

离散时间信号处理导论

的习题详解

何东光 高文志 张湘云
王平孙 冯传海 校

高等教育出版社

《离散时间信号处理导论》 的习题详解

何东光 高文志 张湘云

王平孙 冯传海 校

高等教育出版社

内 容 提 要

本书为美国 S.A. Tretter 所著《离散时间信号处理导论》一书(王平孙译 管致中校 高等教育出版社 1982 年出版)的习题解答,除对书中全部 239 个习题进行演算、审校,提供了详细解答外,还对各章习题进行了内容的分析和归类,点明难题,写有说明。

习题按照原文书顺序,内容涉及信号处理的基础理论,借多项式内插和外推来再现信号,连续时间和离散时间的混合系统,线性系统和抽样随机过程,功率谱估计,希尔伯特空间以及参数估计和递推估计等重要基础理论。这本习题详解会为读者在学习中提供随时核对和参考的依据,对深入学好信号处理的基础理论和方法有益。

本书可供高等学校电子类、通讯类、自动控制、雷达、声纳、生物医学工程、遥感技术以及地质勘探等专业高年级学生、研究生自学参考,也可供有关科技人员参考。

责任编辑 王忠民

高等学校教学参考书

离散时间信号处理导论的习题详解

何东光 高文志 张湘云

王平孙 冯传海 校

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

中国青年出版社印刷厂印装

*

开本 850 × 1168 1/32 印张 11.125 字数 290 000

1990 年 6 月第 1 版 1990 年 6 月第 1 次印刷

印数 0001—1 100

ISBN 7-04-000813-0/TN · 47

定价 2.65 元

前 言

数字集成电路和计算机的广泛应用促使数字信号处理这门学科进一步发展,它已深入信息处理的各个有关领域。目前国内外各理工院校均开设有关课程或设置相应的专业。

美国马里兰大学 Steven A. Tretter 所著 “Introduction to Discrete Time Signal Processing” 一书不失为信号处理方面的一本好的著作(该书已由王平孙翻译,高等教育出版社 1982 年出版)。一九八五年,该书的大部分章节曾作为我校电子系本科生的选修课的教材和研究生班的教材。书中所提供的 239 个习题深度不一,其中大部分是用于加深对书中基本理论和方法的理解,而有些则扩充了所论述的内容,整个习题构成全书的重要组成部分。演算习题将成为透彻掌握离散时间信号处理这一学科的重要环节。我们深感编写一本题解奉献给青年读者,将对这一课程的教学颇有裨益。

本题解是根据我们使用该书的教学经验并参考了何东光同志在美国科罗拉多大学访问进修期间得到的原书作者 S. A. Tretter 所写的简要题解写成的。题解中有些是采用了原题解的风格和写法,但提供了较详细的步骤和说明。对已发现原题解中的错误,我们注意了改正。

在总的安排上,每章的开头写有说明,对该章内容进行了归类,指出相应的习题,点出综合性的、难度较大的或对原书内容有扩充意义的习题,以便读者首先有一概括的了解。在具体解算中,对同类习题中第一题的解答均较为详尽列出,以后各题则从简,以避免不必要的重复。另外,对每题大都仅提供一种切合有

关章节内容的解法。解答中的公式，定理等均引自原书，数学符号等均与原书呼应一致。

书稿写成后，王平孙同志在百忙中仔细地审阅了前七章内容；冯传海教授在病体尚未康复的情况下，审阅了后七章内容；八五级研究生张建萍和八五届毕业生王大来为本书大部分题解作了认真的验算。我们在此一并向上述同志表示感谢。最后，还要感谢祖振铨社长又为本习题详解的封面题字。

本书第八、十两章由高文志编写，第十三、十四两章由张湘云编写，其他各章由何东光编写。由于我们水平所限，错误或不当之处仍难避免，诚恳欢迎读者提出批评指正。

编 者

一九八七年五月

目 录

第二章 均匀抽样	1
引言	1
习题 2.1~习题 2.11	1
第三章 借多项式内插和外推来再现数据	17
引言	17
习题 3.1~习题 3.6	17
第四章 Z 变换	31
引言	31
习题 4.1~习题 4.26	31
第五章 以变换方法分析抽样数据系统	70
引言	70
习题 5.1~习题 5.19	70
第六章 抽样数据系统的状态空间表示	104
引言	104
习题 6.1~习题 6.25	104
第七章 线性系统和均匀抽样的随机过程	145
引言	145
习题 7.1~习题 7.37	146
第八章 用于数字滤波的脉冲转移函数的设计	188
引言	188
习题 8.1~习题 8.21	188
第九章 数字滤波器中量化与有限字长算法的影响	223
引言	223
习题 9.1~习题 9.18	223
第十章 离散傅里叶变换: 理论, 高效率运算及在数字滤	

波与相关中的应用.....	242
引言	242
习题 10.1~习题 10.24	242
第十一章 功率谱密度的估计	280
引言	280
习题 11.1~习题 11.9	280
第十二章 希尔伯特空间的基本原理	299
引言	299
习题 12.1~习题 12.21	299
第十三章 线性参数估计	315
引言	315
习题 13.1~习题 13.14	315
第十四章 递推估计	334
引言	334
习题 14.1~习题 14.8	334

第二章 均匀抽样*

引言 第 2.2 节由调制的观点分析了非理想的抽样过程和已抽样信号的频谱,并引入了频谱交叠及信号的恢复问题(题 2.1)。第 2.3~2.4 节是关于理想抽样的分析,证明了抽样定理,讨论了抽样信号的准确再现问题(题 2.2~2.8)。第 2.5 节介绍了分析带通系统的有力工具,希尔伯特变换,证明了带通表示定理和带通抽样定理(题 2.9~2.11)。

在这些习题中,题 2.5 是利用泊松和式(2.3.11)寻找某些函数的无穷和式的闭合型表示式的例子。题 2.6 证明了以平顶脉冲的非理想抽样可用理想已抽样信号与矩形冲激响应的卷积关系来近似,因而其频谱可用理想已抽样信号频谱与单个矩形脉冲频谱的乘积来近似。利用这一简单关系可近似地分析非理想的抽样过程。题 2.7 和题 2.8 中证明了脉冲幅度调制系统中不存在码间干扰的一个条件,并证明了具有升余弦特性的信道可满足这一条件。题 2.10 是将带通表示定理用来分析单边带通讯系统中一种解调器原理的例子。

题 2.1

令抽样脉冲串为

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t-nT)$$

此处有

$$p(t) = \begin{cases} 1 & \text{当 } |t| < a, \text{ 而 } a < T/2 \\ 0 & \text{当 } t \text{ 取其他值时} \end{cases}$$

* 本书习题演算自第二章始

又有

$$F(\omega) = \begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{B} & \text{当 } |\omega| < B \\ 0 & \text{当 } \omega \text{ 取其他值时} \end{cases}$$

(a) 求 $s(t)$ 的傅里叶级数。

(b) 对于 $\omega_s < 2B$ 和 $\omega_s > 2B$ 画出 $F^*(\omega)$ 。

解 (a)

$s(t)$ 为宽度 $2a$ 的矩形脉冲 $p(t)$, 并以周期 $T > 2a$ 重复的脉冲序列。由 (2.2.2) 式, 其傅里叶级数的系数为

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-a}^a e^{-jn\omega_s t} dt \\ &= \frac{2a}{T} \cdot \frac{\sin n\omega_s a}{n\omega_s a} \end{aligned}$$

傅里叶级数为

$$s(t) = \frac{2a}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n\omega_s a}{n\omega_s a} e^{jn\omega_s t}$$

解 (b)

将 (2.2.3) 式中的 $e^{jn\omega_s t}$ 视为频移因子, 其傅里叶变换为 (2.2.4) 式

$$F^*(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n F(\omega - n\omega_s) \quad (2.2.4)$$

由已知的 $F(\omega)$, 可作出图 P 2.1(b) 中 $F^*(\omega)$ 的三角形频谱。当 $\omega_s < 2B$ 时, 相邻频谱间要产生混叠; 但当 $\omega_s > 2B$ 时, 频谱间不产生混叠。

题 2.2

若在 $-\infty < t < \infty$ 有 $f(t) = e^{-a|t|}$, 此处 $a > 0$, 求 $F^*(\omega)$ 并

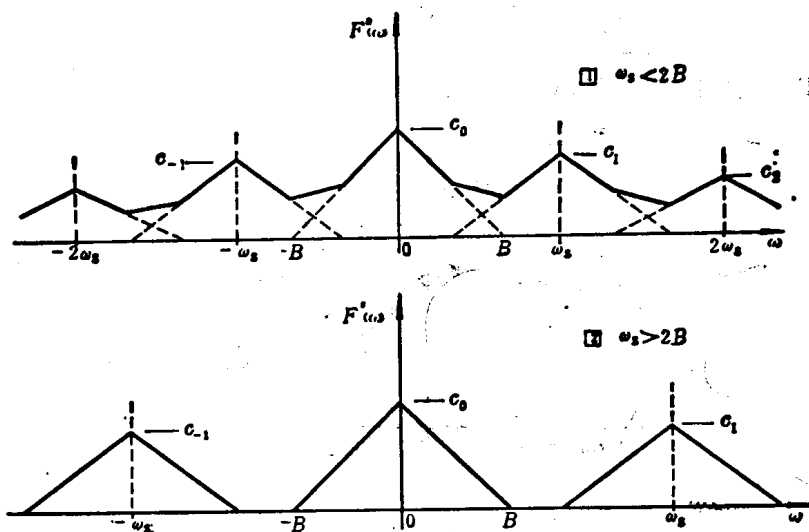


图 P 2.1(b)

画出 $|F^*(\omega)|$, 符号 * 用以表示经理想冲激抽样 所得之信号或其变换。

解

由(2.3.8)的傅里叶变换式

$$F^*(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-j\omega nT}$$

代入 $f(t)$, 令 $t = nT$ 并将无穷和式写成闭合形式

$$\begin{aligned} F^*(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a|nT|} e^{-j\omega nT} \\ &= \sum_{n=-\infty}^0 e^{anT} e^{-j\omega nT} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} e^{-j\omega nT} - 1 \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT} e^{-j\omega T}} + \frac{1}{1 - e^{-aT} e^{-j\omega T}} - 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1 - e^{-2aT}}{1 - 2e^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$$

由上式可作出 $|F^*(\omega)|$ 的图形如下

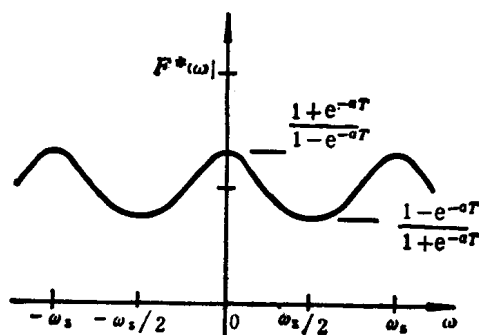


图 P 2.2

题 2.3

若在 $-\infty < t < \infty$ 有 $f(t) = \cos \omega_0 t$, 求 $F^*(\omega)$.

解

$\cos \omega_0 t$ 的频谱为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \right\} \\ &= \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

应用(2.3.6)式, 得

$$\begin{aligned} F^*(\omega) &= \frac{\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - n\omega_s) \\ &\quad + \delta(\omega + \omega_0 - n\omega_s)] \end{aligned}$$

题 2.4

若在 $t > 0$ 有 $f(t) = te^{-at}$, 且 $a > 0$, 在 t 取其他值时有 $f(t) = 0$, 求 $F^*(\omega)$.

解

应用(2.3.8)式

$$\begin{aligned} F^*(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-j\omega nT} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nT e^{-anT} e^{-j\omega nT} \end{aligned}$$

将 $e^{-j\omega nT}$ 对 ω 求导

$$\frac{d}{d\omega} e^{-j\omega nT} = -jnT e^{-j\omega nT}$$

得关系式

$$nT e^{-j\omega nT} = j \frac{d}{d\omega} e^{-j\omega nT}$$

代入 $F^*(\omega)$ 中, 交换求和与求导号, 并写成闭合形式

$$\begin{aligned} F^*(\omega) &= j \frac{d}{d\omega} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} e^{-j\omega nT} \\ &= j \frac{d}{d\omega} \frac{1}{1 - e^{-aT} e^{-j\omega T}} \\ &= - \frac{T e^{-aT} e^{-j\omega T}}{(1 - e^{-aT} e^{-j\omega T})^2} \end{aligned}$$

题 2.5

求 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ 的闭合型表示式。提示: 利用泊松和式(2.3.11)。

解

$$\text{设 } f(t) = \frac{1}{2a} e^{-a|t|}$$

其傅里叶变换为 $F(\omega) = \frac{1}{a^2 + \omega^2}$

因函数 $f(t)$ 的理想抽样频谱是由(2.3.6)式决定的, 由此可得

$$F^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + (\omega - n\omega_s)^2}$$

令式中 $\omega=0, \omega_s=1$, 此时 $T=2\pi/\omega_s=2\pi$ 。于是

$$F^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2}$$

应用(2.3.8)式, 得

$$F^*(\omega) = \frac{1}{2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a|nT|} e^{-j\omega nT}$$

当 $T=2\pi, \omega=0$ 时, 可简化为

$$F^*(\omega) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1 + e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}}$$

应用泊松和式(2.3.11), 可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \cdot \frac{1 + e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}}$$

题 2.6

设

$$f_1(t) = \begin{cases} f(nT) & \text{当 } nT \leq t < nT + a, \text{ 此处 } 0 < a < T \\ 0 & \text{当 } t \text{ 取其他值时} \end{cases}$$

注意, $f_1(t)$ 表示以有限宽度的平顶脉冲对 $f(t)$ 抽样后所得之样本。求以 $F^*(\omega)$ 表示的 $F_1(\omega)$ 。提示: 考虑将 $f^*(t)$ 加到一具有冲激响应

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{当 } 0 \leq t < a \\ 0 & \text{当 } t \text{ 取其他值时} \end{cases}$$

的滤波器上的情况。

解

设有限宽度平顶抽样脉冲串为

$$h_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t-nT)$$

令 $h_T(t)$ 对 $f(t)$ 抽样并由题意设在抽样瞬间 $f(t)$ 近似不变, 则有

$$f_1(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)h(t-nT)$$

另外, 将理想抽样后的 $f^*(t)$ 加到具有冲激响应为 $h(t)$ 的滤波器上, 其输出为

$$\begin{aligned} f^*(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(\tau-nT)h(t-\tau)d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)h(t-nT) \end{aligned}$$

知其结果就是 $f_1(t)$, 于是在频域内 $F_1(\omega)$ 可表为

$$F_1(\omega) = F^*(\omega)H(\omega)$$

其中 $H(\omega)$ 是提示中冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^a e^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{1}{j\omega}(e^{-j\omega a} - 1) = 2e^{-j\omega a/2} \frac{\sin \omega a/2}{\omega} \end{aligned}$$

题 2.7

在脉冲幅度调制系统中, 序列 $\{f(nT)\}$ 是通过将信号

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)$$

加于具有冲激响应 $c(t)$ 的信道上而发送出去的。接收到的信号是

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)c(t-nT)$$

在接收机的脉冲码 $f(kT)$ 估计为

$$r(kT) = c_0 f(kT) + \sum_{n \neq k} f(nT) c(kT - nT)$$

右侧的和式称为码间干扰。试证明：若有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C(\omega - n\omega_s) = A$$

式中 A 为实常数，则不存在码间干扰。这一命题称为奈奎斯特准则^{[97]*}。

解

利用(2.3.6)式和已知条件可写出 $c(t)$ 及其抽样 $c^*(t) = c(nT)$ 的傅里叶变换 $C(\omega)$ 与 $C^*(\omega)$ 间存在

$$C^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(\omega - n\omega_s) = \frac{A}{T}$$

由第 2.3 节， $c(nT)$ 是 $C^*(\omega)$ 傅里叶展开式各次谐波分量的系数，并由(2.3.11)式知

$$C^*(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nT) e^{-j\omega nT}$$

其中系数 $c(nT)$ 由(2.3.10)式确定

$$c(nT) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \frac{A}{T} e^{j\omega nT} d\omega = \frac{A}{T} \delta(nT)$$

于是当序列 $\{f(nT)\}$ 通过具有冲激响应 $c(t)$ 的信道而发送出去时，信道接收端的信号中不存在码间干扰

$$r(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) c(kT - nT)$$

* 指原书中参考文献之 97。

$$\begin{aligned}
 &= c_0 f(kT) + \frac{A}{T} \sum_{n \neq k} f(nT) \delta(kT - nT) \\
 &= c_0 f(kT)
 \end{aligned}$$

题 2.8

设

$$C(\omega) = \begin{cases} T & \text{当 } |\omega| \leq \frac{\pi}{T}(1-a) \\ \frac{T}{2} \left\{ 1 - \sin \left[\frac{T}{2a} \left(|\omega| - \frac{\pi}{T} \right) \right] \right\} & \text{当 } \frac{\pi}{T}(1-a) \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{T}(1+a) \\ 0 & \text{当 } \omega \text{ 取其他值时。} \end{cases}$$

式中 $0 < a < 1$ 。上式称为升余弦特性(raised cosine characteristic)^[87]。

- 求 $C^*(\omega)$ 和 $c(nT)$;
- 试根据习题 2.7 判断此信道是否有码间干扰?
- 试证明

$$c(t) = \frac{\sin \pi t/T}{\pi t/T} \cdot \frac{\cos a \pi t/T}{1 - 4a^2 t^2/T^2}$$

解 (a)

题设之 $C(\omega)$ 是信道冲激响应 $c(t)$ 的傅里叶变换, $c(t)$ 的抽样 $c^*(t)$ 的变换由 (2.3.6) 式决定。经简单的三角计算可以验证, 与题设之 $C(\omega)$ 对应的 $C^*(\omega)$ 在整个 ω 范围内其值为 1, 即

$$C^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(\omega - n\omega_s) = 1$$

因此 $c(nT) = \delta(nT)$ 。

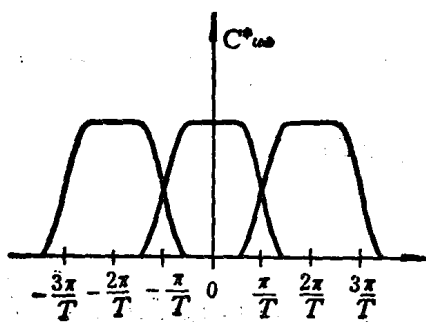


图 2.8(a)

解 (b)

因为 $C^*(\omega) = \text{常数}$, 由题 2.7 知, 满足奈奎斯特准则这种特性的信道不产生码间干扰。

解 (c)

设有矩形频谱

$$P_s(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{当 } |\omega| < x \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } \omega \text{ 取其他值时} \end{cases}$$

反变换为

$$p_s(t) = \mathcal{F}^{-1}\{P_s(\omega)\} = \frac{\sin xt}{\pi t}$$

可以证明, 将半个余弦形频谱乘以 $T^2/4a$

$$Q(\omega) = \frac{T^2}{4a} \cos\left(\frac{T}{2a}\omega\right) P_{a\pi/T}(\omega) \quad 0 < a < 1$$

并与一矩形频谱 $P_{\pi/T}(\omega)$ 进行卷积, 其结果就是 $C(\omega)$

$$C(\omega) = P_{\pi/T}(\omega) * Q(\omega)$$

现说明如下。

我们根据下图来求在 $(1-a)\frac{\pi}{T} \leq \omega < (1+a)\frac{\pi}{T}$ 范围内

$P_{\pi/T}(\omega)$ 与 $Q(\omega)$ 的卷积。