工程力学概要与习题解答

（材料力学部分）

顾赫宁 编著

3

华南理工大学出版社

工程力学概要与习题解答

（材料力学部分）

顾赫宁　编著

华南理工大学出版社

·广州·

图书在版编目（CIP）数据

工程力学概要与习题解答（材料力学部分）/顾赫宁编著.—广州：华南理工大学出版社，2001.11

ISBN 7-5623-1768-2

Ⅰ.工…　Ⅱ.顾…　Ⅲ.①工程力学-解题　②材料力学-解题　Ⅳ.TB12-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 070622 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scut202@scut.edu.cn　　http://www2.scut.edu.cn/press
责任编辑：欧建岸
印 刷 者：广州市新明光印刷有限公司
开　　本：787×1092　1/16　**印张**：10.75　**字数**：258 千
版　　次：2001 年 11 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数：1～5000 册
定　　价：17.50 元

责任编辑 欧建岸

封面设计 吴俊卿

ISBN 7-5623-1768-2

9 787562 317685 >

ISBN 7-5623-1768-2

TB·49 定价：17.50元

目　　录

第一章　轴向拉伸与压缩

一、内容总结

1. 轴向拉压的概念

等直杆在其两端各受一集中力 P 作用，两个力等值，反向，且作用线与杆轴线重合，则此杆产生轴向拉压这种基本变形。

2. 轴力与轴力图

轴向拉压杆的内力称为轴力，用符号 N 表示。当 N 的方向与截面外法线方向一致时，规定为正，反之为负。求轴力时采用截面法。

在本章或以后的章节中，求内力时均使用“设正法”，即将所求截面的内力假设为正的数值，如果结果为正，则说明假设正确，轴力为拉力；如果结果是负值，则说明实际情况与假设相反，是压力。

当杆受到多个轴向外力作用时，在杆的各横截面上的轴力将随横截面位置的不同而变化，这种表示轴力与截面位置关系的图线，称为轴力图。

3. 轴向拉压杆横截面及斜截面上的应力及其应用条件

由于轴向拉压杆横截面上的应力分析是一个静不定问题，所以要从几何和静力平衡两方面着手进行研究。首先几何方面，据实验，杆件横截面变形前后均为平面，因而提出“平面假设”，任意两横截面间所有假想的纵向纤维的变形均相同，受力相同，由材料均匀连续的假设可知，轴向拉压杆横截面上各点的应力相等，垂直于横截面。再根据静力平衡条件即可得出轴向拉压杆横截面(A)上的正应力

$$\sigma=\frac{N}{A}$$

式中 A 为横截面面积。与横截面成 α 角的任一斜截面上的应力：

$$\sigma_\alpha = \sigma_0\cos^2\alpha \qquad \sigma_{\max}\big|_{\alpha=0} = \sigma_0$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2}\sin2\alpha \qquad \tau_{\max}\big|_{\alpha=45^\circ} = \frac{\sigma_0}{2}$$

式中，$\sigma_0=\dfrac{N}{A}$即轴向拉压杆在横截面($\alpha=0$)上的正应力。

轴向拉压杆横截面上应力公式应用条件：

①适用于弹性及塑性范围；

②适用于锥角 $\alpha \leqslant 20°$,横截面连续变化的直杆;

③在外力作用点附近或杆件面积突然变化处,应力分布并不均匀,不能应用上述公式,稍远一些的横截面上方可使用。这就是"圣维南原理"。

4. 轴向拉压杆的强度计算

等直杆轴向拉压时的强度条件为

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leqslant [\sigma]$$

其中$[\sigma] = \frac{\sigma_u}{n}$。$[\sigma]$称为许用应力,它是用材料的极限应力 σ_u 除以安全系数 n 所得的数值。塑性材料的极限应力为材料的屈服极限 σ_s,脆性材料的极限应力为材料的强度极限 σ_b。n 是大于 1 的数。

最大正应力发生的截面称为危险截面。对于变截面直杆,轴力绝对值最大的截面,静面积最小的截面是危险截面。

强度问题一般有以下三类:

(1)设计截面尺寸

已知外力 P,材料许用应力$[\sigma]$,设计杆件截面

$$A \geqslant \frac{N}{[\sigma]}$$

若所取截面形状为矩形,一般取$\frac{h}{b} = \frac{3}{2}$,$h$,$b$ 分别为矩形长、宽。

(2)求许可截荷

已知杆件横截面尺寸及所选用材料,求所能承受的最大外力。一般先求出许可的轴力,再求许可截荷

$$N_{max} \leqslant A[\sigma]$$

(3)强度校核

已知外力 P,杆件横截面尺寸及所选用材料,校核该杆件是否安全。

5. 轴向拉压杆的变形计算

轴向拉压杆的轴向线应变 ε 为

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

轴向拉压杆的横向应变 ε'为

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon \quad 或 \quad \mu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|$$

μ 称为泊松比,是材料的弹性常数之一,无量纲。

轴向拉压杆虎克定律的两种形式及应用条件

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \qquad \sigma = E\varepsilon$$

应用条件:①正应力不超过比例极限 σ_p;②在计算长度 l 内,N,E,A 均为常数。

对于阶梯形受拉压杆件,其总变形应分段考虑,然后进行代数和累加,即

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i l_i}{EA_i}$$

6. 材料的力学性能和低碳钢静拉伸实验

材料在外力作用下所呈现的有关强度和变形方面的特性,称为材料的力学性能。

在常温静载条件下低碳钢受拉时,以 σ 为纵坐标,以 ε 为横坐标,可以得到应力—应变曲线(图 1-1)。从图中可看到:

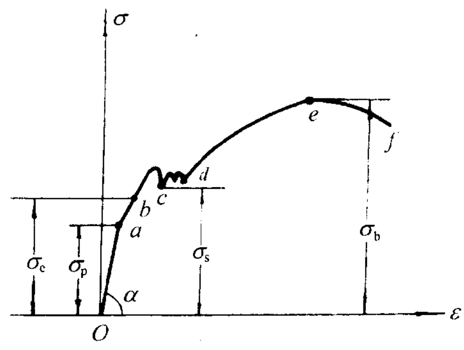


图 1-1

(1)变形分为四个阶段

弹性阶段 Ob、屈服(流动)阶段 cd、强化阶段 de、颈缩破坏阶段 ef。

(2)四个强度指标

比例极限 σ_p,线弹性阶段结束时(a 点)所对应的应力数值。

弹性极限 σ_e,弹性阶段结束时(b 点)所对应的应力数值。

屈服极限 σ_s,下屈服点 c 所对应的应力数值。

强度极限 σ_b,试件破坏之前所能承受的最高应力数值。

(3)一个弹性指标

由图 1-1 可看出,材料弹性模量

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\tan\alpha$$

(4)两个塑性指标

延伸率

$$\delta=\frac{l_1-l}{l}\times100\%$$

断面收缩率

$$\psi=\frac{A-A_1}{A}\times100\%$$

式中 l 为试件原长,l_1 为拉断后长度,A 为横截面的原来面积,A_1 为颈缩破坏处的最小面积。塑性材料:$\delta>5\%$的材料;脆性材料:$\delta<5\%$的材料。

低碳钢试件拉至塑性变形阶段后卸载,当重新加载时,材料的比例极限提高,塑性降低,该现象称为冷作硬化。

7. 简单拉压静不定问题

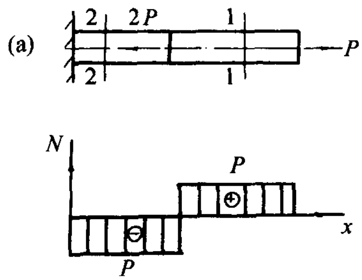
对于某一结构,若总平衡方程数少于所要求的未知量总数时,这一结构称为静不定结构。总未知量数减去总平衡方程数即为该结构的静不定次数。求解静不定问题的关键在于根据变形几何关系,列出与静不定次数相同的补充方程。

解静不定问题的一般步骤为:①确定静不定次数;②列出所有独立的平衡方程;③根据变形几何关系,列出变形协调方程;④将物理关系式代入变形协调方程,得到补充方程,将其与平衡方程联立,求出全部未知量。

掌握“用切线代替圆弧”求简单桁架中杆件变形量的方法。

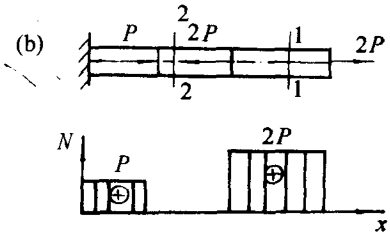
二、习题解答

1-1 求图示各杆 1-1 和 2-2 横截面上的轴力，并作轴力图。



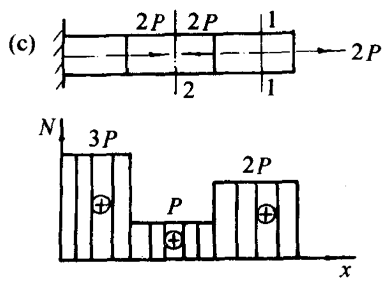
$N_1=+P$

$N_2=-P$



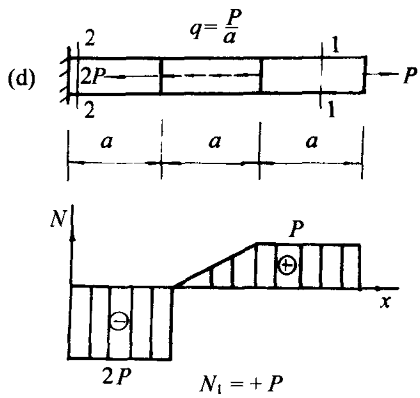
$N_1=+2P$

$N_2=0$



$N_1=+2P$

$N_2=+P$



$N_1=+P$

$N_2=-2P$

题 1-1 图

1-2 求图示等直杆横截面 1-1、2-2 和 3-3 上的轴力，并作轴力图。如横截面面积 $A=400\ \text{mm}^2$，求各横截面上的应力。

解：$N_1=-20\ \text{kN}$

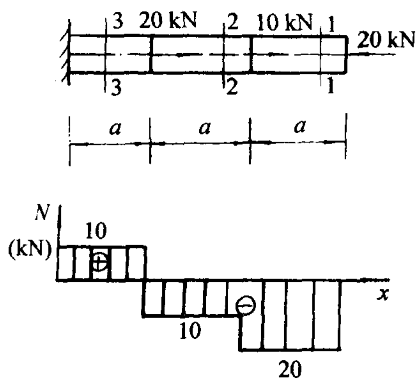
$N_2=-10\ \text{kN}$

$N_3=+10\ \text{kN}$

$$\sigma_1=\frac{N_1}{A}=\frac{-20\times10^3}{400\times10^{-6}}=-50\ \text{MPa}$$

$$\sigma_2=\frac{N_2}{A}=\frac{-10\times10^3}{400\times10^{-6}}=-25\ \text{MPa}$$

$$\sigma_3=\frac{N_3}{A}=\frac{10\times10^3}{400\times10^{-6}}=+25\ \text{MPa}$$



题 1-2 图

1-3 求图示阶梯状直杆横截面 1-1、2-2 和 3-3 上的轴力，并作轴力图。如横截面面积 $A_1=200\ \text{mm}^2$，A_2

$=300\ \text{mm}^2, A_3=400\ \text{mm}^2$，求各横截面上的应力。

解：$N_1=-20\ \text{kN}$

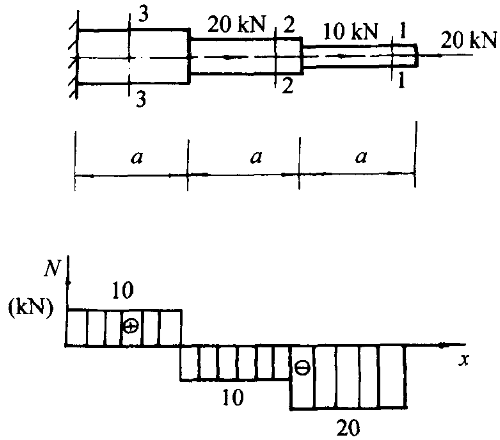
$N_2=-10\ \text{kN}$

$N_3=+10\ \text{kN}$

$$\sigma_1=\frac{N_1}{A_1}=\frac{-20\times10^3}{200\times10^{-6}}=-100\ \text{MPa}$$

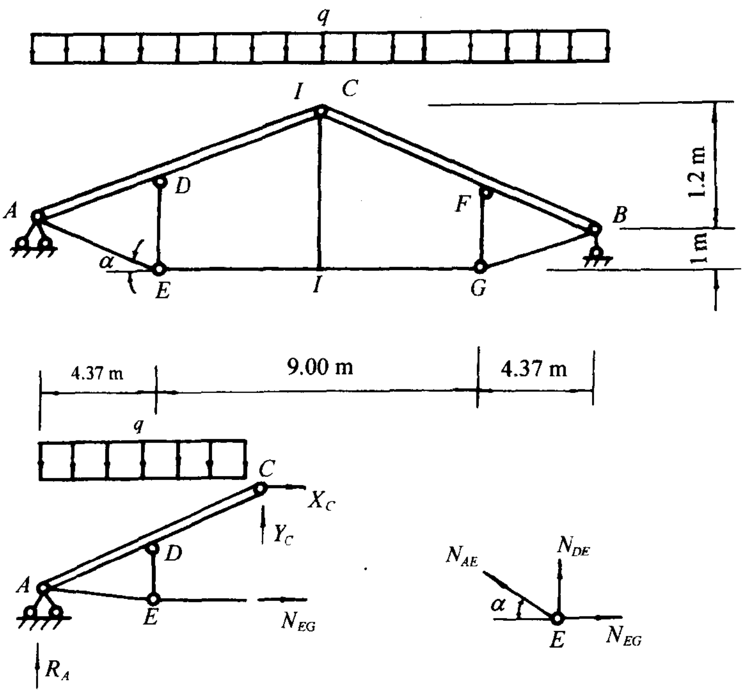
$$\sigma_2=\frac{N_2}{A_2}=\frac{-10\times10^3}{300\times10^{-6}}=-33.3\ \text{MPa}$$

$$\sigma_3=\frac{N_3}{A_3}=\frac{+10\times10^3}{400\times10^{-6}}=+25.0\ \text{MPa}$$



题 1-3 图

1-4　图示一混合屋架结构的计算简图。屋架的上弦用钢筋混凝土制成。下面的拉杆和中间竖向撑杆用角钢构成，其截面均为两根 $75\times75\times8$ 的等边角钢。已知屋面承受集度为 $q=20$ kN/m 的竖直均布荷载。求拉杆 AE 和 EG 横截面上的应力。



题 1-4 图

解：由题意可判定此结构为对称结构，

$\therefore R_A=R_B=\dfrac{1}{2}\times20\times17.74=177.4\ \text{kN}$

(1)求内力

取 I-I 截面以左部分，由 $\sum M_C=0$，

$$q\times\frac{(4.37+4.5)^2}{2}-R_A\times(4.37+4.5)+N_{EG}\times2.2=0$$

$$N_{EG}=356\ \text{kN}(\text{拉})$$

取节点 E 为分离体，$\sum X=0$，

$$N_{AE}\cdot\cos\alpha=N_{EG}$$

因$\overline{AE}=\sqrt{4.37^2+1^2}=4.48$ m，$\cos\alpha=\dfrac{4.37}{4.48}$，故

$$N_{AE}=\frac{N_{EG}}{\cos\alpha}=\frac{356\times4.48}{4.37}=365\ \text{kN(拉)}$$

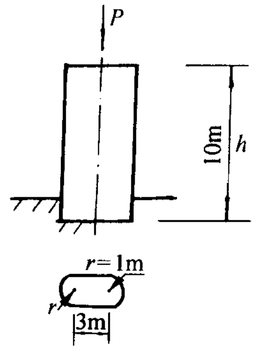
(2)求应力

查型钢表可知 75×75×8 等边角钢的横截面积为 $A=11.5\ \text{cm}^2$

$$\sigma_{EG}=\frac{N_{EG}}{2A}=\frac{356\times10^3}{2\times11.5\times10^{-4}}=155\ \text{MPa(拉)}$$

$$\sigma_{AE}=\frac{N_{AE}}{2A}=\frac{365\times10^3}{2\times11.5\times10^{-4}}=159\ \text{MPa(拉)}$$

1-5 石砌桥墩的墩身高 $h=10$ m，其横截面尺寸如图所示。如荷载 $P=1\ 000$ kN，材料的容重 $\gamma=23\ \text{kN/m}^2$，求墩身底部横截面上的压应力。



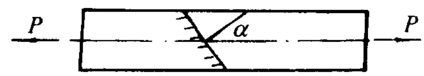
题 1-5 图

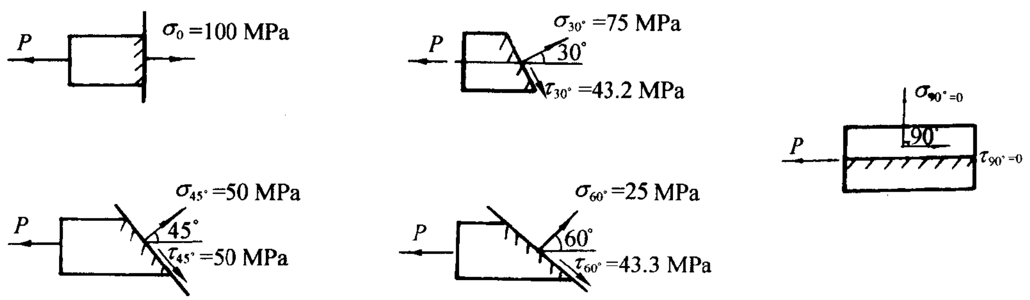
解：墩身横截面积

$$A=3\times2+\pi\times1^2=9.14\ \text{m}^2$$

$$\sigma_{底}=\frac{P}{A}+\frac{\gamma Ah}{A}=\frac{1\ 000\times10^3}{9.14}+10\times23\times10^3=0.34\ \text{MPa(压)}$$

1-6 图示拉杆承受轴向拉力 $P=10$ kN，杆的横截面积 $A=100\ \text{mm}^2$。如以 α 表示斜截面与横截面的夹角，试求当 $\alpha=0°,30°,45°,60°,90°$时各斜截面上的正应力和剪应力，并用图示出。





题 1-6 图

解：$\sigma_\alpha=\sigma_0\cos^2\alpha$，$\tau_\alpha=\dfrac{\sigma_0}{2}\sin2\alpha$

$$\sigma_0=\frac{P}{A}=\frac{10\times10^3}{100\times10^{-6}}=100\ \text{MPa}\qquad \sigma_{45°}=\sigma_0\cos^2 45°=50\ \text{MPa}$$

$$\tau_0=0\qquad \tau_{45°}=\frac{\sigma_0}{2}\sin2\times45°=50\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{30°}=\sigma_0\cos^2 30°=75\ \text{MPa}\qquad \sigma_{60°}=\sigma_0\cos^2 60°=25\ \text{MPa}$$

$$\tau_{30°}=\frac{\sigma_0}{2}\sin60°=43.2\ \text{MPa}\qquad \tau_{60°}=\frac{\sigma_0}{2}\sin2\times60°=43.3\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{90°}=\sigma_0\cos^2 90°=0\qquad \tau_{90°}=\frac{\sigma_0}{2}\sin2\times90°=0$$

1-7 一木柱受力如图所示。柱的横截面为边长 200 mm 的正方形，材料可认为符合胡克定律，其弹性

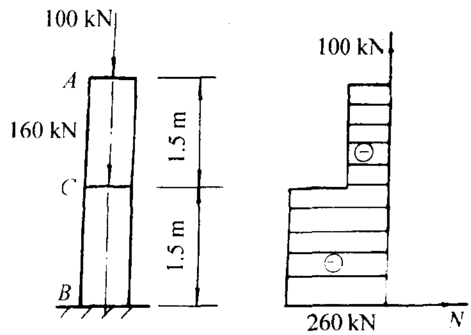
模量 $E=10$ GPa。如不计柱的自重,试求下列各项:

(1)作轴力图;

(2)各段柱横截面上的应力;

(3)各段柱的纵向线应变;

(4)柱的总变形。



题 1-7 图

解:$\sigma_{AC}=\dfrac{N_{AC}}{A}=\dfrac{100\times10^3}{200\times200\times10^{-6}}=2.5$ MPa(压)

$$\sigma_{CB}=\frac{N_{CB}}{A}=\frac{260\times10^3}{200\times200\times10^{-6}}=6.5\text{ MPa(压)}$$

$$\varepsilon_{AC}=\frac{\sigma_{AC}}{E}=\frac{2.5\times10^6}{10\times10^9}=0.25\times10^{-3}(-)$$

$$\Delta l_{AC}=\varepsilon_{AC}\cdot l_{AC}=-0.25\times10^{-3}\times1.5=-0.375\text{ mm}$$

$$\varepsilon_{CB}=\frac{\sigma_{CB}}{E}=\frac{6.5\times10^6}{10\times10^9}=0.65\times10^{-3}(-)$$

$$\Delta l_{CB}=\varepsilon_{CB}\cdot l_{CB}=-0.65\times10^{-3}\times1.5=-0.975\text{ mm}$$

$$\Delta l=\Delta l_{AC}+\Delta l_{CB}=-0.375-0.975=-1.35\text{ mm}$$

1-8 (1)试证明受轴向拉伸(压缩)的圆截面杆横截面沿圆周方向的线应变 ε_S 等于直径的相对变化 ε_d;

(2)一根直径为 $d=10$ mm 的圆截面杆,在轴向拉力 P 作用下,直径减小 0.0025 mm。如材料的弹性模量 $E=210$ GPa,横向变形系数 $\upsilon=0.3$,试求轴向拉力 P;

(3)空心圆截面钢杆,外直径 $D=120$ mm,内直径 $d=60$ mm,$\upsilon=0.3$,当其受轴向拉伸时,已知纵向线应变 $\varepsilon=0.001$,求此时的壁厚 t。

解:(1)证明:圆截面原周长 $S=\pi d$,变形后圆周长 $S'=\pi(d+\Delta d)$,故

$$\varepsilon_S=\frac{S'-S}{S}$$

$$=\frac{\pi(d+\Delta d)-\pi d}{\pi d}=\frac{\Delta d}{d}=\varepsilon_d$$

(2)求轴向拉力 P

横向应变

$$\varepsilon'=\frac{\Delta d}{d}=\frac{0.0025}{10}=0.25\times10^{-3}$$

纵向应变

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon'}{\upsilon}=\frac{0.00025}{0.3}=0.83\times10^{-3}$$

$$P=E\varepsilon A=210\times10^9\times0.83\times10^{-3}\times\frac{\pi\times(10^{-2})^2}{4}=13.68\text{ kN}$$

(3)求变形后的壁厚 t

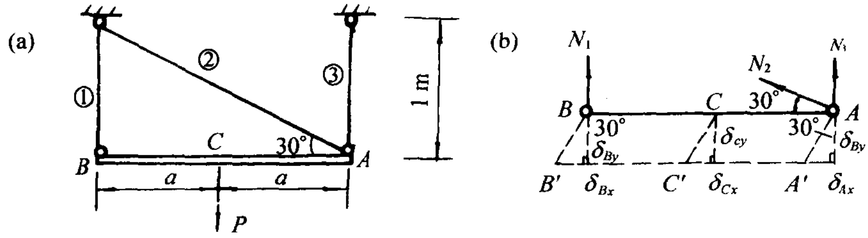
横向应变

$$\varepsilon'=-\varepsilon\upsilon=-0.001\times0.3=-0.3\times10^{-3}$$

变形后壁厚

$$t=\frac{D-d}{2}(1+\varepsilon')=\frac{120-60}{2}(1-0.3\times10^{-3})=29.99\text{ mm}$$

1-9 结构受力如图示,已知各杆的材料和横截面面积均相同。面积 $A=200\text{ mm}^2$,材料的弹性模量 $E=200$ GPa,屈服极限 $\sigma_S=280$ MPa,强度极限 $\sigma_b=460$ MPa。当 $P=50$ kN 时,求 C 点的水平位移、铅垂位移及结构的强度储备。



题 1-9 图

解:(1)由平衡条件

$$\sum M_A = 0:\quad -N_1\cdot 2a + P\cdot a = 0\qquad N_1 = \frac{P}{2} = 25\ \text{kN}$$

$$\sum X = 0:\qquad N_2 = 0$$

$$\sum M_B = 0:\quad N_3\cdot 2a - P\cdot a = 0\qquad N_3 = \frac{P}{2} = 25\ \text{kN}$$

(2)A 点的垂直位移

$$\delta_{Ay} = \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA} = \frac{25\times10^3\times1}{200\times10^9\times200\times10^{-6}} = 6.25\times10^{-4}\text{m}$$

B 点的垂直位移

$$\delta_{By} = \Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA} = \Delta l_3 = 6.25\times10^{-4}\ \text{m}$$

因为 $N_2=0$,则斜杆②长度不变,从而使节点 A 产生水平位移

$$\delta_{Ax} = \delta_{Bx} = \delta_{Ay}\cdot\tan30^\circ = \frac{\delta_{Ay}}{\sqrt3} = 3.61\times10^{-4}\text{m}$$

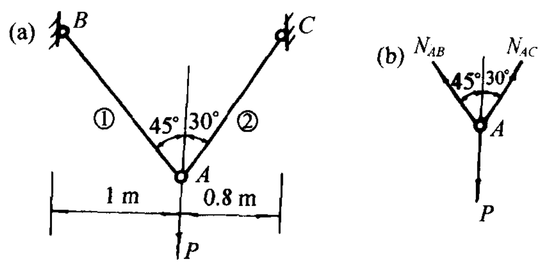
由变形协调关系图 b 可知:

$$\delta_{Cx} = \delta_{Ax} = 3.61\times10^{-4}\text{m}\qquad \delta_{Cy} = \delta_{Ay} = 6.25\times10^{-4}\text{m}$$

(3)结构的强度储备

$$n = \frac{\sigma_S}{N_{工作}} = \frac{\sigma_S}{N_1/A} = \frac{280\times10^6\times200\times10^{-6}}{25\times10^3} = 2.24$$

1-10 图 a 所示实心圆钢杆 AB 和 AC 在 A 点,以铰相连接,在 A 点作用有铅垂向下的力 $P=35$ kN。已知 AB 和 AC 杆的直径分别为 $d_1=12$ mm 和 $d_2=15$ mm,钢的弹性模量 $E=210$ GPa。试求 A 点在铅垂方向的位移。



题 1-10 图

解:(1)对于节点 A(图 b)

$$\sum X = 0:\quad N_{AB}\sin45^\circ = N_{AC}\sin30^\circ$$

$$N_{AC}=\sqrt{2}N_{AB} \quad ①$$

$\sum Y=0$：$N_{AB}\cos45^\circ+N_{AC}\cos30^\circ=P$

$$\sqrt{2}N_{AB}+\sqrt{3}N_{AC}=70\ \text{kN} \quad ②$$

联立①、②解得：

$$N_{AB}=18.2\ \text{kN} \qquad N_{AC}=25.7\ \text{kN}$$

(2)结构的应变能为

$$U=\frac{N_1^2l_1}{2E_1A_1}+\frac{N_2^2l_2}{2E_2A_2}$$

其中 $l_1=\sqrt{2}\ \text{m}, l_2=1.6\ \text{m}, A_1=\frac{\pi d_1^2}{4}, A_2=\frac{\pi d_2^2}{4}, E_1=E_2=E=210\ \text{GPa}$。

因结点 A 的铅垂位移 δ_{Ay} 与荷载 P 的方向相同，由弹性体的功能原理荷载 P 所做的功在数值上应等于该结构之应变能，即

$$\frac{1}{2}P\cdot\delta_{Ay}=U=\frac{1}{2E}\left(\frac{N_{AB}^2l_1}{A_1}+\frac{N_{AC}^2l_2}{A_2}\right)$$

$$\delta_{Ay}=\frac{1}{EP}\left[\frac{(18.2\times10^3)^2\times\sqrt{2}}{\frac{\pi}{4}\times12^2\times10^{-6}}+\frac{(25.7\times10^3)^2\times1.6}{\frac{\pi}{4}\times15^2\times10^{-6}}\right]$$

$$=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{10^{12}}{210\times10^9\times35\times10^3}\cdot\left[\sqrt{2}\left(\frac{18.2}{12}\right)^2+1.6\times\left(\frac{25.7}{15}\right)^2\right]$$

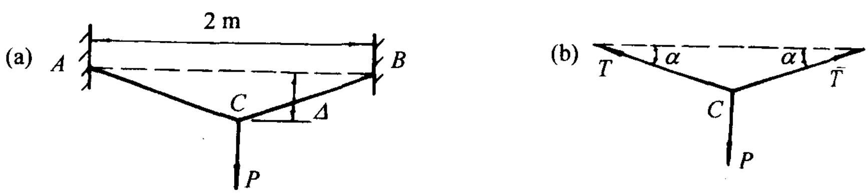
$$=1.365\times10^{-3}\ \text{m}$$

1-11 在图 a 所示 A，B 两点之间原来水平地拉着一根直径 $d=1$ mm 的钢丝。现在钢丝的中点 C 加一竖直荷载 P。已知钢丝由此产生的线应变为 $\varepsilon=0.003\,5$，其材料的弹性模量 $E=210$ GPa；钢丝的自重不计。试求：

(1)钢丝横截面上的应力。假设钢丝经过冷拉，在断裂前可认为符合虎克定律；

(2)钢丝在 C 点下降的距离 Δ；

(3)此时荷载 P 的值。



题 1-11 图

解：(1)求 σ(见图 b)

$$\sigma=E\varepsilon=210\times10^9\times0.0035=735\ \text{MPa}$$

(2)求钢丝在 C 点下降的距离 Δ

变形后 AC 段长度 $l_{AC}=1\times(1+\varepsilon)=1.0035$ m，又 $1^2+\Delta^2=l_{AC}^2$

$\therefore \Delta=\sqrt{l_{AC}^2-1}=\sqrt{1.007-1}=83.7$ mm

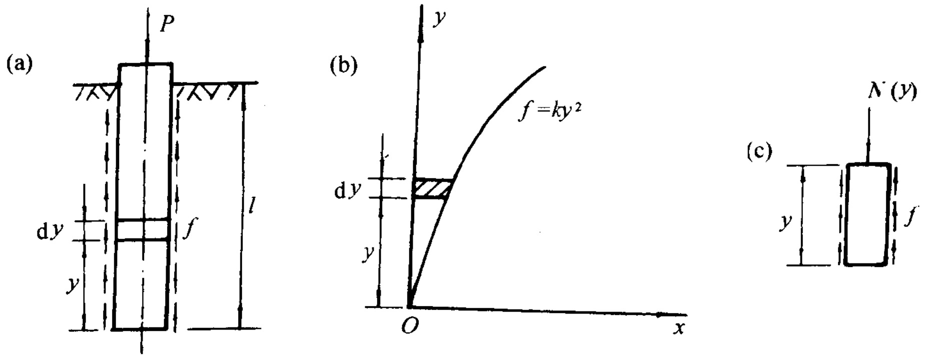
(3)求此时荷载 P

由节点 C 的平衡得 $2T\sin\alpha=P$，即

$$P=2\sigma\cdot A\cdot\frac{0.087}{1.0035}=2\times735\times10^6\times\frac{\pi\times(1\times10^{-3})^2}{4}\times\frac{0.087}{1.0035}=96.5\ \text{N}$$

1-12 图 a 所示为埋入土中深度为 l 的一根等截面木桩，在顶部承受荷载 P。这荷载完全由沿着木桩

的摩擦力 f 所平衡，f 按抛物线变化。试确定木桩的总缩短，以 P, l, E, A 表示。(提示：先根据平衡求出常数 k)



题 1-12 图

解：(1)求常数 k

木桩微段 dy 上的摩擦力(参考图 a)

$$dF = f dy = ky^2 dy$$

整个木桩的摩擦力

$$F = \int dF = \int_0^l ky^2 dy = \frac{kl^3}{3}$$

由平衡条件可知：

$$P = F = \frac{kl^3}{3} \qquad k = \frac{3P}{l^3}$$

(2)确定木桩的总缩短量

由图 c 可知，木桩任意截面上的轴力(压力)为

$$N(y) = \int_0^y dF = \int_0^y ky^2 dy$$

$$= \frac{k}{3}y^3 = \left(\frac{y}{l}\right)^3 P$$

杆中微段 dy 的缩短量为

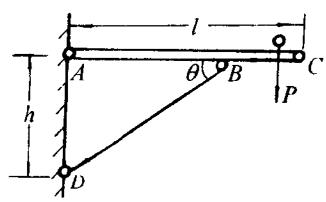
$$d(\Delta l) = \frac{N(y)dy}{EA}$$

所以木桩的总缩短量为

$$\Delta l = \int_0^l d(\Delta l) = \int_0^l \frac{N(y)dy}{EA}$$

$$= \int_0^l \frac{Py^3}{EAl^3}dy = \frac{Pl}{4EA}$$

1-13 图示三角形托架，AC 为刚性杆，BD 为斜撑杆，载荷 P 可沿水平梁移动。为使斜撑杆重量最轻，问斜撑杆与梁之间夹角应取何值？不考虑 BD 杆的稳定。



题 1-13 图

解：设 P 的作用线到 A 点的距离为 x，BD 斜杆受压力为 N_B，由平衡方程 $\sum M_A = 0$：

$$Px - N_B h\cos\theta = 0$$

得 $N_B=\dfrac{Px}{h\cos\theta}$。

当 $x=l$ 时，N_B 达最大值，即

$$N_{B\max}=\frac{Pl}{h\cos\theta}$$

为满足强度条件 $\sigma=\dfrac{N_{B\max}}{A}\leqslant[\sigma]$：

$$A\geqslant\frac{N_{B\max}}{[\sigma]}=\frac{Pl}{h[\sigma]\cos\theta}$$

BD 杆的体积应为

$$V\geqslant A l_{BD}=\frac{Pl}{h[\sigma]\cos\theta}\cdot\frac{h}{\sin\theta}=\frac{2Pl}{[\sigma]\sin2\theta}$$

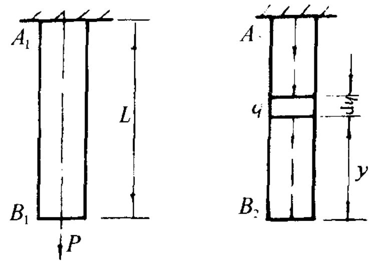
显然，当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$时，V 最小，亦即重量最轻。

1-14 两根杆 A_1B_1 和 A_2B_2 的材料相同，它们的长度和横截面积也相同。A_1B_1 杆承受作用在端点的集中荷载 P；A_2B_2 杆承受沿杆长均匀分布的荷载，其集度 $q=\dfrac{P}{l}$。试比较这两根杆内积蓄的应变能。

解：(1)对于 A_1B_1 杆

$$U_1=\frac{P^2L}{2EA}$$

(2)对于 A_2B_2 杆，在沿杆长均匀分布的载荷作用下，轴力 N 沿杆长变化，y 处横截面上轴力 $N(y)=q\cdot y=\dfrac{P}{L}y$，该处微段 $\mathrm{d}y$ 内积蓄的应变能 $\mathrm{d}U_2=\dfrac{N^2(y)\mathrm{d}y}{2EA}$，故整个杆内的应变能为：



题 1-14 图

$$U_2=\int_0^L\mathrm{d}U_2=\int_0^L\frac{\left(\frac{P}{L}y\right)^2\mathrm{d}y}{2EA}$$

$$=\frac{P^2}{2EAL^2}\int_0^L y^2\mathrm{d}y=\frac{P^2L}{6EA}$$

显然 $U_1=3U_2$。

1-15 一根承受轴向拉力的钢筋，原设计采用的材料为 Q275 钢，其直径 $d=20$ mm。今因仓库里缺该种材料，拟改用 Q235 钢的钢筋。库存 Q235 钢钢筋的直径计有 $d=16$ mm，19 mm，20 mm，22 mm，25 mm 可供选择。已知 Q235 钢的屈服极限 $\sigma_S=240$ MPa，Q275 钢的屈服极限 $\sigma_S=280$ MPa。在安全系数相同的要求下，试选择 Q235 钢钢筋的合适直径。

解：原采用的 Q275 钢钢筋的流动荷载 P_S 为

$$P_S=\sigma_S\cdot A=280\times10^6\times\frac{\pi}{4}\times20^2\times10^{-6}\ \mathrm{N}$$

当采用 Q235 钢钢筋替换时，在安全系数相同的前提下，流动荷载应相同，于是有：

$$240\times10^6\times\frac{\pi}{4}\times d^2\times10^{-6}=280\times10^6\times\frac{\pi}{4}\times20^2\times10^{-6}$$

$$d^2=20^2\times\frac{280}{240}=467\ \mathrm{mm}^2$$

$$\therefore d=21.6\ \mathrm{mm}$$

故选取直径为 22 mm 的 Q235 钢钢筋。

1-16 一桁架受力如图所示。各杆都由两个等边角钢组成。已知材料的许用应力$[\sigma]=170$ MPa，试选择 AC 杆和 CD 杆的截面型号。

解：(1)此结构为对称结构，所以

$$R_A = R_B = 220\ \text{kN}$$

(2)对于节点 $A\left(\sin\alpha = \dfrac{3}{5}\right)$，

$$\sum Y = 0:\quad R_A - N_{AC}\sin\alpha = 0$$

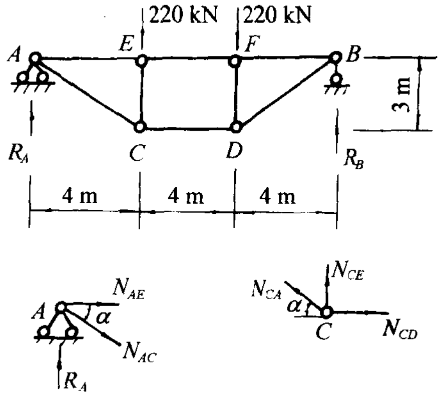
$$N_{AC} = \frac{R_A}{\sin\alpha} = 220 \times \frac{5}{3} = 367\ \text{kN}$$

(3)对于节点 C：

$$\because N_{CA} = N_{AC} = 367\ \text{kN},\quad \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sum X = 0:\quad N_{CA}\cdot\cos\alpha = N_{CD}$$

$$N_{CD} = 367 \times \frac{4}{5} = 294\ \text{kN}$$



题 1-16 图

(4)$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{2A_{AC}} = \frac{367 \times 10^3}{2A_{AC}} \leqslant 170 \times 10^6$$

$$A_{AC} \geqslant \frac{367 \times 10^3}{2 \times 170 \times 10^6} = 1.04 \times 10^{-3}\ \text{m}^2 = 10.4\ \text{cm}^2$$

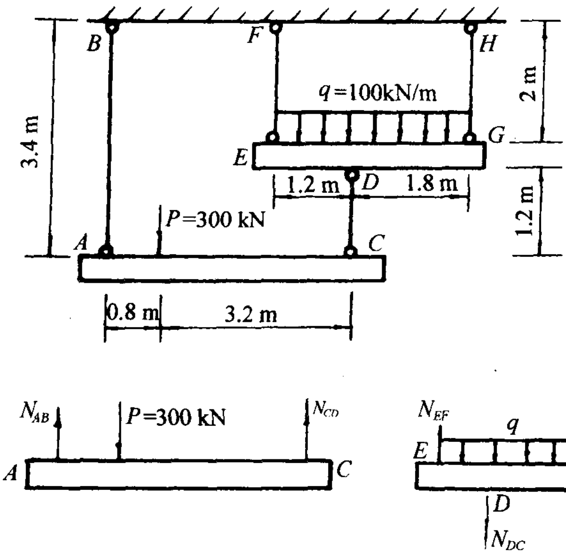
故对于 AC 杆选用 2 根 $80\times80\times7$ 等边角钢。

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{2A_{CD}} = \frac{294 \times 10^3}{2A_{CD}} \leqslant 170 \times 10^6$$

$$A_{CD} \geqslant \frac{294 \times 10^3}{2 \times 170 \times 10^6} = 8.66\ \text{cm}^2$$

故对于 CD 杆选用 2 根 $75\times75\times6$ 的等边角钢。

1-17　一结构受力如图所示，杆件 AB、CD、EF、GH 都由两根不等边角钢组成。已知材料的许用应力$[\sigma] = 170$ MPa，试选择各杆的截面型号，并分别求点 D, C, A 处的位移 $\Delta_D, \Delta_C, \Delta_A$。材料的弹性模量 $E = 210$ GPa，杆 AC 及 EG 可视为刚性。



题 1-17 图

解：(1)对于杆 AC 有

$$\sum M_A = 0:\qquad -P\times0.8 + N_{CD}\times4 = 0 \qquad N_{CD} = 0.2P = 60\ \text{kN}$$