应用数学例题演习

〔3〕

〔日〕道脇義正　春海佳三郎
松浦省三　宫崎晴夫　著
郑毓德　张和中　译
卢桂章　校

南开大学出版社

应用数学例题演习

（三）

〔日〕道脇義正等

郑毓德等译

南开大学出版社出版

（天津八里台南开大学校内）

邮政编码：300071 电话：349318

新华书店天津发行所发行

河北省邮电印刷厂印刷

1990年6月第1版　1990年6月第1次印刷

开本：850×1168 1/32　印张：14.5

字数：400千　印数：1-2500

ISBN7 310-00285-7/O·48　定价：3.70元

前　　言

简言之，数学很重要。在理工科大学和工科高等院校都特别强调数学。然而，迄今为止已出版的应用数学演习的书籍为数甚少。研究应用数学，必须懂得数学。实际上，比起纯数学来，它是不过分讲求严密性的数学。人们往往即使理解了数学的解法，但把数学应用于自然科学问题，却不能运用自如。笔者不揣才疏学浅，试图就物理学、电工学、化学等自然科学中怎样运用数学这一问题，以数学为主，进行讲解。因此它比数学本身的习题演算书籍用处更大。

本书是《应用数学例题演习》全四册中的第三卷——概率·统计·矩阵篇。

本书编著要点如下：

1. 以コロナ社（Corona Publishing）出版的《新编电工学讲座》和《新编机械学讲座》的《应用数学（2）》为依据。然而即使脱离该书，也能顺利地学习。

2. 在各节各项中，均提出基础理论，以便明了要点。

3. 在基础理论中必要的证明，将在例题中再现。

4. 相同类型的问题归纳在一起。

5. 力求采用容易理解的形式，以便掌握数学解法的要领。

另外，尚需注意之点有，1. 概率、统计的章节，如同教材一样，对基础理论尽量详细地做了解说，脱离开原书学习也足够用。2. 为了查阅方便，除新出现的术语之外也用了相宜的黑体字，配合书后索引，望能有助于学习。3. 随机过程一章加上了随机过程中的马尔柯夫过程。4. 在矩阵一章中加上了线性规划应用一节。

最后应该说明，所考虑到的这些问题已超出了个人的能力，错

误在所难免。望能得到读者们的指正，以便修订时改善。谨对提供各种参考文献的作者表示感谢，并对编辑、校对、出版工作付出劳动的コロナ出版社编辑部的各位致以深切谢意。

著者

昭和42年12月20日

目　　录

3　概　　率

4　统　　计

5　矩　　阵

附 表

3 概　　率

3·1　概率和事件

3·1·1　事件和集合

基础理论

1．以下用I表示必然事件，ϕ表示不可能事件，E^c表示事件E的对立事件或余事件。

（1）对于任意事件E，$E\cup E^C=I$，$E\cap E^C=\phi$

（2）$E\cap I=E$，$E\cup\phi=E$

（3）对于任意事件E_1，E_2，E_3有

$$E_1\cap(E_2\cup E_3)=(E_1\cap E_2)\cup(E_1\cap E_3)$$

$$E_1\cup(E_2\cap E_3)=(E_1\cup E_2)\cap(E_1\cup E_3)\quad（分配律）$$

（4）对于任意事件E_1，E_2

$$(E_1\cap E_2)\cap(E_1\cap E_2^c)=\phi$$

$$(E_1\cap E_2)\cup(E_1\cap E_2^c)=E_1$$

（5）事件$E_1\cap E_2$，$E_1^c\cap E_2$，$E_1\cap E_2^c$中任两个都是互不相容事件或称互斥事件。

$$E_1\cup E_2=(E_1\cap E_2)\cup(E_1^c\cap E_2)\cup(E_1\cap E_2^c)$$

（6）如果$I=E_1\cup E_2\cup E_3\cup\cdots\cup E_n$（即使不是$E_i\cap E_j=\phi$ $i\neq j$亦可），则对任意事件E有：

$$E=(E\cap E_1)\cup(E\cap E_2)\cup\cdots\cup(E\cap E_n)$$

（7）DeMorgan定律（事件的个数，几个均可）

$$(E_1 \cup E_2)^c = E_1^c \cap E_2^c$$
$$(E_1 \cap E_2)^c = E_1^c \cup E_2^c$$

注意 以上定理对一般的点集合也成立。又，通常在Bollean Lattice中也成立。

另外，E_1，E_2是互不相容（或称互斥）事件，定义$E_1 \cap E_2 = \phi$。又，E的对立事件E^c是E的补集合。

例题1 同时掷两颗骰子，考虑点数之和，举出属于下列事件的所有基本事件

(i)两颗骰子得相同的点数

(ii)点数之和为5

(iii)点数之和为偶数

解答

(i)用A，B代表两骰子，规定A，B各得i点时，分别用A_i，B表示[1]。其基本事件有6个

(A_1, B_1)，$(A_2, B_2$，……，(A_6, B_6)

(ii)和为5时，基本事件有4个

(A_1, B_4)，(A_2, B_3)，(A_3, B_2)，(A_4, B_1)

(iii)和为偶数时，基本事件是

A，B都得偶数点时：

(A_2, B_2)，(A_2, B_4)，…，(A_6, B_6) $3\times3=9$(个)

A，B都得奇数点时

(A_1, B_1)，(A_1, B_3)，…，(A_5, B_5) $3\times3=9$(个)

共计为18个。

例题2 在相同的试验中，若每次试验的基本事件有N个，研究这些基本事件的组合事件，其总数有多少？又，在掷骰子试验中组合事件的总数是多少？

解答

在一次试验中基本事件的个数为N，计算这些基本事件的组合

[1] 这里对原书略有更动——译者

事件的个数：

N个全部取出时，有C_N^N

每次取$N-1$个时，有C_N^{N-1}

……

每次只取1个时，有C_N^1

一个也不取时，有C_N^0.

故，所求事件总数为$C_N^N+C_N^{N-1}+\cdots+C_N^0=(1+1)^N=2^N$.

因为在掷骰子试验中，基本事件有6个，所以，这些组合事件的总数是2^6个。

注意 作为具体例子，在掷骰子试验中的2^6个事件之一，可考虑得偶数点的事件。这时，它可表示为

事件（偶数）=｛事件（2），事件（4），事件（6）｝，它表示6个基本事件中的3个组合（集合）。

研究在某一试验中（**复合试验**亦可），由基本事件的全体所组成的集合Ω（它称为**样本空间**，有限集或无限集均可），在这个试验中，事件E（Ω的部分集合）有$E\subset\Omega$，其**概率**可定义为$p(E)$，那么，关于Ω及$p(E)$的概率对应地有：

1. $0\leqslant p(E)\leqslant 1$　　　　2. $p(\Omega)=1$

3. $A\subset\Omega$，$B\subset\Omega$，$A\cap B=\phi$，则$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.

例题3 设A，B，C是三个事件，试把下列各事件用A，B，C表示出来：

(i)A或B出现；

(ii)A，B，C同时出现；

(iii)只有A出现；

(iv)A，B同时出现，而C不出现；

(v)A，B，C中至少有二事件出现；

(vi)A，B，C中恰有一事件出现；

(vii)A，B，C中只出现二个；

(viii)A，B，C中最多出现二个；

(ix) A, B, C中最多出现二个，但至少必须出现一个。

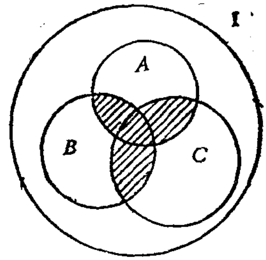

图 3.1

解答

(i) $A\cup B$ (ii) $A\cap B\cap C$

(iii) $A\cap B^c\cap C^c$ (B^c为B的补集)

(iv)不出现C，因而C^c出现（即C的对立事件），于是，A，B，C^c同时出现，所以，有$A\cap B\cap C^c$。

(v) A，B同时出现是$A\cap B$，由题意，这时C出现与否均可，因$(C\cup C^c)=I$，$A\cap B\cap I=A\cap B$，这样的情形有三种，故所求事件是

$$(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$$

注意 所求事件相当于右图的斜线部分，表示这样的事件有各种方法例如

$(A\cap B\cap C^c)\cup(B\cap C\cap A^c)\cup(C\cap A\cap B^c)\cup(A\cap B\cap C)$

$I-(A^c\cap B^c\cap C^c)$

$-(A\cap B^c\cap C^c)\cup(B\cap C^c\cap A^c)\cup(C\cap A^c\cap B^c)$

(vi) $(A\cap B^c\cap C^c)\cup(B\cap C^c\cap A^c)\cup(C\cap A^c\cap B^c)$

(vii) $(A\cap B\cap C^c)\cup(B\cap C\cap A^c)\cup(C\cap A\cap B^c)$

根据(v)，也可表示为

$$(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)-(A\cap B-C)$$

(viii)三个事件同时出现的对立事件是$(A\cap B\cap C)^c$。

(ix)因为不论哪一个事件出现，可用$A\cup B\cup C$表示，若排除三个事件同时出现的情形，则有$A\cup B\cup C-(A\cap B\cap C)$。

例题4 在下面的(i)～(iii)中，对于事件A_1，A_2，分别求出$A_1\cup A_2$，$A_1\cap A_2$。

(i) $A_1=\{x;\ x=0,\ 1,\ 2\}$，$A_2=\{x;\ x=2,\ 3,\ 4\}$

(ii) $A_1=\{x;\ 0<x<2\}$，$A_2=\{x;\ 1\leqslant x<3\}$

(iii) $A_1=\{(x,\ y);\ 0<x<2,\ 0<y<2\}$，

$A_2=\{(x, y); 1<x<3, 1<y<3\}$.

解答

(i) $A_1\cup A_2=\{x; x=0, 1, 2, 3, 4\}$

$A_1\cap A_2=\{x; x=2\}$.

(ii) $A_1\cup A_2=\{x; 0<x<3\}$, $A_1\cap A_2=\{x; 1\leqslant x<2\}$,

〔比较(i)和(ii)知：i)是离散的，ii)是连续的〕.

(iii) $A_1\cup A_2=\{(x, y); 0<x<3, 0<y<3\}$

$-\{(x, y); 0<x<1, 2<y<3\}$

$-\{(x, y); 2<x<3, 0<y<1\}$

$A_1\cap A_2=\{(x, y); 1<x<2, 1<y<2\}$

例题 5 求下面所示的事件A的对立事件A^c，其中I为必然事件。

(i) $I=\{x; 0<x<1\}$, $A=\{x; \frac{5}{8}\leqslant x<1\}$

(ii) $I=\{(x, y, z); x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$

$A=\{x, y, z); x^2+y^2+z^2=1\}$

(iii) $I=(x, y); |x|+|y|\leqslant 2\}$, $A=\{(x, y); x^2+y^2<2\}$

解答

(i) $A^c=I-A=\{x; 0<x<\frac{5}{8}\}$.

(ii) $A^c=I-A$ 是半径为 1 的球的内部，即

$A^c=\{(x, y, z); x^2+y^2+z^2<1\}$.

(iii) $A^c=I-A=\{(x, y); x^2+y^2\geqslant 2$ 且 $|x|+|y|\leqslant 2\}$，这是从边长为$\sqrt{8}$，且含边界在内的正方形中，减去其内切圆内部的部分。

例题 6 取$A_1=\{(x, y); 0\leqslant x\leqslant 3, 2\leqslant y\leqslant 5\}$

$A_2=\{(x, y); 2\leqslant x\leqslant 5, 2\leqslant y\leqslant 5\}$

$A_3=\{(x, y); 1\leqslant x\leqslant 4, 0\leqslant y\leqslant 3\}$，求下列诸项：

(i)$A_1\cap(A_2\cup A_3)$

(ii)$(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)$

(iii)$A_1\cup(A_2\cap A_3)$

(iv)$(A_1\cup A_2)\cap(A_1\cup A_3)$

(v)比较(i)，(ii)，(iii)，(iv)

(vi)下列各关系式是否成立？

$$A_1\cap(A_2\cup A_3)=(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)$$

$$A_1\cup(A_2\cap A_3)=(A_1\cup A_2)\cap(A_1\cup A_3)$$

解答

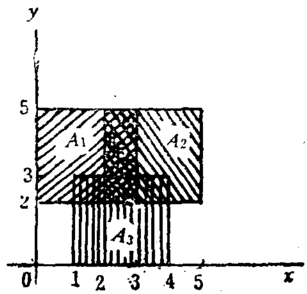

图 3.2

(i)$\{(x,y);\ 1\leqslant x\leqslant 3,\ 2\leqslant y\leqslant 3\}$和$\{(x,y);\ 2\leqslant x\leqslant 3,\ 3\leqslant y\leqslant 5\}$的相加部分。

(ii)和i)的范围相同。

(iii)$\{(x,y);\ 0\leqslant x\leqslant 3,\ 2\leqslant y\leqslant 5\}\cup\{(x,y);\ 3\leqslant x\leqslant 4,\ 2\leqslant y\leqslant 3\}$。

(iv)和iii)的范围相同。

(v)(i)=(ii)，(iii)=(iv)

(vi)以上诸式都成立。

例题 7 设必然事件为$I=\{x;\ -2\leqslant x<2\}$，若$A_1=\{x;\ -2<x<0\}$，$A_2=\{x;\ -1<x<1\}$，讨论以下事件及其相互关系。

(i)$(A_1\cup A_2)^c$； (ii)$A_1^c\cap A_2^c$； (iii)$(A_1\cap A_2)^c$；

(iv)$A_1^c\cup A_2^c$； (v)将i)和ii)及iii)和iv)作比较；

(vi)$(A_1\cup A_2)^c=A_1^c\cap A_2^c$成立否？又，

$(A_1\cap A_2)^c=A_1^c\cup A_2^c$是否成立？

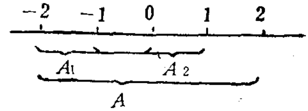

图 3.3

解答

(i)$(A_1\cup A_2)^c=\{x;\ 1\leqslant x<2\}$

(ii)与(i)的范围相同

(iii)因$A_1\cap A_2=\{x;\ -1<x<0\}$，故，$(A_1\cap A_2)^c=\{x;\ -2<x<-1,\ 0<x<2\}$

(iv)与(iii)的范围相同

(v)(i)=(ii)，(iii)=(iv)

(vi)都成立，这是Dé Morgan定律的特例。

例题 8 设集合A是二维平面上点(x,y)的集合。又设$Q(A)$是集合A中x，y的坐标均为正整数的点的数目。这时，若取

$A_1=\{(x,\ y);\ x^2+y^2\leqslant 4\}$，$A_2=\{x,\ y);\ x^2+y^2\leqslant 9\}$

那么，$Q(A_1)$，$Q(A_2)$的值各是多少？

解答

因A_1是半径为 2 的圆周及其内部，在第一象限内坐标均为正整数的点，只有(1，1)，因此

$$Q(A_1)=1$$

对于A_2也同样，在第一象限内坐标均为正整数的点只有(1，1)，(1，2)，(2，2)，因此

$$Q(A_2)=4$$

例题 9 设A是一维空间（直线）上点的集合，又，$Q(A)$是集合A中正整数的个数。取

$A_1=\{x;\ x$是 3 的倍数，且$x<55\}$[1]，

$A_2=\{x;\ x$是 7 的倍数，且$x<50\}$，

求$Q(A_1)$，$Q(A_2)$，$Q(A_1\cup A_2)$，$Q(A_1\cap A_2)$，并验证

$$Q(A_1\cup A_2)=Q(A_1)+Q_2(A)-Q(A_1\cap A_2).$$

解答

$Q(A_1)=18$，$Q(A_2)=7$是显然的。在A_1中为 3 的倍数的正整数有18个，在A_2中为 7 的倍数的正整数有 7 个，其中重复的正整数是21，42，所以

$Q(A_1\cup A_2)=18+7-2=23$，这就表明了

[1] 这里，原书中在大括号内为$x<50$，与解答不一致，故改为$x<55$ ——译者

$$Q(A_1 \cup A_2) = Q(A_1) + Q(A_2) - Q(A_1 \cap A_2).$$

3·1·2 概率定理

基础理论

1. 概率的基本性质及定理

(1)设事件E出现的概率为$p(E)$，则$0 \leqslant p(E) \leqslant 1$。

(2)设必然事件为I，不可能事件为ϕ，

则 $p(I)=1$，$p(\phi)=0$。

(3)加法定理

当事件$E1$，E_2为**互斥事件**（$E_1 \cap E_2 = \phi$）时，

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$$

特别地，$p(E \cup E^c) = p(E) + p(E^c) = 1$。

(4)一般的加法定理

对于两个事件E_1，E_2，有

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

特别是，当$E_1 \cap E_2 = \phi$时，就是(3)的情形。

(5)乘法定理

当事件E_1和E_2是**独立事件**时，有

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2)$$

注意 上式可作为E_1和E_2**相互独立**的定义。

(6)一般的乘法定理

对于事件E_1，E_2，在E_1出现的条件下出现E_2这一事件，记作E_2/E_1。其概率（**条件概率**）记作$p(E_2/E_1)$或$p_{E1}(E_2)$。若E_1和E_2**同时出现的概率**为$p(E_1 \cap E_2)$，则

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2/E_1) = p(E_2) \cdot p(E_1/E_2)$$

2. 贝叶斯（Bayes）定理 （作为原因的）事件E_i（$i=1, 2, \cdots, n$）中，若有$E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = I$，$E_i \cap E_j = \phi (i \neq j)$，则对任意的（作为结果的）事件$E$，有下式成立

$$p(E_k/E)=\frac{p(E_k)\cdot p(E/E_k)}{p(E)}$$

$$=\frac{p(E_k)\cdot p(E/E_k)}{p(E_1)\cdot p(E/E_1)+p(E_2)\cdot p(E/E_2)+\cdots+p(E_n)\cdot p(E/E_n)}$$

注意 有n个原因，设由其各自的原因引起的事件为$E_i(i=1, 2, \cdots, n)$，E_i引出结果E，其条件概率为$p(E/E_i)$。反之，若事件E作为原因而产生E_k（即E作为E_k产生的原因），其条件概率为$p(E_k/E)$。这时，把$p(E_i)(i=1, 2, \cdots, n)$称为**先验概率**，$p(E_k/E)$称为**后验概率**（或**原因概率**）。从而$Bayes$定理实际是利用已知来推测未知，也就是利用**结果来推测原因**。$p(E/E_i)$等可记$p(E/E_i)$。

例题10 回答下列各问题

(i)同时掷两个骰子，求点数之和为偶数的概率。

(ii)同时抛三枚铜板，

①三枚都得正面的概率；

②二枚是正面，一枚是反面的概率；

③至少有一枚是反面的概率。

(iii)一枚铜板抛六次，求恰好有四次是正面的概率。

(iv)一颗骰子掷三次，求其中2次点数是1的概率。又，求至少有一次点数是1的概率。

(v)同时掷五颗骰子，求下面的概率

①至少一颗出现6点；

②三颗都出现6点；

③三颗是偶数点，另两颗是奇数点；

④两颗是5点，另两颗是6点，剩下的一颗是5、6以外的点数；

⑤五颗点数之和是8。

解答

(i)概率p=(点数之和为偶数的场次数)/(场次总数)

$=18/6^2=1/2=0.5$