高 等 学 校

教 学 用 书

解析函数论基础

陈方权　蒋绍惠　编

北京师范大学出版社

校教学用书

解析函数论基础

陈方权　蒋绍惠　编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书
解析函数论基础
陈方权　蒋绍惠　编
*
北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
天津黎明印刷厂印刷
*
开本: 850×1168 1/32 印张: 12.25 字数: 306 千
1987年6月第1版　1987年6月第1次印刷
印数: 1—12 100
统一书号: 13243·133　定价: 2.45 元

内容简介

本书是作者总结多年在北京师大数学系教与学两方面的经验，根据原教育部1980年颁发的师范院校教学大纲的要求，并参考了国内外多种复变函数论教材编写而成的。本书内容包括复数与复变函数、复变初等函数、解析函数的概念及柯西积分定理、解析函数的积分表示及级数表示、解析函数的重要性质、留数理论及其应用、解析开拓、保形映照、复变方法在求解边值问题中的应用。其特点：（1）便于自学和阅读；（2）适当突出与中学数学有关的内容；（3）加强与解析函数基本理论有关的练习；（4）章节安排便于根据实际情况取舍。

前　言

我们在多年从事复变函数论课程的教学工作之后，总结教和学两方面的经验，结合目前师范院校的情况，按照原教育部一九八〇年颁发的师范院校复变函数教学大纲所规定的内容，并参考了国内外现行的多种复变函数论教材，编写了本教材。

我们希望业已完成的教材有以下特点：(1) 便于读者自学和阅读。例如，我们将复变函数中的一些与一元微积分在形式上几乎完全一样的概念，如函数、连续、微分、积分、级数（特别是幂级数）及其基本性质集中于第一章中引入，这样使读者不感到陌生而又便于对照复习数学分析中相应的概念及性质。(2) 适当突出与中学数学教学有关的内容。例如对复数的严格定义，初等函数的定义域由实数到复数的拓广，复初等函数的特殊性质，映照特性及其应用，多值初等函数的结构等问题都作了较详细地讨论。(3) 加强与解析函数基本理论有关的练习。例如，我们专门针对某些重要定理编选了习题，使读者通过练习加深对定理的理解。另外在习题中还注意配备了一些综合应用题及有多种解法的习题，以便教师在习题课上讲解或组织学生讨论。(4) 在章节的安排上便于教师根据不同情况及要求进行取舍。例如前三章详细讲述了复变函数、复变初等函数与解析函数的基本概念及基本性质，这部分内容应要求学生很好地掌握，但有些章节（例如第一章的部分内容）可由学生通过自学完成。后几章着重讲述解析函数的级数方法，积分方法，解析开拓方法，初等映照方法的应用及有关理论，这部分内容可根据不同的情况和要求删去或略讲其中某些章节，例如第四章§1.3（即第3段，下同）；1.4，§3.5，

§4，第五章§1.4；1.5，§2.3，第六章§2，§3，第七章§1.1；1.2；1.3，§3中定理的证明，第八章§1，§2.3—2.6.

本教材作为讲义已在本系连续使用过多次，实践结果表明，使用本教材在68—72学时中可以完成教学大纲规定的教学任务．各章的教学时数可参考如下安排：第一章8学时，第二章10学时、第三章10学时，第四章10学时，第五章8学时．第六章6学时，第七章12学时，第八章4—8学时，另外有17—18学时习题课。

本教材在目次上分为章、节(§)、段，其中定义，定理，公式按节编号，推论跟随在相应定理之后编号，例题按段编号，图按全书统一顺序编号，未用定义给出的概念用黑体字印出．

本教材第一、二、三、七章由陈方权编写，第四、五、六、八章由蒋绍惠编写．黄海洋，洪良辰、娄树宪等同志先后使用过本教材进行教学，提出了许多有益的修改意见，赵桢老师对本教材的编写工作十分关心和支持并亲自进行了审阅，另外许多兄弟院校的同行及我们的学生也对这一教材提出不少修改意见，我们在此一并表示感谢。由于本教材采用了与现行各种教材不太一样的顺序，也由于编写者水平所限，因而难免会有谬误或不妥之处，欢迎读者和同行们批评指正。

编者　陈方权　蒋绍惠

目　录

第一章　复数与复变函数

本章从复数域的严格定义出发详细介绍了复数的代数运算及其各种表示法，在此基础上讨论了复数列的极限并引入了无穷大数，本章的后四节引入了复变函数及其极限、连续、导数、微分、积分、级数等一系列基本概念并介绍了它们的基本性质，这些概念及性质与一元或二元微积分中相应概念及性质在形式上几乎完全一样，但本质上却有着很大的差别，这种差别正是以后各章中引出复变函数许多特性的基础，因而也是我们应该特别关注的。

§1　复数表示法及其代数运算

1. 复数域　复变函数的研究对象是复数变量之间的函数关系，因而在本书一开始回顾一下在高等代数课程中已建立起来的复数域的基本概念是十分必要的。

一对有序实数 a 与 b 的复合称为一个复数，可按其顺序记为 (a,b)，或用单一的字母 z 表示。一切复数的全体构成复数集，记作 $\mathbf{C}=\{z=(a,b)\mid a,b\in\mathbf{R}\}$，此处 $\mathbf{R}$ 表示实数域。

我们对 $\mathbf{C}$ 中任意两个复数 $z_1=(a,b)$，$z_2=(c,d)$，引入如下规定：

(1) 当且仅当 $a=c$，$b=d$ 时称 z_1 与 z_2 **相等**，记作 $z_1=z_2$；

(2) z_1 与 z_2 相加的和仍为一复数 $(a+c,b+d)$，记作 $z_1+z_2=(a+c,b+d)$；

(3) z_1与z_2相乘的积仍为一复数$(ac-bd,\ ad+bc)$，记作 $z_1\cdot z_2=(ac-bd,\ ad+bc)$.

容易验证在上面的规定中，"加"与"乘"的运算法则满足基本运算律，即加法的交换律与结合律，乘法的交换律与结合律，加法与乘法之间的分配律；对于加法有**零元**$(0,0)$，记作0，对于任意复数z，显然有$z+0=z$，同时对任意复数$z=(a,b)$有**负元**$(-a,-b)$，记作$-z$，使得$z+(-z)=0$；对于乘法有**单位元**$(1,0)$，记作1，对任意复数z，有$z\cdot 1=z$. 同时对任意复数$z=(a,b)$，有**逆元**$\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. 记作$z^{-1}$，使得$z\cdot z^{-1}=1$.

利用负元及逆元可定义复数的减法与除法. 复数$z_1=(a,b)$与复数$z_2=(c,d)$相减的**差**定义为z_1与z_2的负元$-z_2=(-c,-d)$的和，记作

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2)=(a-c,\ b-d).$$

而复数z_1与z_2相除的**商**定义为z_1与z_2的逆元$z_2^{-1}=\left(\frac{c}{c^2+d^2},\ \frac{-d}{c^2+d^2}\right)$的积，记作

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot(z_2^{-1})=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

综上所述可见，复数集**C**对于所作的三条规定来说构成复数域. 容易验证，数集$\{(a,0)\mid a\in\mathbf{R}\}$是复数域中与实数域同构的子域，为简单起见，可认为$(a,0)$与$a$表示同一个数，即$\{(a,0)\}=\mathbf{R}$. 这样就可以说实数域是复数域的子域，反之复数域是实数域的扩域*).

---

*) 在近世代数中已证明复数域是实数域的最大有限维代数扩域.

2. 虚单位 在复数域中，$(0, 1)$ 是一个特殊的复数，它具有以下重要性质：

(1) $(0, 1)\cdot(0, 1) = (-1, 0) = -1$

(2) $(a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0)$

$$= a + (0, 1)b$$

性质（1）说明 $(0, 1)$ 是方程 $z^2 + 1 = 0$ 的一个根，这个方程在实数域中无根，因而我们称 $(0, 1)$ 为 $z^2 + 1 = 0$ 的虚根，或称为**虚单位**，并将它简记为 i . 于是由性质（2）可知每一个复数 $z = (a, b)$ 均可表成 $z = a + ib$，我们称 a 为复数 z 的**实部**，记作 $a = \mathrm{Re}z$；而 b 称为复数 z 的**虚部**，记作 $b = \mathrm{Im}z$。

利用复数 $z = a + ib$ 的表示法，复数的加法与乘法可写成

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id)$$

$$= (a + c) + i(b + d). \tag{1.1}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib)\cdot(c + id)$$

$$= (ac - bd) + i(ad + bc). \tag{1.2}$$

我们看到复数的加法与乘法可以形式地按二次根式运算法则进行，只要在运算过程中注意到 $i^2 = -1$ 即可。

减法与除法可以写成：

$$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d). \tag{1.3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

$(z_2 \neq 0)$. (1.4)

3. 共轭复数 方程 $z^2 + 1 = 0$ 除 i 外显然还有一个根 $(0, -1) = -i$ 称它为**共轭虚单位**. 相应地把复数 $z = a + ib$ 中的 i 换成 $-i$ 而得到的复数 $a - ib$ 称为 z 的**共轭复数**. 记作 $\overline{z} = a - ib$. 由于 $\overline{\overline{z}} = z$，故 z 与 $\overline{z}$ 互为共轭复数，实数是复数

域中的全部共轭不变量，即z是实数的充要条件为$z=\overline{z}$。利用共轭复数可以得到以下重要关系式：

$$\operatorname{Re} z=a=\frac{z+\overline{z}}{2}; \tag{1.5}$$

$$\operatorname{Im} z=b=\frac{z-\overline{z}}{2i}. \tag{1.6}$$

容易验证以下关于共轭复数的运算公式：

$$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}; \tag{1.7}$$

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}; \tag{1.8}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ (z_2\neq 0). \tag{1.9}$$

4．复平面 如果将任一复数$z=a+ib$的实部a与虚部b分别看作笛卡尔直角坐标平面中的横坐标与纵坐标．则复数域**C**就与平面点集建立了一一对应关系，因此我们称$a+ib$为复数的**直角坐标表示**。为了体现复数的特点，我们将笛卡尔坐标系中的横轴改称为**实轴**，它与复数体中的全部实数相对应，而笛卡尔坐标系中的纵轴改称为**虚轴**，它与复数体中全部实部为零的数相对应，这种数称为**纯虚数**，这样建立起来的与复数相对应的平面称为**复数平面**．简称**复平面**，记作Z，今后我们约定"复数z"与"点z"为同义语，"复数集"与"平面点集"也为同义语，这显然不会引起混乱。

复平面上两点$z_1=a+ib$与$z_2=c+id$的距离记作

$d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$，定义为

$$|z_1-z_2|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}. \tag{1.10}$$

显然它表示连接z_1，z_2两点的直线段的欧氏长度，特别将$z=a+ib$到$z=0$的距离记为

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2} \tag{1.11}$$

并称为复数z的模，于是两点的距离就是两个复数的差的模．一复数与其共轭复数关于实轴对称，它们的模相等．即

$$|z|=|\overline{z}| \tag{1.12}$$

并有以下重要关系：

$$z\cdot\overline{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2=|z|^2. \tag{1.13}$$

利用（1.13），可将复数除法(1.4)表作

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

利用（1.13）还可证明

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|; \tag{1.14}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad (z_2\neq 0). \tag{1.15}$$

设z_1，z_2，z_3是复平面上的三点，根据几何学的知识可知，当z_1，z_2，z_3三点不共线时，以此三点为顶点的三角形中两边z_1z_2与z_2z_3之和将大于第三边z_1z_3。而当且仅当z_1，z_2，z_3三点顺次共线时，z_1z_2与z_2z_3之和才等于z_1z_3，这一重要命题可表为

$$|z_1-z_3|\leqslant|z_1-z_2|+|z_2-z_3|. \tag{1.16}$$

若将z_1-z_2与z_2-z_3分别用复数z'与z''与表示。则$z_1-z_3=(z_1-z_3)+(z_2-z_3)=z'+z''$，于是(1.16)可简化为

$$|z'+z''|\leqslant|z'|+|z''|. \tag{1.17}$$

（1.17）也可以直接证明．首先由（1.11）可得不等式

$$-|z|\leqslant \mathrm{Re}z\leqslant|z|.$$
$$-|z|\leqslant \mathrm{Im}z\leqslant|z|. \tag{1.18}$$