

高等学校教材

电磁场与微波技术

赵家陞 黄尚锐

华中理工大学出版社

电磁场与微波技术

赵家陞 黄尚锐

责任编辑 李凤英

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 1/16 印张: 20.25 插页: 1 字数: 465 000

1990年12月第1版 1990年12月第1次印刷

印数: 1—3 500

ISBN 7-5609-0440-8/TN·16

定价: 4.08元

内 容 简 介

本书系高等学校工科电子类专业统编教材之一，主要讲述电磁场与微波技术的基本理论和基本分析方法。

全书共十二章。内容包括：静电场、恒定电场和磁场、时变电磁场、平面电磁波、波导、非无限长传输线上的电磁波——稳态下的分布参数电路、几种常用的传输线、微波网络基础、微波谐振器、微波元件、微波测量、天线基础。各章附有适当数量的习题，书末附有习题答案。

本书是为工科电子类非“电磁场与微波技术”专业编写的一本场与路相结合、理论与实际工程相结合的教材，也可供其他各电类专业的师生及工程技术人员参考。

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从1978年至1985年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻“努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神，我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制订了1986~1990年的“七五”（第三轮）教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿，是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐，由编审委员会（小组）评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处，希望使用教材的单位，广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前 言

本教材系按电子工业部的工科电子类专业教材1986—1990年编审出版规划，由电磁场与微波技术教材编审委员会电磁场理论编审小组征稿，推荐出版，责任编委钱景仁。

本教材由电子科技大学黄尚锐统编全稿，中国科技大学钱景仁担任主审。

本课程的参考学时数为85学时。全书共分十二章。第一至第四章为电磁场与电磁波，分别系统地阐述了静电场、恒定电场和磁场、时变电磁场以及平面电磁波的基本理论和分析方法。第五、六、七、九章则系统地阐述了沿传输线传播的电磁波的特性（包括色散波和无色散波的特性、行波和驻波的特性）；矩形波导管、圆柱形波导管及同轴线中场方程的求解、一些常用传输线的电气参数的求解及设计计算方法；微波谐振器的基本理论、电气参数及等效电路。第八、十、十一、十二章则分别系统地阐述了微波网络的基本理论及分析方法；微波元件的原理、应用及等效电路；微波测量的原理及测量方法；电磁波辐射及天线的理论。每章末尾均附有适当数量的习题，书末附有答案。本教材适合于工科电子类非“电磁场与微波技术”专业的本科生使用。书中第八及十、十一、十二各章相对比较独立，可依照不同专业的要求而作适当取舍，也可作为学生课外阅读的材料。

本教材由电子科技大学赵家陞编写第一、二、三、四、十二章，黄尚锐编写第五、六、七、九、十章，刘红编写第八章，王晦光编写第十一章。中国科技大学钱景仁教授对本书作了细致的审阅，电子科技大学全泽松教授对本书也提出过有益的意见与建议，在此一并表示诚挚的感谢。由于编者的水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编 者

目 录

第一章 静电场	(1)
一、电场 强度	(1)
二、电位 电位梯度	(5)
三、高斯定理	(8)
四、静电场的基本方程	(17)
五、静电场的边界条件	(19)
六、电位的泊松方程和拉普拉斯方程	(20)
七、唯一性定理	(21)
八、直角坐标系中的分离变量法	(22)
九、圆柱坐标系中的分离变量法	(28)
十、镜象法	(31)
十一、复变函数法	(35)
十二、电容	(37)
十三、静电场能量	(40)
习题	(42)
第二章 恒定电流的电场和磁场	(47)
一、恒定电场	(47)
二、磁感应强度	(51)
三、磁通连续性原理	(53)
四、真空中的安培环路定律	(54)
五、矢量磁位	(55)
六、磁介质的磁化 磁场强度	(58)
七、恒定磁场的基本方程和边界条件	(61)
八、标量磁位	(62)
九、电感	(63)
十、磁场能量	(67)
习题	(68)
第三章 时变电磁场	(72)
一、电磁感应定律	(72)
二、位移电流	(73)
三、麦克斯韦方程组	(74)
四、时变电磁场的边界条件	(75)
五、坡印廷定理和坡印廷矢量	(77)
六、时谐场	(78)
七、波动方程 复介电常数	(81)
八、标量位和矢量位	(82)
习题	(84)

第四章 平面电磁波	(87)
一、理想介质中的均匀平面波	(87)
二、平面波的极化	(91)
三、有损耗媒质中的均匀平面波	(92)
四、对平面分界面的垂直入射	(95)
五、对平面分界面的斜入射	(99)
习题	(104)
第五章 波导	(107)
一、任意传输线的波动方程	(107)
二、导行电磁波的分类	(108)
三、沿波导传输的电磁波的普遍特性	(110)
四、矩形波导管中的电磁场分量	(115)
五、 TE_{10} 波的场结构与管壁电流	(119)
六、色散波与无色散波的关系——色散现象的物理解释	(122)
七、 TE_{10} 模的功率传输与损耗	(125)
八、矩形波导的尺寸选择	(129)
九、圆柱形波导	(129)
习题	(137)
第六章 非无限长传输线上的电磁波——稳态下的分布参数电路	(139)
一、概述	(139)
二、电报方程及其解	(139)
三、传播常数与特性阻抗	(142)
四、传输线的阻抗	(143)
五、反射系数、驻波系数和行波系数	(145)
六、传输线上的行波、全驻波与混合波	(147)
七、传输功率及传输线的功率容量	(150)
八、传输线的功率损耗与效率	(152)
九、圆图及其应用	(153)
习题	(158)
第七章 几种常用的传输线	(161)
一、概述	(161)
二、同轴线	(161)
三、带状线	(168)
四、微带传输线	(172)
五、耦合微带线	(179)
习题	(189)
第八章 微波网络基础	(190)
一、微波网络的解析模型	(190)
二、等效模式电压和模式电流	(191)
三、微波网络的电路特性参数	(195)
四、微波网络的工作特性参数	(199)
五、微波二端口网络的外特性参量	(205)

习题	(207)
第九章 微波谐振器	(210)
一、概述	(210)
二、TEM波传输线式谐振器	(211)
三、波导谐振器	(215)
四、圆柱形谐振器中的常用模式	(221)
五、微波谐振器的有载品质因数和外界品质因数	(223)
六、微波谐振器的等效电路	(224)
习题	(228)
第十章 微波元件	(230)
一、概述	(230)
二、波导中的电抗元件——膜片与销钉	(231)
三、可变电抗——波导和同轴线中的抗流活塞	(233)
四、抗流接头	(235)
五、波导中的电阻性元件——吸收式衰减器与匹配负载	(236)
六、波导的串联分支与并联分支 波导的桥式电路	(237)
七、定向耦合器与环形电桥	(241)
八、微带的不均匀性	(244)
九、微带集成电路元件	(245)
十、微带集成电路元件的应用举例——微带低通滤波器的结构实现	(249)
十一、阻抗匹配器与阻抗匹配方法	(251)
习题	(258)
第十一章 微波测量	(260)
一、概述	(260)
二、微波功率的测量	(262)
三、微波频率与波长的测量	(266)
四、驻波的测量	(269)
五、反射的测量	(272)
六、衰减和相移的测量	(274)
七、微波网络参数的全面测量	(276)
八、Q值的测量	(278)
习题	(280)
第十二章 天线基础	(282)
一、基本振子的辐射	(282)
二、天线的电参数	(287)
三、细线天线	(288)
四、天线阵	(290)
五、面天线	(291)
习题	(295)
附录 I 重要的矢量公式	(296)
附录 II 我国矩形与扁矩形波导管的标准尺寸	(297)
附录 III 常用同轴线参数表	(299)

附录Ⅳ 常用介质材料的主要性能	(302)
参考文献	(303)
习题答案	(304)

第一章 静 电 场

带电荷的物体周围存在着电场。相对于观察者是静止的、其电荷量不随时间变化的带电体产生的电场称为静电场。电场是统一的电磁场的一个方面，它的存在表现为对被引入场中的试验电荷有机械力的作用。

本章首先介绍静电场的基本物理量——电场强度矢量 E ，根据库仑定律导出点电荷的电场强度公式；再应用叠加原理得出离散点电荷系及电荷连续分布时的电场计算公式。讨论静电场的做功特性，引入电位；介绍表征静电场通量特性的高斯定理。归纳出静电场的基本方程，应用旋度、散度的概念导出基本方程的微分形式；再由基本方程导出电位的泊松方程或拉普拉斯方程，进而讨论静电场边值问题的几种解法。最后还讨论了电容的计算和静电场能量问题。

应该指出，本章的一些分析方法不仅适用于静电场，也是分析恒定电流的电场、磁场以及时变电磁场的基础。

一、电场强度

带电体的周围存在着电场。两个带电体之间的作用力是一个带电体的电场对另一个带电体的作用力；同样，另一个带电体的电场也对这个带电体有作用力。也就是说，带电体之间的相互作用力是通过电场传递的。电场的性质可以通过一个称为试验电荷的带电体在场中各点所受的力来描述。

电场对单位正电荷的作用力称为电场强度。其表示式为

$$E = \frac{F}{q_0} \quad (1.1)$$

式中， q_0 为试验电荷的电荷量，要求它的值必须很小，以免由于引入 q_0 而影响被研究电场的场源关系； F 为电场对试验电荷的作用力。 E 是一个矢量函数，它的大小和方向仅与试验电荷所在点的电场性质有关。本书采用国际单位制， F 的单位是牛顿(N)、 q_0 的单位是库仑(C)、 E 的单位是伏/米(V/m)。

库仑定律给出了真空中两个点电荷间的作用力为

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} a_R = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^3} R \quad (1.2)$$

式中， $a_R = R/R$ —— q_1 指向 q_2 的单位矢量， $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ 是由于采用国际单位制而得的比例常数， $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{F/m} \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{F/m}$ 是真空的介电常数。

根据库仑定律即可得出离点电荷 q 的距离为 R 的点的电场强度为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} a_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} R \quad (1.3)$$

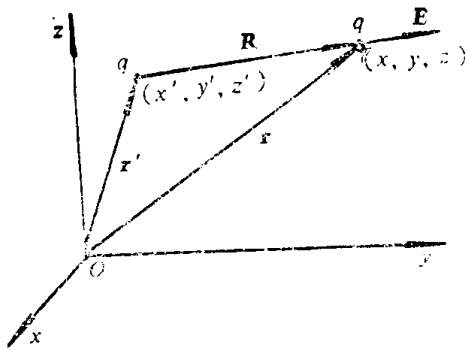


图1.1 点电荷的电场

通常，点电荷 q 所在点（称为源点）并不一定与坐标原点重合，如图1.1所示。我们用加撇的坐标 (x', y', z') 或 \mathbf{r}' 表示源点的位置；用不加撇的坐标 (x, y, z) 或 \mathbf{r} 表示试验电荷所在点（称为场点）的位置。

距离矢量为

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = R\mathbf{a}_R \quad (1.4)$$

式中

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

则(1.3)式可表示为

$$\mathbf{E} = \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.5)$$

这是静电学中一个重要的基本公式。式中的源点坐标 (x', y', z') 或 \mathbf{r}' ，在场源电荷给定时就为常数， \mathbf{E} 就是场点坐标 (x, y, z) 或 \mathbf{r} 的函数。另外，该公式还表明，一个指定的场点的电场强度与场源电荷量成正比。场与场源之间的这种线性关系，使我们可以根据叠加原理来计算离散点电荷系的电场强度。

设静电场是由置于不同位置的 n 个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 产生的，场中一点的电场强度就等于各个点电荷单独在该点产生的电场强度 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ 的矢量和，即

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i^2} \mathbf{a}_{R_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3} \quad (1.6)$$

当考察电荷的宏观效应时，可以把实际上是离散分布的电荷近似地看作连续分布而得到满意的结果。求连续分布电荷产生的电场，可将电荷分布区域内每个电荷元的贡献积分而得到。按经典电磁理论的观点，一个电荷集合体是可无限分割成小的单元的。这样可定义电荷体密度为

$$\rho = \lim_{\Delta\tau' \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\tau'} = \frac{dq}{d\tau'} \quad (1.7)$$

ρ 的单位是库/米³(C/m³)。

式(1.7)中， $\Delta\tau'$ 是带电体的体积元（如图1.2所示）。当 $\Delta\tau'$ 很小时，体积元的电荷量 $dq = \rho d\tau'$ 可视为点电荷，它在场点 P 的电场强度为

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho d\tau'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad (1.8)$$

则体积 τ' 内的全部电荷在 P 点的电场强度 \mathbf{E} 等于

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \frac{\rho}{R^2} \mathbf{a}_R d\tau' \quad (1.9)$$

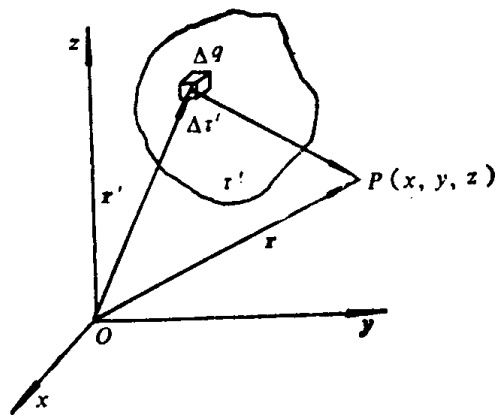


图1.2 体电荷的电场

上式的积分是矢量求和。式中的 ρ 是源点 (x', y', z') 的电荷体密度， R 和 $d\tau'$ 也都是源点坐标的函数，体积分是对源点坐标进行的，积分结果是场点坐标 (x, y, z) 的函数。

在某些物理问题中，电荷可认为是连续分布在一个表面薄层或一条细线上，电荷密度分别为电荷面密度 ρ_s 和电荷线密度 ρ_l ，表示为

$$\rho_s = \lim_{\Delta S' \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S'} = \frac{dq}{dS'} \quad (1.10)$$

$$\rho_l = \lim_{\Delta l' \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l'} = \frac{dq}{dl'} \quad (1.11)$$

ρ_s 的单位是库/米² (C/m²), ρ_l 的单位是库/米(C/m)。

由面电荷、线电荷产生的电场为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s}{R^2} \mathbf{a}_R dS' \quad (1.12)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \frac{\rho_l}{R^2} \mathbf{a}_R dl' \quad (1.13)$$

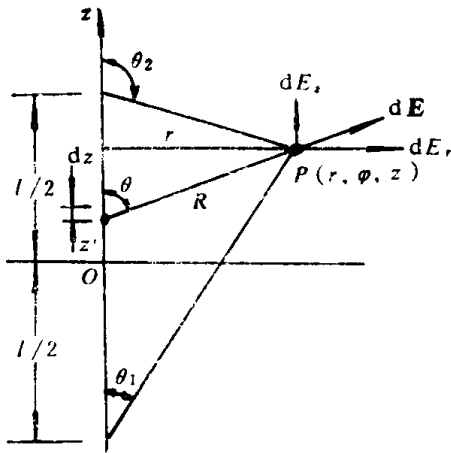


图1.3 有限长线电荷的电场

可以用电力线来形象地表示电场强度矢量的分布。电力线上每点的切线方向就是该点 \mathbf{E} 的方向, 电力线的密度正比于 \mathbf{E} 的大小。

例1.1 长度为 l 的直导线上带有均匀分布的正电荷, 线密度为 ρ_l , 求线外空间任一点的电场强度。

解 设线电荷沿 z 轴放置, 如图1.3所示。采用圆柱坐标系, 坐标原点在直导线的中点。由于轴对称性, 电场与方位角 φ 无关。单元线电荷 $dq = \rho_l dz'$ 的坐标为 $(0, 0, z')$, 它在场点 $P(r, \varphi, z)$ 产生的电场的三个分量为

$$dE_r = dE \sin\theta = \frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin\theta$$

$$dE_\varphi = 0$$

$$dE_z = dE \cos\theta = \frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta$$

式中, R 、 θ 、 z' 都是变量, 由图可见

$$R = \frac{r}{\sin\theta} = r \csc\theta$$

$$z' = z - r \cot\theta, \quad dz' = r \csc^2\theta d\theta$$

故电场的两个分量可表示为

$$dE_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l r \csc^2\theta d\theta \sin\theta}{r^2 \csc^2\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l \sin\theta d\theta}{r}$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l r \csc^2\theta d\theta \cos\theta}{r^2 \csc^2\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l \cos\theta d\theta}{r}$$

整个带电直导线在 P 点产生的电场的两个分量分别为

$$E_r = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$E_z = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

若带电直导线是无限长, 则有 $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, 故得

$$E_r = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad E_z = 0$$

可见，无限长直线电荷的电场只有径向分量，其大小与场点到直线的距离成反比，即

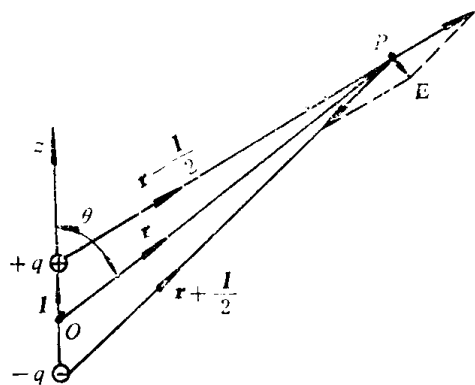


图1.4 电偶极子

$$E = a_r \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}$$

例1.2 计算电偶极子的远区场。

解 电偶极子是一对等值异号的点电荷相距一个小的距离 l 所组成的系统。设偶极子的中心与球坐标系的原点重合，并使 l 与 z 轴重合，如图1.4所示。场点 $P(r, \theta, \varphi)$ 处的电场强度等于点电荷 $+q$ 和 $-q$ 的电场强度的矢量和，即

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r - \frac{l}{2}}{\left| r - \frac{l}{2} \right|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r + \frac{l}{2}}{\left| r + \frac{l}{2} \right|^3} \quad (1.14)$$

对于远离电偶极子的点，有 $r \gg l$ ，则上式中

$$\begin{aligned} \left| r - \frac{l}{2} \right|^{-3} &= \left[\left(r - \frac{l}{2} \right) \cdot \left(r - \frac{l}{2} \right) \right]^{-3/2} \\ &= \left[r^2 - r \cdot l + \frac{l^2}{4} \right]^{-3/2} \approx r^{-3} \left[1 - \frac{r \cdot l}{r^2} \right]^{-3/2} \end{aligned}$$

把上式中的 $\left[1 - \frac{r \cdot l}{r^2} \right]^{-3/2}$ 按二项式定理展开，略去高次项，则上式简化为

$$\left| r - \frac{l}{2} \right|^{-3} \approx r^{-3} \left(1 + \frac{3 r \cdot l}{2 r^2} \right)$$

同样 $\left| r + \frac{l}{2} \right|^{-3} \approx r^{-3} \left(1 - \frac{3 r \cdot l}{2 r^2} \right)$

故(1.14)式可简化为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(3r \frac{r \cdot l}{r^2} - l \right) \quad (1.15)$$

引入电偶极矩 \mathbf{p} ，定义为

$$\mathbf{p} = ql \quad (1.16)$$

即电偶极矩 \mathbf{p} 的大小等于乘积 ql ，方向由 $-q$ 指向 $+q$ 。因此，(1.15)式可表示为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(3 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{p} \right)$$

电偶极子是沿 z 轴放置的，故

$$\mathbf{p} = a_z p = p(a_r \cos\theta - a_\theta \sin\theta)$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = r p \cos\theta$$

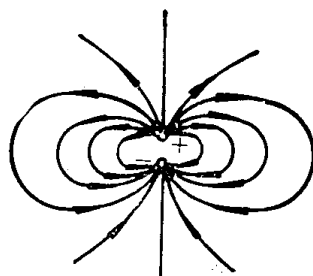


图1.5 电偶极子的电力线

则

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\mathbf{a}_r 2\cos\theta + \mathbf{a}_\theta \sin\theta) \quad (1.17)$$

可见，电偶极子的电场 \mathbf{E} 中没有 \mathbf{a}_θ 分量，电力线全都分布在子午面上，且任一子午面上的场图都是相同的，如图1.5所示。在研究电介质中的电场时，电偶极子是个很重要的概念。

二、电位 电位梯度

电场强度 \mathbf{E} 是一个矢量，由已知的电荷分布计算电场分布是矢量运算。本节中我们利用电场力对电荷做功的性质，引入标量电位函数，进而导出电场强度和电位的关系，用电位梯度表示电场强度。

1. 电位

当试验电荷 q_0 从电场中的 A 点沿某路径移到 B 点（见图1.6(a)）时，电场力要做功。 q_0 位移 $d\mathbf{l}$ 时，电场力所做的功为

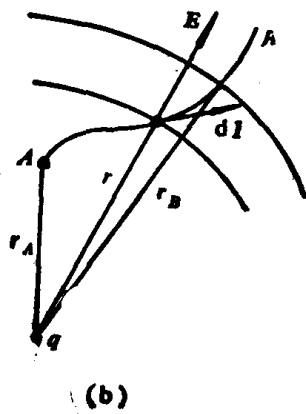
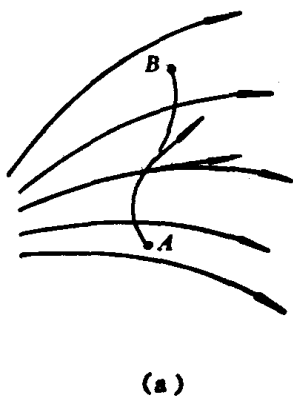


图1.6 $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 与路径无关

(a) q_0 从 A 移动到 B 电场力做功；

(b) 点电荷 q 产生的电场

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = F dl \cos\theta = q_0 E dl \cos\theta$$

把 q_0 从 A 移到 B ，电场力所做的总功为

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \int E dl \cos\theta \quad (1.18)$$

若电场是由点电荷 q 产生的，如图1.6(b)所示，有

$$dW = q_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot d\mathbf{l} = q_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dl \cos\theta = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

故
$$W = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

上式表明，在点电荷的电场中， q_0 从场中一点 A 沿某路径移动到另一点 B 时，电场力所做的功仅决定于起点 A 的位置 r_A 和终点 B 的位置 r_B ，而与路径无关。应用叠加原理，上述结论可推广到离散点电荷系的电场以及体电荷、面电荷、线电荷的电场。也就是说，在静电场中把电荷 q_0 从一点移动到另一点，电场力所做的功与移动的路径无关，只决定于移动的起止点的位置。

置。这是静电场的重要性质之一。

电场中A、B两点之间的电压,定义为把单位正电荷由A点移动到B点电场力所做的功,即

$$U_{AB} = \frac{W}{q_0} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.19)$$

在国际单位制中,电压的单位是伏(V)。

由电压的定义,在电场中沿两条不同的路径AmB和AnB求E的积分,应有

$$\int_{A \rightarrow B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A \rightarrow B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

上式可写成

$$\int_{A \rightarrow B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{A \rightarrow B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\int_{A \rightarrow B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{B \rightarrow A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

即

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.20)$$

上式表明,在静电场中沿任一闭合路径移动单位正电荷一周,电场力所做的功为零,电场无能量变化,故静电场是守恒场。

在电压的定义中,以某个固定点P作为终点,则电压就只是起点坐标的函数,称为电位,表示为

$$\phi_A = \int_A^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.21)$$

显然,电位的物理含义是电场力移动单位正电荷从A点到参考点P时所做的功。参考点的电位为零。在给定的电场中,参考点一经选定,场中各点的电位就有完全确定的值。应该指出,电位参考点的选择,原则上是任意的。但应注意所选定的参考点应使电位表达式最简单,且使电位表达式有意义。通常是当电荷分布在有限区域时,选无限远点为电位参考点。

静电场中,电压就是两点的电位差,即

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_P^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_A^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_B^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \phi_A - \phi_B \end{aligned} \quad (1.22)$$

对于置于原点的点电荷,离它r处的电位为

$$\begin{aligned} \phi &= \int_r^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^P \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^P \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_P} \end{aligned}$$

若令 $r_P = \infty$,即以无限远处为电位参考点,则得

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.23)$$

若场源电荷为n个点电荷,则电位为

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \quad (1.24)$$

体电荷、面电荷、线电荷的电位可根据点电荷的电位公式应用叠加原理得到

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \frac{\rho}{r} d\tau' \quad (1.25)$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s}{r} dS' \quad (1.26)$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l}{r} dl' \quad (1.27)$$

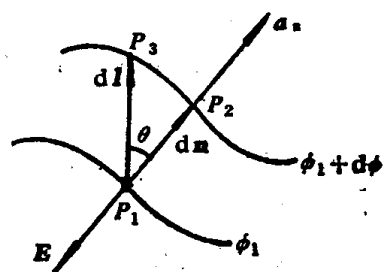


图1.7 电位梯度

式中, r 是源点到场点的距离。

2. 电位梯度

前面提到的电位的定义式子给出了电场强度 \mathbf{E} 和电位 ϕ 的积分关系, 电位梯度将给出 \mathbf{E} 和 ϕ 的微分关系。

图1.7表示出电位分别为 ϕ_1 和 $\phi_1 + d\phi$ 的两个等位面, 这里的 $d\phi$ 是电位 ϕ 的小增量。点 P_1 在电位为 ϕ_1 的面上; 点 P_2 在电位为 $\phi_1 + d\phi$ 的面上且在法线矢量 $d\mathbf{n}$ 上; 点 P_3 与 P_2 在同一面上且靠近 P_2 点, 又位于另一矢量 $d\mathbf{l}$ 上。

显然, 对同样的增量 $d\phi$, 沿 $d\mathbf{n}$ 方向电位的空间变化率 $\frac{d\phi}{dn}$ 最大。因为 $\frac{d\phi}{dl}$ 的大小取决于 $d\mathbf{l}$ 的方向, 故 $\frac{d\phi}{dl}$ 称为电位对 l 的方向导数。我们把表示一个标量函数最大空间增长率的大小和方向的矢量定义为该标量函数的梯度, 并表示为

$$\text{grad}\phi = \mathbf{a}_n \frac{d\phi}{dn} \quad (1.28)$$

沿方向 $d\mathbf{l}$ 的方向导数是

$$\frac{d\phi}{dl} = \frac{d\phi}{dn} \frac{dn}{dl} = \frac{d\phi}{dn} \cos\theta = \frac{d\phi}{dn} \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_l = (\text{grad}\phi) \cdot \mathbf{a}_l$$

上式表明, 电位沿 \mathbf{a}_l 方向的空间增长率等于电位梯度在该方向上的分量。

按电压的定义, 应有

$$d\phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -E_l dl$$

故

$$E_l = -\frac{\partial\phi}{\partial l} \quad (1.29)$$

上式表明, 电场强度 \mathbf{E} 在某方向 $d\mathbf{l}$ 上的投影 E_l 等于电位对 l 的方向导数的负值。由此可得到直角坐标系中 \mathbf{E} 的三个分量分别为

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

故

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{a}_x E_x + \mathbf{a}_y E_y + \mathbf{a}_z E_z = -\left(\mathbf{a}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \\ &= -\frac{\partial\phi}{\partial n} \mathbf{a}_n = -\text{grad}\phi \end{aligned} \quad (1.30)$$

采用矢量偏微分算符 ∇ (读作del), 电位梯度在直角坐标系中的表达式可写为

$$\text{grad}\phi = \nabla\phi = \mathbf{a}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (1.31)$$

(1.30)式可表示为

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (1.32)$$

即电位梯度是与电场强度大小相等、方向相反的一个矢量。如图1.7中 \mathbf{E} 指向电位减小最快的方向。

电位梯度在圆柱坐标系和球坐标系中的表示式分别为

$$\nabla\phi = \mathbf{a}_r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \mathbf{a}_z \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (1.33)$$

$$\nabla\phi = \mathbf{a}_r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \quad (1.34)$$

例1.3 求电偶极子 (见图1.4) 远区的电位分布。

解 图1.4中, 场点 P 到两个点电荷的距离分别为

$$r_1 = \left| \mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}}{2} \right| = \left[r^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 - r l \cos\theta \right]^{1/2}$$

$$r_2 = \left| \mathbf{r} + \frac{\mathbf{l}}{2} \right| = \left[r^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 + r l \cos\theta \right]^{1/2}$$

因 $r \gg l$, 故将 r_1 、 r_2 用二项式公式展开并略去高次项, 得

$$r_1 \approx r - \frac{l}{2} \cos\theta$$

$$r_2 \approx r + \frac{l}{2} \cos\theta$$

据(1.24)式得

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2} \approx \frac{q l \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.35)$$

代入 $\mathbf{p} = ql$, 得

$$\phi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.36)$$

在球坐标系中, 由 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ 得

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\mathbf{a}_r 2\cos\theta + \mathbf{a}_\theta \sin\theta) \quad (1.37)$$

上式与(1.17)式完全相同, 但运算过程简单得多, 完全避免了位置矢量运算, 这也是引入标量电位函数的优点之一。

三、高斯定理

1. 真空中的高斯定理

前节研究了静电场做功的特点, 证明了电场强度的闭合线积分等于零, 得到静电场是守恒场的结论。本节讨论静电场的另一个特性——通量特性。