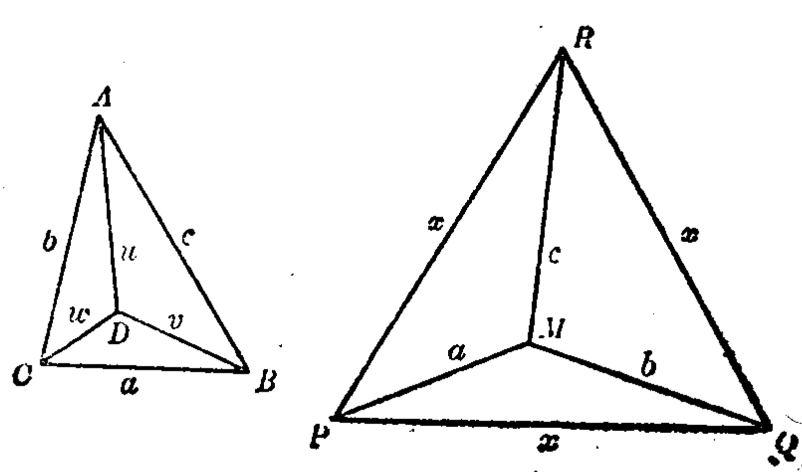

图 1

第 4 届(1975 年)美国数学奥林匹克

1. (N/12) (1) 证明:

$$[5x]+[5y]\geqslant[3x+y]+[3y+x],$$

其中 $x,y\geqslant 0$,且$[u]$表示不超过 u 的最大整数(例如,$[\sqrt{2}]=1$).

(2) 用(1)或其他方法,证明:对于一切正整数 m, n,

$$\frac{(5m)!\,(5n)!}{m!\,n!\,(3m+n)!\,(3n+m)!}$$

是整数.

2. (I/17) 设 A,B,C,D 表示空间中四个点,AB 表示 A 与 B 之间的距离,等等. 证明:

$$AC^2+BD^2+AD^2+BC^2\geqslant AB^2+CD^2.$$

3. (A/9) 如果$P(x)$表示一个 n 次多项式,且对 $k=0$, $1,2,\cdots,n$ 有$P(k)=\dfrac{k}{k+1}$,求$P(n+1)$.

4. (J/15) 两个给定的圆相交于 P,Q 两点,说明怎样作出一条过 P 点且分别交两圆于 A,B 的线段 AB,使得$AP\cdot PB$最大.

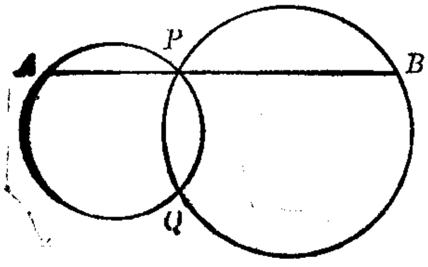

图 2

5. (P/3) 一副纸牌共有 n 张,其中有三张 A,现随机地洗牌(假定纸牌一切可能的分布都有相等机会),然后从顶上开始一张接一张地翻牌,直至翻到第二张 A 出现为止,证明:翻过纸牌数的期望(平均)值是$\dfrac{n+1}{2}$.

第5届(1976年)美国数学奥林匹克

1. (C/3) (1) 如图3所示是一个4×7棋盘，每个方格染上黑色或白色. 证明：对于任一种染色方式，棋盘必定含有一个矩形，其四个角上的不同方格有相同颜色. 图中用粗线框出者即为一例.

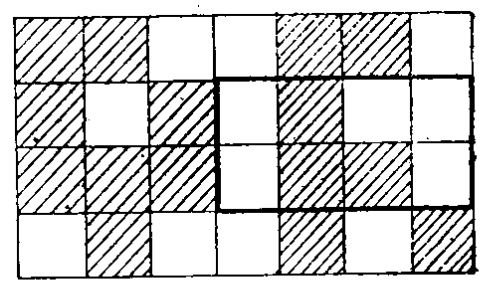

图 3

(2) 给出4×6棋盘的一种黑白染色法，使其含有的每一个矩形有如下性质：位于四个角上的方格都不能有同一种颜色.

2. (G/6) 设A和B是已知圆上的两个固定点，XY是该圆的动直径. 试确定(并证明)直线AX和BY的交点的轨迹. 可以假定AB不是直径.

3. (N/4) 试确定(并证明)方程

$$a^2+b^2+c^2=a^2b^2$$

的所有整数解.

4. (I/18) 设一个三直角四面体$PABC$(即$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90°$)的六条棱长之和为$s$，试求它的最大体积。

5. (A/10) 设$P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$及$S(x)$都是多项式，且满足

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x),$$

证明：$x-1$是$P(x)$的因子.

第6届(1977年)美国数学奥林匹克

1. (A/7) 试确定所有的正整数对(m,n)，使得

$$1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn}$$

能被$(1+x+x^2+\cdots+x^m)$整除。

2. (G/5) ABC和$A'B'C'$是同一平面上的两个三角形，直线AA'，BB'，CC'互相平行．如果用$[ABC]$表示三角形ABC的带有适当土号的面积，其余类推，证明：

$$3([ABC]+[A'B'C'])=[AB'C']+[BC'A']+[CA'B']$$
$$+[A'BC]+[B'CA]+[C'AB].$$

3. (A/4) 如果a和b是方程$x^4+x^3-1=0$的两个根，证明：ab是方程$x^6+x^4+x^3-x^2-1=0$的一个根．

4. (G/15) 证明：如果扭（非平面）四边形的两组对边分别相等，那么它的两条对角线中点连线垂直于两对角线．反之，如果扭四边形的两条对角线的中点连线垂直于两对角线，那么四边形两组对边分别相等。

5. (J/5) 如果a,b,c,d,e是以p,q为界的正数，即

$$0<p\leqslant a,b,c,d,e\leqslant q,$$

证明：

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)$$
$$\leqslant 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2,$$

且确定何时等号成立．

第7届(1978年)美国数学奥林匹克

1. (I/3) 已知a,b,c,d,e是实数，满足

$$a+b+c+d+e=8,$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16.$$

试确定e的最大值．

2. (G/2) $ABCD$和$A'B'C'D'$是某国家同一地区的正方形地图，但用不同的比例尺绘制。将它们如图4所示重叠起来。证明：在小地图上只有这样的一个点O，它和下面大地图与之正对着的点O'都代表这国家的同一地点，再用欧几里得作图法(只用直尺和圆规)定出O点来。

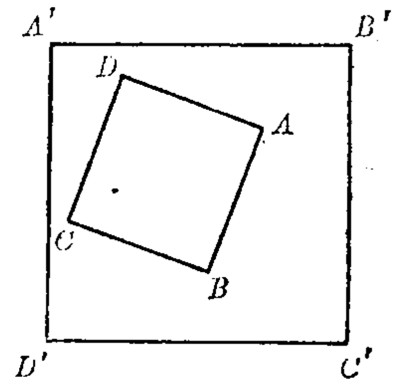

图 4

3. (N/7) 如果整数n可以表成

$$n=a_1+a_2+\cdots+a_k,$$

其中$a_1,a_2,\cdots,a_k$是正整数(但不必互异)，适合

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}=1,$$

这时我们称n为"好数"。已知从33到73的所有整数都是好数，证明：每一个大于或等于33的整数都是好数。

4. (G/18) (1) 证明：如果给定四面体的六个二面角(即两个面之间的夹角)相等，那么，这个四面体一定是正四面体。

(2) 如果五个二面角相等，这四面体必是正四面体吗？

5. (C/4) 九个数学家在一次国际会议上相遇，并且发现他们之中的任意三个人中，至少有两人会说同一种语言。如果每个数学家最多能讲三种语言，证明：至少有三个数学家能讲同一种语言。

第8届(1979年)美国数学奥林匹克

1. (N/5) 求不定方程

$$n_1^4+n_2^4+\cdots+n_{14}^4=1599$$

的所有(如果有的话)非负整数解$(n_1, n_2, \cdots, n_{14})$，不计排列顺序.

2. (G/13) 球面上一个大圆E是以球心O为圆心的圆.大圆E的极P是球面上一个点，使得OP是E所在的平面的垂线.在通过P的任何一个大圆上，取与P等距离的两点A和B. 设C点在E上,证明：对于任何球面三角形ABC(边是大圆弧),大圆弧CP是角C的平分线.

3. (P/6) 给定三个全等的n面骰子，它们的对应面上标有同样的任意整数,证明：如果随机地投掷它们,那么向上的三个面上的数字之和能被3整除的概率大于或等于$\frac{1}{4}$.

4. (I/14) 已知角A和这个角内的已知点P，求过P作直线交角A的两边于B，C，使$\frac{1}{BP}+\frac{1}{CP}$最大.

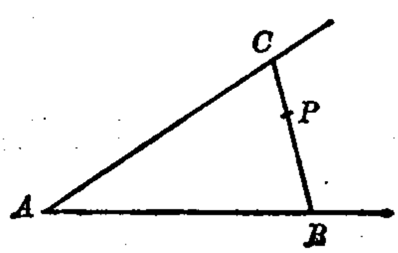

图 5

5 (C/9) 某个团体有n个成员，并且有$n+1$个三人委员会,其中没有两个委员会有完全相同的成员.证明：有两个委员会恰好有一个成员相同.

第9届(1980年)美国数学奥林匹克

1. (A/1) 一架不准的天平,因为它的两条臂的长度不相等,而且两个盘的重量也不相等，三个不同重量的物品A,

B，C 分开衡量．当它们放在左盘时，各秤得重量为 A_1，B_1，C_1．当 A 与 B 放在右盘时，各秤得 A_2 与 B_2．试确定 C 的真实重量，用 A_1,B_1,C_1,A_2,B_2 的式子表示．

2．(I/5) 从 n 个实数

$$a_1<a_2<\cdots<a_n$$

中最多能选出几组不同的三项等差数列？

3．(A/16) 设

$$F_r=x^r\sin(rA)+y^r\sin(rB)+z^r\sin(rC),$$

其中 x,y,z,A,B,C 都是实数，并且 $A+B+C$ 是 π 的整数倍．证明：如果 $F_1=F_2=0$，那么对于一切正整数 r 都有 $F_r=0$．

4．(G/19) 已知四面体的内切球切四面于其重心处．证明：这个四面体是正四面体．

5．(I/4) 设 a,b,c 是区间[0,1]中的数，证明：

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1.$$

第10届(1981年)美国数学奥林匹克

1．(G/1) 已知一个角的大小为$\dfrac{180^\circ}{n}$，其中 n 是不能被 3 整除的正整数．证明：这个角可以用欧几里得的作图法（用直尺与圆规）三等分．

2．(C/10) 某个县下属的每两个区都恰好由汽车，火车，飞机三种交通方式中的一种直接联系．已知在全县中三种交通方式全有，但没有一个区三种方式全有；并且没有任何三个区中两两联系的方式全相同．试确定这个县所含有区的个数的最大值．

3．(I/16)　如果 A,B,C 是三角形的三个内角，证明：

$$-2\leqslant\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3},$$

并确定何时等号成立。

4．(G/17)　已知一凸多面角的所有面角之和等于它所有二面角的和．证明：这个多面角为三面角．

注　凸多面角是由一个凸多边形所在平面外一点到这凸多边形所有顶点引射线所得。

5．(I/12)　如果 x 是正实数，n 为正整数，证明：

$$[nx]\geqslant\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[nx]}{n},$$

其中 $[t]$ 表示小于或等于 t 的最大整数．例如，$[\pi]=3,[2]=1$。

第11届(1982年)美国数学奥林匹克

1．(C/5)　一次聚会有1982人参加，其中任意的四个人中至少有一个人认识其余的三个人．问在这次聚会上，认识全体到会者的人至少有多少位．

2．(A/17)　设 $S_r=x^r+y^r+z^r$，其中 x,y,z 为实数．已知 $S_1=0$，对 $(m,n)=(2,3),(3,2),(2,5)$ 或 $(5,2)$，有，

$$\frac{S_{m+n}}{m+n}=\frac{S_m}{m}\cdot\frac{S_n}{n}. \qquad ①$$

试确定所有的其他适合①式的正整数组 (m,n)（如果这样的数组存在的话）．

3．(I/24)　如果点 A_1 在等边三角形 ABC 的内部，点 A_2 在三角形 A_1BC 的内部，证明：

$$\mathrm{I.Q.}(A_1BC)>\mathrm{I.Q.}(A_2BC),$$

其中一个图形 F 的等周商定义为

$$\mathrm{I.Q.}(F)=\frac{F\text{ 的面积}}{(F\text{ 的周长})^2}.$$

4. (N/13) 证明：存在一个正整数 k，使得 $k\cdot 2^n+1$ 对每一个正整数 n，均为合数.

5. (G/20) 已知点 A, B, C 是球 S 内的三点，且 AB，AC 垂直于 S 的过 A 点的直径，过 A, B, C 可作两个球均与 S 相切，证明：它们的半径之和等于 S 的半径.

第12届(1983年)美国数学奥林匹克

1. (P/1)在给定的圆周上随机地选择 A, B, C, D, E, F 六个点，这些点的选择是独立的，而且相对于弧长而言是等可能的. 求两个三角形 ABC 和 DEF 不相交(即没有公共点)的概率.

2. (A/2) 证明：如果 $2a^2<5b$，那么方程

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

的根不可能全是实数.

3. (C/11) 在实数轴上的有限个子集的簇中，每个子集是两个闭区间的并，且簇中任何三个子集都有一个公共点. 证明：这实数轴上存在一个点，至少簇中有一半的子集以它为公共点.

4. (G/16) 平面上给定六条线段 $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$，它们分别与四面体 $ABCD$ 的棱 AB, AC, AD, BC, BD, CD 相等. 试用尺规作出一线段，使它等于四面体经过顶点 A 到底面的高.

5. (N/14) 考虑实数轴上一个长度为 $\frac{1}{n}$ 的开区间，其中 n 是正整数. 证明:至多有 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 个形如 $\frac{p}{q}$ $(1\leqslant q\leqslant n)$ 的既