翁义荀 编

简明工程数学

（化学工程专业适用）

黑龙江科学技术出版社

内 容 简 介

本书系按《工程数学》的系统编写，数学推理明晰，兼有化学工程应用实例，内容简明扼要。本书共分绪论、矩阵、复变函数、拉普拉斯变换、矢量分析与场论、偏微分方程、有限差分、数值计算方法及概率论与数理统计等九章。本书可供高等院校化学工程专业的教师、研究生和具有基础微积分知识的工程技术与科学研究人员阅读参考。

责任编辑：阎继伟
封面设计：洪 冰

简明工程数学

（化学工程专业适用）

翁 义 荀 编

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区建设街35号）
哈尔滨建筑工程学院附属印刷厂印刷

787×1092毫米 32 开本16.375印张 330 千字
1988年11月第1版·1988年11月第1次印刷
印数：1—3000册　　定价：4.95元
ISBN 7-5388-0543-5/N·34

序　言

自从五十年代以来，随着大型石油化学工业的开发和化学反应工程学的创立，在化学工程的研究与设计中，《工程数学》这门学科已成为不可缺少的工具。这个期间，国外相继出版了《化工数学》这类专著。《化工数学》是《工程数学》在化学工程上应用的专著。这里应当特别指出，英国学者V. G. Jenson, G. V. Jeffreys 所著《Mathematical Methods in Chemical Engineering》和陈宁馨教授编著的《现代化工数学》，给了我国读者很大教益。

我国于1978年出版的供工科高等院校使用的七门《工程数学》教程，为我国读者学习《工程数学》提供了良好的条件。

编者力求按《工程数学》的系统编写一本结合化学工程应用实例的简明教材。因此本书保存了《工程数学》的数学推理，做到数学推理与实际应用并重。在编写中突出《简明》二字，以求推理明晰，便于具有基础微积分知识的读者自学需要。希望我们的心愿能够实现。

在此编者对本书所参考的专著的作者表示热忱的谢意，并请批评指正。

限于编者的业务水平，书中会有错误和不足之处，诚恳希望读者批评指正。

翁义衔　一九八八年四月于哈尔滨

目　　录

第一章 绪 论

1.1 引 言

我们可以用不同的方法求解一个简单的常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\cos x$$

初始条件：$y(0)=0$

首先，这个方程可用简单积分解之，得

$$y=\sin x$$

该方程也可看作是一阶线性常微分方程

$$P_0\frac{dy}{dx}+P_1y=Q$$

其中 $P_0=1$，$P_1=0$，$Q=\cos x$

用积分因子法解之。

$$\text{积分因子}\quad \gamma=\exp\left(\int\frac{P_1}{P_0}dx\right)=1$$

于是，方程的解为

$$y=\exp\left(-\int\frac{P_1}{P_0}dx\right)\left[\int Q\exp\left(\int\frac{P_1}{P_0}dx\right)dx+C\right]$$

$$=\int\cos x dx+C=\sin x+C$$

由初始条件：$x=0$，$y=0$，得$C=0$，
因此得

$$y=\sin x$$

该方程还可以用拉普拉斯变换法求解。

对方程两边取拉普拉斯变换，并运用初始条件，得

$$s\overline{Y}(s)-y(0)=\frac{s}{s^2+1}$$

解出$\overline{Y}(s)$为

$$\overline{Y}(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

再对上式作拉普拉斯逆变换，得

$$y=\sin x$$

上述例子说明，一个简单的数学问题可用简单的方法求解，也可用比较复杂的方法求解。但是，反过来，一个复杂的问题却往往不能用简单的方法解出来。

因此，人们总在寻求更为高深的数学方法以便求解比较复杂的问题。工程数学就是这样一门数学，它是在初等数学和微积分学的基础之上发展起来的，用以解决工程上比较复杂的数学问题。我们在学习完微积分课程后，可以继续学习工程数学这门课程。

1.2 工程数学在化学工程上的应用

众所周知，化学工程和其他工程学科，例如力学和电学等工程相比，是一门比较年轻的学科。在本世纪上半叶，化学工程正处在成长阶段，在解决工程问题中应用到数学这门科学也相对地比较粗浅。

自从本世纪五十年代，随着石油化学工业的迅速发展，在工程研究与开发问题的实践中就越来越多地应用了数学的方法。

自从五十年代后期，化学反应工程学作为一门新的学科提到日程，随后在六十年代得到了迅速的发展。这样，在解决工程实标问题和工程理论探讨中对数学方法提出了更高的要求。

从五十年代开始，各国学者相继出版了《化工数学》这类专著，它是工程数学在化学工程上应用的专著。这里应当特别提到两部《化工数学》专著。

英国学者 V. G. Jenson, G. V. Jeffreys 于1963年出版了《Mathematical Methods in Chemical Engineering》，该书于1977年出版了第二版。这本专著是这两位学者在英国伯明翰大学化学工程系为大学高年级生和研究生设置的数学课程的教材。该书系统地将工程数学方法应用于化学工程问题上。

1982年我国出版了陈宁馨教授编著的《现代化工数学》一书。这本专著是陈宁馨教授在美国麻省洛厄尔大学化学工程系为研究生开设的数学教程。原文名称是《NEW MATHEMATICS FOR CHEMICAL ENGINEERS》。该书在工程数学应用于化学工程上，添增了许多新颖而独特的内容。1985年又出版了《现代化工数学习题解答》。我国读者从这两本专著深受教益。

以上事实说明，在化学工程的研究与应用上，工程数学已成为不可缺少的工具。

1.3 数学模拟法

.3.1 数学模拟的步骤

真实而科学地描述一个客观存在的物理与化学过程，往往分为下列三个具体步骤：

(1) 建立表达过程的数学方程式；

(2)求解所建立的数学方程式；

(3) 对所得结果的讨论。

以上三个步骤的第一步是从具体的物理与化学过程中列出表达过程中各变量之间的数学关系式。这些关系式可能是代数方程、微分方程、差分方程及方程组。本章对建立常微分方程的具体步骤将用两个例子加以说明。

第二步骤是求解方程，是本书的主要内容，将在各章节分别加以讨论。

第三步骤是讨论所得结果的正确性，并与实标数据进行对证。

1.3.2 数学方程式的建立

在化学工程中，数学方程式的建立，往往可以通过对一个系统作物料的质量与热量平衡而得到。由物质与能量守恒定律可知，对一个系统来说，其中物料（总物料和某组分物料）的质量与热量平衡有如下关系式：

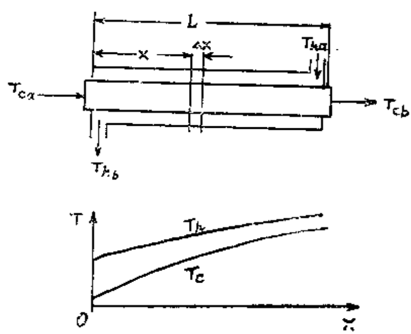
流入的速率－流出的速率＝累积的速率

由上列衡算就可得到各变量之间的关系式。再通过一些能使问题得以简化的假设，便可得到能用数学方法求解的数学方程式。

1.3.3 常微分方程示例

（1）稳定态模拟

如果一个系统，其中各变量之间的关系并不随时间而变化，则称该系统处于稳定态。在稳定态下，系统的累积速率等于零。



图例 1.3-1

例1.3-1* 计算通过逆流套管热交换器的冷与热两流体的温度。

[解] 步骤1 画出略图，列出已知数据。

如图例1.3-1所示，以 T_c 和 T_h 分别表示冷与热流体的温度，以 a 表示入口，b

* [8], P. 134, 例2. 9—6

表示出口。x 表示距冷流体入口的距离，其出口处，$x=L$。

步骤2　确定自变量与因变量。

以距冷流体入口的距离x为自变量，冷、热流体的温度T_c、T_h为因变量。

步骤3　写出边界条件，列出假设。

边界条件：$x=0$，$T_c=T_{cb}$，$T_h=T_{hb}$

$x=L$，$T_c=T_{cb}$，$T_h=T_{ha}$

假设：1°　总传热系数U，流体比热C_p为常数；

2°　无相变；

3°　对外界没有热损失。

步骤4　作热量平衡

取微分元Δx，作热量衡算：

热量流入速率－热量流出速率＝0

1°　冷流体

令T_f为基准温度，得到

$$m_cC_{p,c}(T_c-T_f)_x+UA(T_h-T_c)\Delta x-m_cC_{p,c}(T_c-T_f)_{x+\Delta x}=0$$

式中　m_c为冷流体流量，A为单位长度的传热面。

上式除以Δx，并令$\Delta x\to 0$，得

$$m_cC_{p,c}\frac{d(T_c)}{dx}=UA(T_h-T_c) \qquad (1)$$

2°　热流体

同理可得

$$m_hC_{p,h}\frac{d(T_h)}{dx}=UA(T_h-T_c) \qquad (2)$$

式中　　m_h为热流体流量。

由(1)与(2)式得

$$m_c C_{p,c} dT_c = m_h C_{p,h} dT_h \tag{3}$$

利用边界条件，将上式从冷流体入口到距离x处积分，得

$$m_c C_{p,c}(T_c - T_{ca}) = m_h C_{p,h}(T_h - T_{hb}) \tag{4}$$

(1) 式可改写为

$$\frac{dTc}{T_h - T_c} = \frac{UA}{m_c C_{p,c}} dx \tag{5}$$

令　　$$\gamma = T_h - T_c \tag{6}$$

则　　$$d\gamma = dT_h - dT_c \tag{7}$$

(6)式代入(3)式，得

$$m_c C_{p,c} dT_c = m_h C_{p,h}(d\gamma + dT_c),$$

即　　$$dT_c = \frac{1}{N} d\gamma \tag{8}$$

式中　　$$N = \frac{m_c C_{p,c}}{m_h C_{p,h}} - 1$$

将(6)与(8)式代入(5)式，得

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{NUA}{m_c C_{p,c}} dx \tag{9}$$

(9)式便是所建立的常微分方程。

步骤5　解微分方程。

(9)式的边界条件为

$x = 0$，$\gamma = T_{hb} - T_{ca}$；$x = L$，$\gamma = T_{ha} - T_{cb}$

将(9)式从$x = 0$到$x = L$积分，得

$$Ln\frac{T_{ha}-T_{cb}}{T_{hb}-T_{ca}}=\frac{NUAL}{m_c C_{pc}}$$

即

$$\frac{T_{ha}-T_{cb}}{T_{hb}-T_{ca}}=\exp(MN) \qquad (10)$$

式中 $$M=\frac{UAL}{m_c C_{pc}}$$

由边界条件，$x=L$，$T_h=T_{ha}$，$T_c=T_{cb}$，代入(4)式得

$$m_c C_{pc}(T_{cb}-T_{ca})=m_h C_{ph}(T_{ha}-T_{hb})$$

即 $$(N+1)T_{cb}+T_{hb}=(N+1)T_{ca}+T_{ha} \qquad (11)$$

(10)式可改写为

$$T_{cb}+\exp(MN)T_{hb}=\exp(MN)T_{ca}+T_{ha} \qquad (12)$$

用克莱姆法则解联立方程(11)与(12)式。

$$\Delta=\begin{vmatrix} N+1 & 1 \\ 1 & \exp(MN) \end{vmatrix}=(N+1)\exp(MN)-1$$

$$\Delta_{T_{cb}}=\begin{vmatrix} (N+1)T_{ca}+T_{ha} & 1 \\ \exp(MN)T_{ca}+T_{ha} & \exp(MN) \end{vmatrix}$$

$$=N\exp(MN)T_{ca}+[\exp(MN)-1]T_{ha}$$

于是求得

$$T_{cb}=\frac{N\exp(MN)T_{ca}+[\exp(MN)-1]T_{ha}}{(N+1)\exp(MN)-1} \qquad (13)$$

$$\Delta_{T_{hb}}=\begin{vmatrix} N+1 & (N+1)T_{ca}+T_{ha} \\ 1 & \exp(MN)T_{ca}+T_{ha} \end{vmatrix}$$

$$= (N+1)[\exp(MN)-1]T_{ca} + NT_{ha}$$

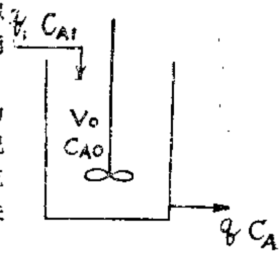
得到

$$T_{hb} = \frac{(N+1)[\exp(MN)-1]T_{ca} + NT_{ha}}{(N+1)\exp(MN)-1} \qquad (14)$$

(2) 非稳定态模拟

如果一个系统中各变量随时间而变化，则称该系统处于非稳定态。在非稳定态中系统有累积。

例1.3-2* 浓度为 C_{A1}的流体以 q_1 的流量流入一个桶内，在桶内组分 A 以一级反应进行分解。起初桶内有体积为 V_0，浓度为 C_{A0} 的溶液，在搅拌均匀的情况下，溶液以 q 的流量流出。试求流出溶液的浓度与时间的函数关系。



图例 1.3-2

[解] 步骤 1 画出略图，列出已知数据。

如图例1.3-2所示。

步骤 2 确定自变量与因变量。

自变量为时间θ，因变量为桶内溶液体积 V 与浓度 C_A。

步骤 3 作物料平衡。

1° 全部流量的平衡

取时间为$\triangle\theta$内作物料平衡：

物料流入的速率 − 物料流出的速率 = 物料累积的速率

---

* [8], P.131, 例2.9-4

则 $$q_1\rho_1\Delta\theta - q\rho\Delta\theta = (V_{\theta+\Delta\theta} - V_\theta)\rho$$

式中 ρ_1，ρ分别为进入与排出的溶液的密度。

上式除以$\Delta\theta$，并令$\Delta\theta\to 0$，得

$$q_1\rho_1 - q\rho = \frac{d(V\rho)}{d\theta}$$

若$\rho_1=\rho$，积分得

$$V = V_0 + (q_1 - q)\theta \tag{1}$$

2° 溶质流量的平衡

在时间为$\Delta\theta$内作溶质平衡：

溶质进入速率－溶质排出速率－反应消耗的溶质速率

＝溶质累积速率

则 $$q_1C_{A1}\Delta\theta - qC_A\Delta\theta - kC_AV\Delta\theta = \\ = (C_AV)_{\theta+\Delta\theta} - (C_AV)_\theta$$

式中k为分解反应的速度常数。

上式除以$\Delta\theta$，并令$\Delta\theta\to 0$，得

$$q_1C_{A1} - qC_A - kC_AV = \frac{d(C_AV)}{d\theta}$$

因为V和C_A都随时间而变化，所以用A的克分子数$n_A=C_AV$代入上式，得

$$q_1C_{A1} - \frac{qn_A}{V_0+(q_1-q)\theta} - kn_A = \frac{dn_A}{d\theta}$$

即

$$\frac{dn_A}{d\theta} + \left[k + \frac{q}{V_0+(q_1-q)\theta}\right]n_A = q_1C_{A1} \tag{2}$$

（2）式便是所建立的常微分方程，是一阶线性方程。