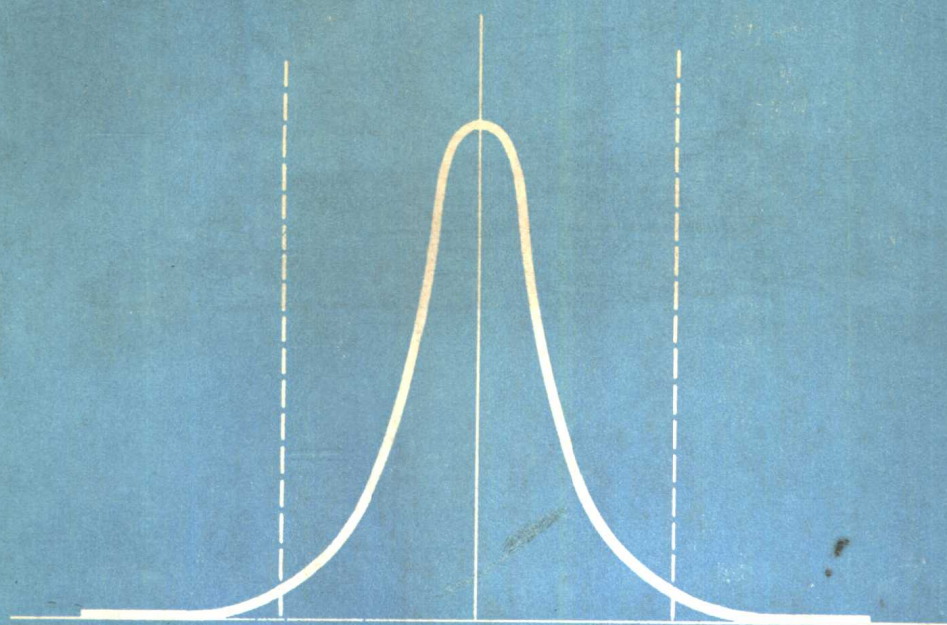




教育统计

—附数据处理—

[美]D. 怀特 著 叶佩华 译 陈一百 校

人民教育出版社

教 育 统 计

—附数据处理—

〔美〕D. 怀特 著
叶佩华 译 陈一百 校

人 民 教 育 出 版 社

教 育 统 计

—附数据处理—

〔美〕D. 怀特 著

叶佩华 译 陈一百 校

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 19.5 插页 1 字数 430,000

1980年7月第1版 1981年1月第1次印刷

印数 1—6,000

书号 7012·0145 定价 1.50 元

译者说明

我们在译校中发现本书英文原著中有一些错误。正文中的错误我们已在译文中作了更正。图和习题答案中的错误,由于图和习题答案是照英文原著影印制版的,不便改动,故未更正。现将这些错误指出或更正如下,供读者参考。

1. 48 页图 3-2 的上半部分不准确,读者可根据书中的数据自己更正。
2. 163 页图 9-1 农村范围①中缺 35 号取样单位。
3. 259 页 column 下面的四个序号 1、2、3、4 与所指数列未对正,应分别向左移。
4. 285 页 3.3 题的图不准确,读者可根据图下的数据自己更正。
5. 289 页 3.21 题 K_{10} 的答数应改为: $16.4 - 21.9785 = -5.5785$
6. 297 页 6.12 题中的两个数据应改为:

$$A_2 \cap B_2: \frac{(11 - 10.66)^2}{10.66} = \frac{0.116}{10.66} = .01 \quad A_3 \cap B_4: \frac{(2 - 3.42)^2}{3.42} = \frac{2.02}{3.42} = .59$$

7. 297 页 6.16 题最后的 $d. 25 < x$ 应改为 $d. 256 < x$
8. 298 页 7.1 题的答数应改为 338.64。
9. 298 页 7.6 题第 2 行应改为:

$$F_{[k-1, k(n-1)], .95} = F_{[3, 18], .95} = 2.87$$

10. 298 页 7.9 题 $3 = 1.8$ 应改为 $\epsilon_{13} = 1.8$
11. 299 页 7.12 题第 2 行应改为:

$$91.6(1.781/5)^2 = 91.6(.127); n = 11.6 \cong 12; n - n_0 = 7$$

12. 299 页 7.14 题 $s_1^2 = 42$ 应改为 $s_1^2 = 22$
13. 302 页 8.12 题的答案应为:

$$\begin{array}{lll} SS_R = 678.29 & SS_Y = 1254 & SS_E = 575.71 \\ n - 2 = 23 & MS_E = 25.03 & F = 27.10 \end{array}$$

14. 303 页 9.3 题数据更正如下:

$$b. C_{12} = -11.33$$

$$\begin{array}{llll} c. \epsilon_{113} = 29.00 & \epsilon_{122} = -37.00 & \epsilon_{131} = 19.00 & \epsilon_{132} = 3 \\ \epsilon_{212} = 5.67 & \epsilon_{213} = 1 & \epsilon_{221} = 4 & \epsilon_{223} = -10 \\ \epsilon_{231} = -16 & \epsilon_{232} = -12.33 & & \end{array}$$

序 言

本书是对具有以下特征的人来介绍统计学的：

1. 他们的数学基础较差(最多只有高中一年级的代数知识)。
2. 他们希望能够使用一些统计工具(与那些只想知道统计学是干什么的人对比)。
3. 他们的研究兴趣主要是在教育方面，而且他们的研究方案所涉及的范围是比较多的人群，而不是限于几个对象的小规模实验室研究。
4. 他们希望持有某些基本工具，以便利用计算机中心设备来进行统计分析。

为了满足上述人们的需要，我们针对上述情况，采取了如下的方法。

1. 在教材中讲授一些必要的基本数学知识如：算术、初等代数和几何等。
2. 通过书后附录(W. R. Borg 所搜集的大量原始教育资料)，发展使用统计工具的能力。要求学生完成如下步骤来使用统计工具：

- a. 把研究问题翻译为统计专门名词。
- b. 作出取样方案。
- c. 运用取样方案收集数据(根据附录中的原始数据)。
- d. 分析数据。
- e. 根据原定的研究问题解释数据。

上述步骤是任何研究人员在设计和执行研究方案中所必须完成的；也是作为应用统计课程的所谓“故事性问题”(story problem)的重要组成部分。把重点放在“故事性问题”，应使那些谨慎的学生在使用统计工具完成自己的研究计划时，获得熟练技巧。对于研究人员来说，最重要的是对所用的方法的涵义的理解。

3. 为了维护学生的兴趣，以教育问题为教材的焦点；只是为了帮助解决这些问题时才引进必要的统计方法。希望这种方式能满足那些着重教育而不着重统计学本身的人所好，其所以较早地提供教育资料，不仅因为学生们有过一定的经历，而且因为他们对这种资料可能具有内在的兴趣。对于非数学家来说，把应用数学嵌入他真正关心的题材之中，它会有更大的吸引力的。

4. 为了提供使用计算机中心设备的训练，正如对待数学基本知识一样，在需要时才讲授有关数据处理的原理。附录 K-N 是统计方法所用到的计算机程序。这些都是美国“标准学会”(standard Institute)的“公式翻译”(FORTRAN)语言，是可以在多数的计算机中心使用的。

关于所提供的几种计算机程序，有必要向教授本课程的教师说几句话。各个计算机中心之间的差别之大，以致在第一次试行一个独特的活动时，不一定能立即作出成功的运转。对程序作较小的改变往往是意料中的事。最好的办法是，在学生应用这些程序之前，先把要采用的程序提交你们地区的程序员，让他对程序卡片叠进行穿孔，并就你们拥有的装备进行操作。然后将计算

机中心所制的它的卡片叠复制品分配给学生应用。

若你们地区的计算机中心另有一组简单易行的统计程序,你可以就此进行选择,这样一组程序应该带有明确的可行的指令,才能使你的学生知道如何使用这些程序。如果你碰上了这种好运,你可以——而且应该——不顾附录的程序而采用你们地区计算机中心所提供的程序。不管怎样,建议不要采用那种超过你们需要的太复杂的程序,因为那种过于复杂的程序往往是难于使用的,而且会使那些第一次使用计算设备的初学者产生厌烦情绪。

这里应该强调的是,多数“体验性作业”(Experiences with Data)中所提出的问题都没有什么独一无二的答案。好象“设计并执行关于确定学生品质(morale)受学校影响的程度”这样一个问题,每个学生可有各自不同的书面作业。学生必须以合用的测度来定义“品质”,决定这样一些情况,如:是否学生在品质方面的差异是由于社会经济差异的结果而不是学校影响的结果,决定统计方法,搜集、分析和解释自己的资料。各个学生在执行上述的步骤中,不可避免地各行其是,而那些差别很大的书面作业,在质量上往往是相等地高。顺便提一句,这样一种汇报课外项目式的书面作业,实际上并不比对常规作业所花费的时间多——而这种作业却是更有趣味的。

本教材包含的资料足够一学年的教学工作量(每周二次上课和一次实验,实验课用来汇报和讨论“体验性作业”中的问题),由于体验性作业在学生学习本书的进展中有较大的作用,而且比较费时,本书前面的一些章节的进度可以比以后的章节快一些。

如若想作为一个学期的教材,第一至第五章提供了一种逻辑体系的题材(略去带有*的节目)。在整个教材中,凡有*的节目都可以略去而不致影响资料的连续性。第六,第七和第八各章是自成体系和各自独立的;在教完第五章以后可以接着教第六、第七或第八章中的任何一章。第九章则要在教完第七、第八两章以后才开始。有“+”符号的练习主要是使学生熟悉有关某些统计推断含义的取样问题。有“!”符号的练习则要求教师就全班学生的计算结果组织协作。这种额外努力的作用是,使学生加深理解那些初学者感到苦恼的概念如:置信区间,第一类错误、第二类错误以及其他概念等。

在每一章的末尾,有一节关于各个练习的答案(有“+”和“++”符号的除外)^①。因为,有“+”符号的练习没有固定的答案,因而只是在某些情况下给出样本性的答案,鼓励读者很好地利用这些节目;常常是,有些在各章正文中没有提到的计算捷径却在这里给出。

D. 怀特
(David White)

^① 为了印刷的原因,改将每一章的练习答案集中放在译本的附录之后。——译者注

目 录

译者说明

序言	1
第一章 随机取样 附数学预备知识	1
简单的随机取样	3
一些算术预备知识	5
代数式	11
负数	13
不等式	15
对数	18
插值	23
第二章 总体和它的特征	25
总体的参数	25
总体参数的估计量	31
累积频率分布	34
正态频率分布	37
连续分布	42
本章复习	45
第三章 一个总体的统计推断	46
引言	46
置信区间	52
百分位数及其用处	59
相关系数	60
关于总体相关系数的统计推断	65
体验性作业	66
本章复习	67
第四章 统计数据处理	69
高速计算系统	69
自动编码器	73
计算机系统的应用	74
预备数据卡片	76
两种有用的统计程序	82
程序 1: 计算平均数、方差、标准差、相关系数的程序	82
程序 2: 求散布图的程序	84
本章复习	86
第五章 关于比较两个小组的推断	87
引言	87

统计推断.....	94
数据处理.....	107
体验性作业.....	107
本章复习.....	108
第六章 类型数据	109
问题的描述.....	109
概率导论.....	109
统计推断.....	117
数据处理.....	123
程序 3: 就列联表计算卡方与 H 的程序	124
体验性作业.....	125
本章复习.....	125
第七章 几个组的比较——方差分析	127
问题的描述.....	127
统计推断.....	130
关于方差分析的数据处理.....	143
体验性作业.....	148
本章复习.....	148
第八章 回归分析	150
问题的描述.....	150
关于直线回归的统计推断.....	157
关于直线回归的数据处理.....	160
体验性作业.....	161
本章复习.....	161
第九章 层组取样	162
问题的描述.....	162
关于层组取样的方差分析.....	168
层组取样的回归.....	174
类型数据的层组取样.....	174
体验性作业.....	175
本章复习.....	175
附录 A 可比学区的原始数据	177
表 A (第一部分)随机分组小学五年级(1959—1960).....	178
表 A (第二部分)能力分组小学五年级(1959—1960).....	193
表 B 随机数码.....	205
表 C 对数.....	216
表 D 累积正态分布.....	220
表 E 累积卡方分布.....	225
表 F 累积“学生氏” t -分布.....	226
表 G ρ 的置信区间, 给定 r 和观测数	229
表 H 关于 ρ 的假设检验.....	230

表 I	三个总体平均数的秩评定	231
表 J	第一部分 累积 F 分布(超过 95% 观测值)	232
	第二部分 累积 F 分布(超过 99% 观测值)	234
附录 K	PRGM1 几个小组的平均数, 方差, 标准差 几个测定之间的相关系数 几个小组的单向方差分析(每个小组的测定数相同)	235
附录 L	PRGM2 回归分析	243
附录 M	PRGM3 双向列联表分析(卡方)	256
附录 N	PRGM4 层组取样的方差分析	260
本书符号术语汇编		272
文献目录		276
习题答案		277

第一章

随机取样

附数学预备知识

本书目的是使从事教育专业的学生善于利用统计学并对它发生兴趣。统计方法,对于教育研究和地区一级作出决策都是重要的工具。我们学会利用这些工具的办法之一,是通过对于具有数量背景的特定教育问题进行研究——这就是这本教材采取的途径。在本章里,我们引进一个对当前教育界具有重要意义的研究方案。这个方案中的数据将在全书中用来说明统计方法的恰当的应用。

本章所包括的细目是:(1)如何获得一个随机的样本;以及(2)复习本章所必需的数学。先讲随机取样,以便学生取得某些具体经验来应用数学符号于教育数据,然后,可使数学与这些经验联系起来。

在开始工作之前,给学生以某些提示可能是妥当的。

1. 各章中的全部习题,其答案均印在该章的末尾。要确保理解教材,除了作习题之外没有其他的办法;我们鼓励学生(1)把书中的例题作为问题来作;(2)试作每一节末尾的一些问题。

2. 在本书的末尾附有词汇表,列出这一课本中所用的全部数学符号,每个符号如何发音,以及最先对它作出解释的章节。如果你已经忘记了一个符号的意义,就随时查阅它。

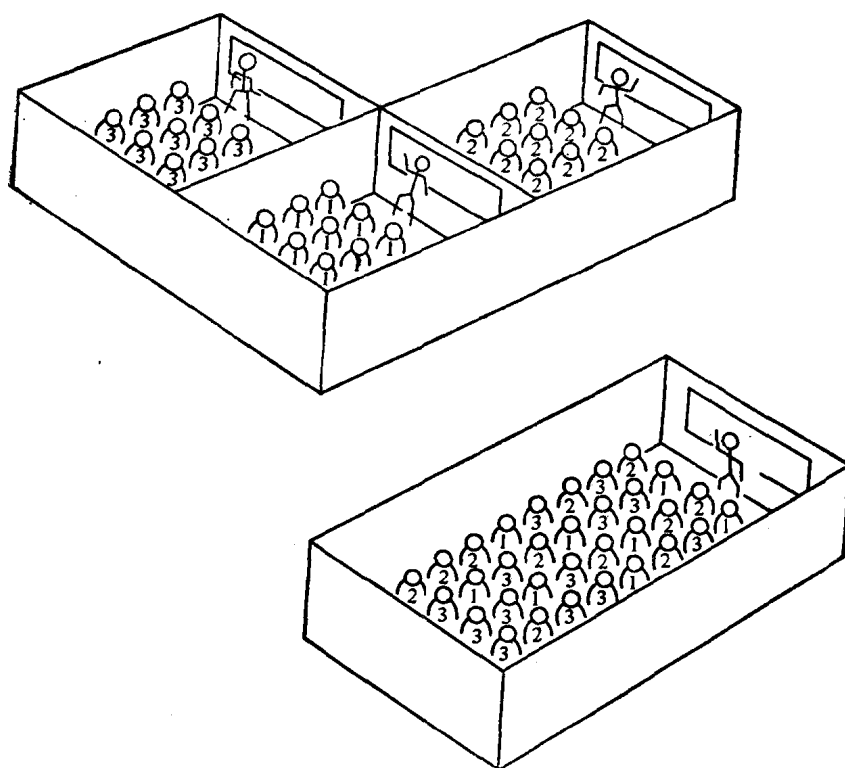
3. 出现在每一章末尾的全部概念和公式的复习,可以帮助你作到定期总结你已经学习过的材料。

下面,我们转向我们的教育研究方案的描述。1965年12月《实验教育杂志(Journal of Experimental Education)》发表了W.R.Borg的《在公立中学中进行能力分组(Ability Grouping in the Public Schools)》的报告。环绕这一研究的情况是有些不寻常的;两个可以就社会经济背景与农村-城市特点进行比较的西方学区,正在考虑关于能力分组的变革,以使在任何给定的教室中的儿童都属于相同的能力水平。一个区决定进行能力分组的变革;另一区保留常规的教室组织。Borg负责进行研究,从这两个区里的大量的儿童那里取得关于社会适应与学术成就两方面的测定。这样作的目的是要发现,在这两个区之间有任何真正的差异存在,而这些差异的产生可以想像为由于能力分组的原因;而且要确定,是否这些差异足够大到具有教育观念上的深长意味。

部分的“未加工”(Raw)数据(原始测定)见书末附表A;对它进行简短的考虑将会有用的。在表A的开头是表的主体中数据意义的说明;以后我们将会发现这些说明是实用的。

表本身被分为两部分,两个不同的学区各占一部分。第一区(从AR1页开始)里的那些班是按照常规的方式组织起来的——即,每个教室中,有约略相等数量的聪明的、一般的和迟钝的学生。我们称之为“随机分组区”。第二区(从AA1页开始)里的学生是按照能力分组的。根据他们在前一年的成绩,将他们分成三组:(1)聪明学生,(2)一般学生,(3)迟钝学生。在这一区里的每个班只是由一类学生所组成,我们称之为“能力分组区”。他们都是五年级学生,其中能力分

按能力分组的学生



随机分组的学生

- 1——聪明的学生
- 2——一般的学生
- 3——迟钝的学生

图 1-1 两个学区中的能力分组与随机分组的对比

组区有 447 人, 另一个区里的随机分组学生为 544 人。图 1-1 是这两个区里的几个教室情况的图解。图 1-2 是用图来说明实际的布局, 使我们对于这本教材所提供的全部数据有一个总的看法。

现在转向附表 A 的 ARI 页。这是从一个教室的 25 个儿童中得到的一组数据。每一行对应于一个儿童, 每一列对应于一种特有信息。前四列包含取样数码(以后将加以说明)。下一列以 PL 为标题, 指出每个学生的能力水平: (1)聪明学生, (2)一般学生, (3)迟钝学生。要指明的是, 用来分类学生的测验, 对于两个区的儿童每年都要进行。而且, 为了便于比较, 对于随机分组区的学生也都进行分类。以“S”为标题的列表示学生的性别; 所用的代码是: 1 代表男孩, 2 代表女孩。其余各列是学业与社会适应的成绩, 在该表的前一页中, 分别加以说明。

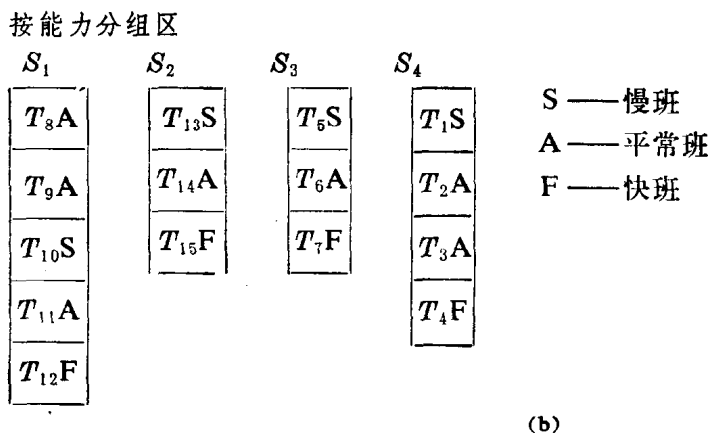
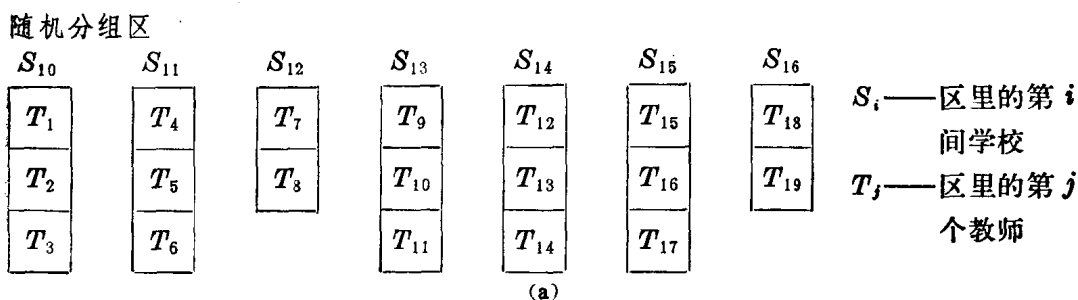


图 1-2 两个区中的学校布局 (a) 随机分组的学生 (b) 按能力水平分组的学生

简单的随机取样

贯穿这本书，我们的目标是：通过从每一小组中选择某一小数量的样本引出有关大组的结论，而且利用一种受到限制的观测，来引出有关更大组的结论。我们从如下的定义开始

定义 1.1

所谓“随机”(random)数码表，是由相邻的，从 0 到 9 的数字所组成，而且具有以下的特点：

1. 没有一种有规则的方法来写出这些数码，即一个给定的数码不能从它前面的数码预知。
2. 在表中，各个数码以比较相等的频率出现。

附表 B 就是这样的一种典型的数码表。在这本教材中，到处都会用到它。要是一个人把以 0 至 9 作标记的 10 个数码圆板放在一顶帽子里，随意抽出一个数码，随即登记并放回帽子中，再抽出，再登记，再放回，如此千万次重复这一过程，它就可以给出我们所能得到的这类数码，这一套数码都靠计算机来找出，以省劳力。这样的随机数码表，也可看作一种若干相邻数码集的数码，比方说，每组三位数，用来找出多位数的数码。例如我们可以从附表 B1 这页的左上角起往下看，我们可以找到三位数的数码集 041, 504, 947, ..., 而不是 0, 5, 9, ...。

现在我们来说明如何利用这一随机数码表，从一个大组中随意选择观测数据。设表 A 的第一部分(随机分组的全体五年级学生)是一个大组，注意到每一学生都被指定了一个从 1 到 544 的“识别数码(ID)。”为了使每一识别数码都有可能出现，我们就必须应用各有相邻三位数的数码

集。现举例说明如下,从表 B 的第一页左角的顶部开始往下挑选,到底以后,我们又回到顶部来选择相邻的三位数,照此方式一直继续选择。对于那些大于 544 的数码或已经选择过的数码则一律不理。由于这样选择的程序,我们得到了如下的表 1-1。要加以说明的是,在表 1-1 中,从下往上数的第四个数码 246,是有意改变作为例子来说明我们不理那种选择过的识别数码;我们假装 246 的确出现在 130 的地方。

表 1-1 从 544 个学生中,无置换地选择一个容量为 10 的随机样本

随机数码表中的数码	选 用 的 数 码	不 理 的 数 码	不 理 的 原 因
041	41		
504	504		
947		947	大于 544
602		602	大于 544
595		595	大于 544
855		855	大于 544
021	21		
246	246		
746		746	大于 544
987		987	大于 544
383	383		
372	372		
752		752	大于 544
146	146		
483	483		
354	354		
246		246	已选用过
709		709	大于 544
778		778	大于 544
447	447		

定义 1.2

从上述方式选取学生的取样方法叫作“无置换的简单随机取样”(simple random sampling without replacement)。

定义 1.3

若将前述的选取学生方法改为允许再次选取那些已经选取过的数码时,那就叫作“有置换的简单随机取样”(simple random sampling with replacement)。

当我们采用定义 1.3 所概括的方法时,对那些已被选用过的识别数码不是不理,而是按其出现次数,多次选用,好象他们都是各别的个体。

练习

1.1 从按能力分组总体中,无置换地挑选一个十个学生的简单随机样本,并且将这些学生的 STEP 科学成绩

列成一个表。得出能力一般学生的 STEP 科学成绩。

1.2 对随机分组的学生, 作同样的工作。

1.3 从上述两个随机样本中, 能否得出任何结论来说明随机分组与能力分组二者在科学成就方面的相对的优点? 说明你的理由。

现在来讨论为什么要象前面所说的那样进行取样。当一个研究人员到了必须选择学生来进行研究的时候, 他必需确定某些基本准则来进行选择。假如这些准则包含着关于研究人员本身方面的某些决策时, 往往由于克服个人偏见的困难, 致使研究方案有时会受到危害。研究人员可能会这样想: “那个实验对象不够典型, 还是不用他为好。” 事实上是, 他已意识到, 考虑中的那个人可能造成于他不利的所谓“错误”方向的结果。另外一些研究人员可能故意地走向另一极端, 专门找那些不大可能用“他们的”方式作出反应的对象。要使选择与结果不发生关系, 挑选实验对象的一种保险的方法就是本节所描述的随机取样的方法。这种方式的挑选程序, 保护着研究方案不受那些执行人员的个人偏见的影响。这本书立基于随机样本的选择方法, 而且只是在遵循这些方法时, 各式各样的分析才能实现。

一些算术预备知识

在我们继续进行统计学的讨论之前, 我们复习一下这本教材所必需的算术规则。

算术运算

表 1-2 给出了标准的算术符号及其意义。注意: 在一个包括指数、乘、加等运算的式子中, 首先进行乘方运算, 然后乘, 最后加, 或者在相同的序列中, 先求出平方根, 除, 而最后减, 建议在作下列练习之前, 仔细看看表 1-2。

表 1-2 算术符号的标准记法

通 常 记 法	意 义
$3+2$	3 与 2 之和
3×2	3 与 2 之积
7^2	7×7 ——7的“平方”
7^3	$7\times 7\times 7$ ——7的“立方”
$3\times 2+7$	3 与 2 之积加 7 注: 乘在加之前进行, 除非另用括号加以规定。
$3\times (2+7)$	加 2 与 7 然后乘以 3 注: 括号意指: 先作括号中所指出的运算, 然后完成其余运算。
$3^2\times 12$	先平方 3, 然后乘以 12 注: 指数运算(平方或高阶自乘)在乘法运算前进行, 除非另用括号加以指明。
$(3\times 12)^2$	3 乘以 12, 然后平方其积
$5^2\times 4+3^2+7\times 9$	首先平方, 其次乘, 最后加
$7-4$	7 减以 4
$7/4$	7 除以 4
$\sqrt{13}$	13 的平方根

练习

1.4 求下列各题的数值:

- a. $6^3 + 3 \times 2^2 \times 4 + (7 \times 3)^2$
- b. $(2 \times 3)^2 \times 5 + 6 \times (4 + 2)$
- c. $3 \times (7 + 2)^2 + (9 \times 2)^4$
- d. $2 \times 3^2 \times 5 + 6 \times 4 + 2$
- e. $3 \times 7 + 2^2 + 9 \times 2^4$

一些常用的算术定律

当我们考虑含有括号的式子时,我们往往把这些式子重写成无括号的、互斥性的、相等的形式。

考虑一下

(1.1) $7 \times (3 + 2)$

我们将发现这个式子是精确地等于

(1.2) $7 \times 3 + 7 \times 2$

在这里,我们首先进行乘运算,其次加运算,一般地,我们有

(1.3) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

我们在表 1-3 中概括这种类型的定律。学生们应该熟悉这些定律,从而避免那些非数学家所易犯的平常的算术错误。

练习

1.5 求出下列各式的数值

- a. $7 \times (2 + 6)$; $7 \times 2 + 7 \times 6$
- b. $(2 + 6)^2$; $2^2 + 2 \times 2 \times 6 + 6^2$
- c. $(3 \times 4 \times 2)^2$; $3^2 \times 4^2 \times 2^2$

1.6 求出下列各式的等价型:

- a. $(1 + 3)^2$
- b. $(2 + 6)^2 \times 3$
- c. $(2 + 4)^2 + 9 \times (2 \times 3)^2$

表 1-3 一些算术定律的说明

例	子	意	义	通	式
$7 \times (2 + 3) = 7 \times 2 + 7 \times 3$		左侧: 先加 2 与 3, 然后乘以 7		$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	
$(2 \times 4)^2 = 2^2 \times 4^2$		右侧: 先乘 7 与 2 与 7 与 3, 后加		$(a \times b)^2 = a^2 \times b^2$	
$(2 \times 3 \times 7)^2 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2$		左侧: 先乘 2 与 4, 然后求积的平方		$(a \times b \times c)^2 = a^2 \times b^2 \times c^2$	
$(2 + 5)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 5 + 5^2$		右侧: 先求 2 与 4, 然后相乘		$(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$	
$3 \times 7 = 7 \times 3$		左侧: 先求积, 然后平方		$a \times b = b \times a$	
$(3 \times 2) \times 7 = 3 \times (2 \times 7)$		右侧: 先求各项平方, 然后相乘		$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$	
$(3 + 2) + 7 = 3 + (2 + 7)$		左侧: 先加, 然后求和的平方		$(a + b) + c = a + (b + c)$	
		右侧: 先求第一项的平方, 以 2 乘两项之积, 求第二项的平方, 加全部结果			
		左侧: 三次加 7			
		右侧: 七次加 3			
		左侧: 乘 3 以 2, 然后以 7 乘其结果			
		右侧: 乘 2 以 7, 然后乘以 3			
		左侧: 加 2 与 3, 然后加其结果于 7			
		右侧: 加 2 与 7, 然后加其结果于 3			
		注: 这一规则称为结合律, 即不论各数结合的先后次序如何, 运算结果相同。			

平方根

定义 1.4

一数(叫作原始数 c)的“平方根”是另一数, 当它自乘时, 得出原始数。以 $\sqrt{c}$ 表示之。

例 若 $c=9$, $\sqrt{c}=3$; 即, $3^2=3 \times 3=9$

例 数 1.414 近似地等于 2 的平方根。因为,

$(1.414)^2 = 1.999396 \cong 2$ (符号 $\cong$ 近似地相等的意思)

当无表可以利用时, 我们探索一个求一数平方根的简易方法, 首先要记住的是, 以一个数的平方根除这个数时, 答数仍然是它的平方根。例如, 若以 1.414 除 2, 我们得出 1.4142 (接近于 1.414)。我们的程序是先猜想这个数的平方根, 然后以我们的猜想数除这个数。如若猜想非常准确, 答数就会非常接近于猜想数, 若猜想偏低, 答数就会偏高, 同样, 猜想数偏高时将会得到偏低的答数, 加猜想数与答数, 求其平均, 得出一个比较精确的新的猜想数。重复这一程序, 一直到以猜想数除这个数的结果非常接近于猜想数为止。为了达到所需要的常用精确度, 通常只需三或四次计算, 计算所需时间不会比台式计算机多一分钟。

作为例题, 让我们求 10 的平方根。因 3 是 9 的平方根, 试以 3.2 作为 10 的平方根的第一个猜想数。3.2 除 10 得 3.125; 3.2 略高, 平均 3.2 与 3.125 得 3.1625; 以之作新的猜想数, 得到新答案 3.16205, 以 3.162 自乘来进行检验, 得 9.998244。就许多实用目标来说, 它显然是够接近的了。

练习

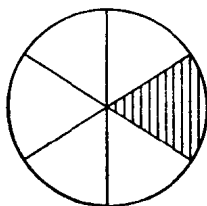
- 1.7 求 5.761 的平方根, 精确到百分位数。
- 1.8 求 0.6359 的平方根, 精确到小数点右的三位数。
- 1.9 求 23.72 的平方根, 精确到百分位数。

分数

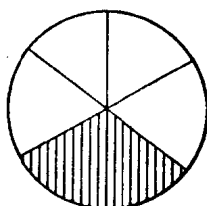
我们通过加法的考虑来开始关于分数的讨论。现以馅饼的碎片来说明我们的观点。在图 1-3 中, 两块馅饼各分为 6 片, 在第一块馅饼中, 阴影部分表示六分之一块馅饼, 以

(1.4) $\frac{1}{6}$ 或 $1/6$

表示它。其次, 假定我们把两个六分之一块馅饼加在一起, 它就是



(a)



(b)

图 1-3 分数的加法

$$(1.5) \quad \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{6} \quad \text{或} \quad 2/6$$

这样的一些形式，显然是可以接受的。

不管所用的馅饼是什么样的碎片，只要这些被加的分数相同，同样的相加方法成立。因此，

$$(1.6) \quad \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7} \quad \text{或} \quad 1/7 + 1/7 + 1/7 = 3/7$$

有时，我们要加的项是不同的分数

如：

$$(1.7) \quad \frac{2}{6} + \frac{3}{7} = 2/6 + 3/7 = 1/6 + 1/6 + 1/7 + 1/7 + 1/7$$

在我们开始运算之前，需要涉及分数乘法。

分数乘法

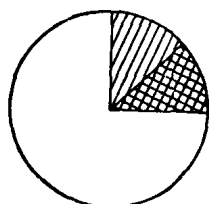
开始知道这种问题的最简单方法是直觉性的方法，例如，考虑表示 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ 的图 1-4(a)。

我们习惯于想象 $\frac{1}{2}$ 为某些事物除以 2。浅色阴影部分表示 $\frac{1}{4}$ 分割成两半，那么用交叉线画成的阴影部分就是馅饼的 $\frac{1}{8}$ ，因此，

$$(1.8) \quad \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{4 \times 2} \quad \text{或} \quad 1/4 \times 1/2 = 1/(4 \times 2)$$

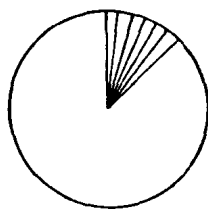
用相似的方法，我们定义任何两个分数 $1/a \times 1/b$ 的乘积 $1/(a \times b)$ ；从而可以看出，用这一方式所得的结果，与图 1-4(b)中所记载的是相符的，在图 1-4(b)中，馅饼的 $1/7$ 再细分为 6 份，这种再细分后的一份就是馅饼的 $1/42$ ，因此在整个馅饼中有 6×7 个这种细分部分。因此， $\frac{1}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{42}$ ，如此等等。其次，我们考虑 $\frac{1}{7} \times \frac{2}{6}$ 这一类型的分数；这种分数是

$$(1.9) \quad \frac{1}{7} \times \left(2 \times \frac{1}{6}\right)$$



$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

(a)



$$\frac{1}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{42}$$

(b)

图 1-4 分数积的图象描述

我们看到两块馅饼的六分之一的一分之七，是“一块馅饼的六分之一的一分之七”的两倍，这等于说