1981 高中毕业生总复习纲要

数学

GAOZHONG BIYESHENG ZONGFUXI GANGYAO

福建人民教育出版社

一九八一年高中毕业生

数学总复习纲要

上 册

福 建 教 育 学 院 编

福建人民教育出版社

一九八一年高中毕业生

数 学 总 复 习 纲 要

上 册

福建教育学院编

*

福建人民教育出版社出版

福 建 省 新 华 书 店 发 行

福 建 新 华 印 刷 厂 印 刷

开本:787×1092 1/32 印张:10.25 字数:230千字

1981年1月第一版 1981年1月第一次印刷

印数1—515,800

统一书号: 7159·572. 定价: 0.75元

编 者 的 话

本《纲要》是根据“全日制十年制学校中学数学教学大纲”的要求编写的，供1981年高中毕业生系统地复习中学阶段所学的基础知识和担任总复习课的教师教学参考用。

本《纲要》分上、下两册，包括代数、几何、三角和平面解析几何等四部分。各部分都首先把中学数学教材中的基础知识进行综合、概括，使学生通过复习获得比较系统和扎实的基础知识；然后围绕教材的重点和关键，选择较有启发性的范例和练习题，帮助学生更好地掌握数学的基本概念、定理、公式和法则，灵活、准确地应用这些知识进行解题，以提高他们的运算能力、逻辑推理和逻辑表达能力以及分析、解决问题的能力。

《纲要》中对某些基础知识只提出纲目或概括成图表，如果学生对这些知识有所遗忘或缺漏，必须根据全国统编的全日制十年制中学数学课本进行复习。为了突出说明某些数学知识的应用，有的范例所采用的解题或证题的方法并不是最简捷的，有的也不完整。《纲要》中的基本练习题应根据不同班级的实际需要适当增补，复习题中有一部分难度比较大的题目，仅供解题能力比较强的学生选做。

在编写过程中，许多老师给我们提供许多宝贵的意见和建议，特此表示感谢！但限于我们的水平，《纲要》中必定还存在缺点，需要进一步通过教学实践来修改、充实和提高。我们殷切地期望老师和同学们随时给予批评和指正。

福建教育学院数学组

一九八〇年十月

目　　录

代　　数

几　何

代　数

一、集　合

（一）集合

具有某种属性的一些对象看做一个整体便形成一个集合。集合里的各个对象叫做集合的元素。

1.常用的集合表示方法

（1）列举法　把集合的元素一一列举出来，写在大括号内用来表示集合。

（2）描述法　把描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素的规律，写在大括号内用来表示集合。

（3）字母表示法　常用大写拉丁字母表示集合，用小写拉丁字母表示元素。

如果a是集合A的元素，就说a属于集合A，表示为$a\in A$；

如果a不是集合A的元素，就说a不属于A，表示为$a\bar{\in} A$。

常用N表示自然数的集合，J表示整数的集合，Q表示有理数的集合，R表示实数的集合，C表示复数的集合。

2.集合的一般概念

（1）子集　对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么，集合A就叫做集合B的子集，表示为

$$A\subseteq B\text{或}B\supseteq A,$$

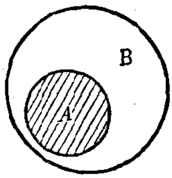

图　1·1

如果A是B的子集，并且B中至少有一

个元素不属于A，那么集合A就叫做集合B的真子集，表示为

$$A\subset B \text{或} B\supset A \text{（图1·1）}.$$

（2）相等　对于两个集合A、B，如果$A\subseteq B$，同时$B\subseteq A$，那么，集合A和集合B就叫做相等，表示为

$$A=B.$$

（3）空集　不含任何元素的集合叫做空集，用符号ϕ表示。

（4）交集　由同时属于A和B的一切元素所组成的集合，叫做集合A与B的交集，表示为$A\cap B$.

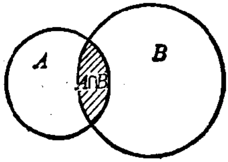

图 1·2

图1·2中的阴影部分，表示集合A与B的交集$A\cap B$.

（5）并集　由属于A或者属于B的一切元素所组成的集合，叫做集合A与B的并集，表示为

$$A\cup B.$$

图1·3甲、乙中的阴影部分，表示集合A与B的并集$A\cup B$.

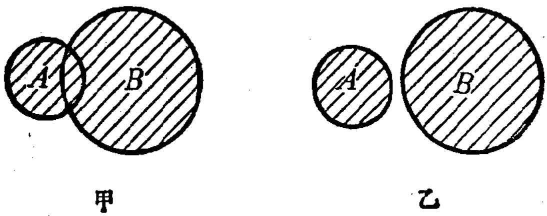

图 1·3

（6）全集　在研究集合与集合之间的关系时，这些集合常常是某一个给定集合的子集，这个给定的集合叫做全集，用符号I表示。也就是说，全集包含了我们所要研究的各个集合的全部元素。

（7）补集　已知全集I，$A\subseteq I$，由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A的补集，表示为$\overline{A}$。

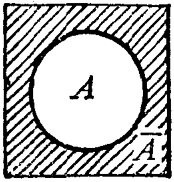

图 1·4

图1·4中的长方形表示全集I，圆表示集合A，阴影部分表示集合A的补集$\overline{A}$。

（二）集合运算性质*：

1. $A\cup I=I$；　　$A\cap\phi=\phi$。
2. $A\cup\overline{A}=I$；　　$A\cap\overline{A}=\phi$。
3. $A\cup B=B\cup A$；　　$A\cap B=B\cap A$。
4. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；
   $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。
5. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；
   $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。
6. $A\cup(A\cap B)=A$；　　$A\cap(A\cup B)=A$。
7. $A\cup A=A$；　　$A\cap A=A$。
8. $A\cup\phi=A$；　　$A\cap I=A$。
9. $\overline{\overline{A}}=A$。
10. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；　　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。
11. $A\subseteq A$；　　$\phi\subseteq A$；　　$A\subseteq I$。
12. $A\cup B\supseteq A$（或B）$\supseteq A\cap B$。
13. 若　$A\subseteq B\subseteq C$，　则　$A\subseteq C$。
    若　$A\subset B\subset C$，　则　$A\subset C$。

（三）集合元素的个数的运算性质*：

集合A的元素的个数记以$n(A)$。

---

*这部分内容供选学，下同。

1. 若 $A\cap B=\phi$, 则 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$;

若 $A\cap B\neq\phi$,

则 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

2. 任意集合A、B、C, 则

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$.

例 1 大于3小于11的偶数集用描述法与列举法表示出来。

解: (1) 描述法 $\{x: x=2n,\ 3<x<11,\ n\in J\}$;

(2) 列举法 $\{4,6,8,10\}$.

例 2 设 $A=\{x: x\leq 8,\ x\in N\}$,

$B=\{y: y^2-7y-8=0,\ y\in N\}$,

$C=\{x: x\neq x,\ x\in N\}$,

求 $A\cup B$; $A\cap B$; $A\cap\bar{B}$; $A\cup C$; $A\cap\bar{C}$.

解 $\because$ $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,

$B=\{8\}$, $C=\phi$.

$\bar{B}=\{y: y\neq 8,\ y\in N\}$, $\bar{C}=N$.

$\therefore$ $A\cup B=A$; $A\cap B=B$;

$A\cap\bar{B}=\{1,2,3,4,5,6,7\}$;

$A\cup C=A\cup\phi=A$;

$A\cap\bar{C}=A\cap N=A\cap I=A$.

例 3 如果 $A\subseteq C$, $B\subseteq C$, 则 $A\cup B\subseteq C$.

证明 若 $A\cup B=\phi$, 显然$A\cup B\subseteq C$;

若 $A\cup B\neq\phi$, 则在$A\cup B$中任意取一元素x,

则 $x\in A$或$x\in B$, 又$A\subseteq C$, $B\subseteq C$,

因而 $x\in C$.

即 $A\cup B$中的元素，都是C的元素。

∴ $A\cup B\subseteq C$。

例 4 用直角坐标系的图象表示下面的集合：

$A=\{(x,y):x\in J,\quad y=|x+1|\}$；

$B=\{(x,y):x\in R^{+},\quad y=[x]\}$.

其中R^{+}为正实数，$[x]$为x的最大整数部分。

解：图1·5表示集合A的图象，图1·6表示集合B的图象。

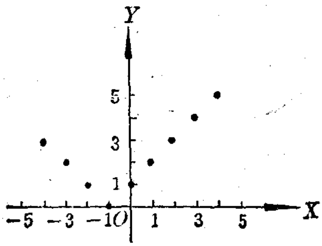

图 1·5

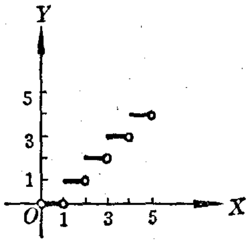

图 1·6

例 5 某校先后分别举行数学、物理、化学竞赛，参加的学生中，数学807人，物理739人，化学437人；而参加数学也参加物理考试的593人，参加数学也参加化学考试的371人，参加物理也参加化学考试的267人；既参加数学又参加物理又参加化学考试的213人。问参加竞赛的学生总数多少？

解： 设A、B、C分别表示参加数学、物理、化学的学生集合，因而$n(A)=870$，$n(B)=739$，$n(C)=437$，$n(A\cap B)=593$，$n(A\cap C)=371$，$n(B\cap C)=267$，$n(A\cap B\cap C)=213$。

∴ $n(A\cup B\cup C)=870+739+437-593$

$$-371-267+213=965.$$

所有参加竞赛的学生总数为965人。

练 习 1·1

1. 将下列集合用描述法表示出来：

$A=\{1,3\}$； $B=\left\{\frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 1\right\}$；

$C=\{\cdots\cdots,\ -4,-2,0,2,4,\cdots\cdots\}$；

$D=\{1,4,9,16,\cdots\cdots\}$。

2. 将下面集合用列举法表示出来：

$A=\{x: x\in N,\ 5<x<8\}$；

$B=\{w: w\in J,\ |w|<5\}$；

$C=\{y: y\in R,\ y^2-5y+2=0\}$；

$D=\{z: z\in C,\ z^3=1\}$。

3. 求适合条件的集合：

(1) $\{x: x=x+1\}$；

(2) $F=\{x: x\in J,\ 0<x<5\}$，$G=\{y: y\in J,\ 4\leqslant y<7\}$，求 $F\cap G$；$F\cup G$； $F\cap\overline{G}$。

(3) $I=\{x: |x-1|<1,\ x\in R\}$，$A=\{x: 0<x<1\}$。求$\overline{A}$。

4. 已知 $E=\{x: x=2n,\ n\in J\}$，$D=\{y: y=2n+1,\ n\in J\}$，$P=\{w: 0<w<25,\ w\in J\}$，$T=\{z: z=3n,\ n\in J\}$。

求 (1) $E\cup D$； (2) $E\cap D$； (3) $N\cap P$； (4) $J\cap\overline{E}$；
(5) $P\cap D$； (6) $(N\cap E)\cap T$； (7) $(E\cap T)\cap P$。

5. 用直角坐标系的图象（或阴影）表示下列集合：

(1) $\{(x,\ y): x=1,\ y\in R\}$；

(2) $\{(x,\ y): x\in R,\ y\in R,\ x<0,\ y>0\}$；

(3) $\{(x,\ y): x=1,\ y=1\}$；

(4) $\{(x,\ y): x\in R,\ y\in R,\ |x+y|=1\}$；

(5) $\{(x,\ y): x\in R,\ y\in R,\ |x|+|y|=5\}$；

(6) $\{(x,\ y): x\in R,\ y\in R,\ |x|-|y|=5\}$;

(7) $\{(x,\ y): x\in N,\ y\in R,\ y=2x\}$;

(8) $\{(x,\ y): x\in J,\ y\in J,\ 0<x<4,\ 0<y<3\}$.

6. 证明　如果$A\subseteq B$，任意集合C，

则　$A\cup C\subseteq B\cup C$，$A\cap C\subseteq B\cap C$。

7. 已知　$A\subseteq\phi$，　证明　$A=\phi$。

8. 已知　$A=B$，$A=\{c,\ a,\ b\}$，$B=\{a,\ x,\ b\}$。

求　x。

9. 若　$A\cup B=\phi$，$C=\{1,\ 2,\ 3\}$，问$A\cap C=$？$A\cup C=$？

10. 若　$A\cap B=I$，$A=\{1,\ 2,\ 3\}$，求I；B。

11. 若　$A\cap B=\phi$，能否推得$A=\phi$或$B=\phi$？为什么？

12. 若　$A\cap B=A\cap C$，能否推得$B=C$？为什么？

13. 若　$A\cup B=A\cup C$，能否推得$B=C$？为什么？

14. 若　$A=\{1,\ 3,\ 5\}$，$\bar{A}=\{2,\ 4,\ 6\}$，$B=\{1,\ 2\}$。

求　$\bar{B}$；$\overline{A\cup B}$；$\bar{A}\cap\bar{B}$。

15. 有a、b、c三片电影，至少看过其中一片电影的有18人，看过a，b，c的分别有9人，8人，11人。同时看过a，b的5人；看过b，c的3人；看过c，a的4人。a，b，c全都看过的有几人？

16. 在集合$\{x:100<x<300,x\in J\}$中，有多少个能被7或11整除的数。

二、数与代数式

(一) 数

1. 数集的系统表

$$
\{\text{复数}\}\supset\left\{\begin{array}{l}
\{\text{实数}\}\supset\left\{\begin{array}{l}
\{\text{有理数}\}\supset\left\{\begin{array}{l}
\{\text{整数}\}\supset\left\{\begin{array}{l}\{\text{正整数}\}=\{\text{自然数}\}\\ \{0\}\\ \{\text{负整数}\}\end{array}\right.\\
\{\text{分数}\}=\{\text{有限小数}\}\cup\{\text{无限循环小数}\}
\end{array}\right.\\
\{\text{无理数}\}=\{\text{无限不循环小数}\}
\end{array}\right.\\
\{\text{虚数}\}\supset\{\text{纯虚数}\}
\end{array}\right.
$$

2. 自然数集$N=\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$.

性质

①自然数是无限多的；它有最小的数1，没有最大的数；

②任意两个自然数都可以比较大小，即自然数是有顺序的；

③在自然数集内的数施行加、乘、乘方运算的结果仍是自然数集内的数。

3. 整数集

正整数（自然数）、零、负整数（自然数的相反数）总称整数。

性质

①在整数集内无最小的数，亦无最大的数；

②在整数集内任意两个数可以比较它们的大小；

③在整数集内的数施行加、减、乘、乘方四种运算的结果仍是整数集内的数。

4. 有理数集

整数、分数总称有理数（即一切有限小数、无限循环小数）。

设p，q为整数，若$q\neq0$，则有理数可以表示成$\frac{p}{q}$的形式。

① $\frac{p}{q}=\frac{pm}{qm}(m\neq0)$。根据这个性质可以进行通分和约分。分子和分母是互质数的分数叫做既约分数（最简分数）。

②当一个既约分数的分母只含有2和5的因数时可化为有限小数；如含有2和5以外的质因数时只能化为无限循环小数。

性质

①在有理数集内没有最小的数，也没有最大的数；

②在有理数集内任意两个数可以比较它们的大小；

③在有理数集内的数施行加、减、乘、除（除数不为零）、乘方五种运算结果仍是有理数集内的数。

5．实数集　有理数、无理数总称为实数。

（1）性质

①在实数集内无最小的数，亦无最大的数；

②在实数集内的数与数轴（规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴）上的点建立一一对应关系．这就是：任意一个实数都有数轴上确定的一个点与它对应；反过来，数轴上的任意一个点，也都有确定的一个实数与它对应；

③在实数集内任意两个数可以比较它们的大小；

实数大小的比较，可以按实数在数轴上所对应的点的排列顺序来比较，在数轴上的点越往右，它表示的数就越大，也就是任何正实数都大于零，任何负实数都小于零，任何正实数都大于任何负实数。

④在实数集内的数施行加、减、乘、除(除数不为零)、乘方五种运算结果仍是实数集内的数。

（2）实数的绝对值　若a是实数，$|a|$叫做a的绝对值．

$$|a|=\begin{cases}a & (当a\geqslant 0时);\\ -a & (当a<0时).\end{cases}$$

$|a|$在数轴上是表示实数a的点至原点的距离。

（3）实数的运算定律

①交换律　$a+b=b+a$；$a\cdot b=b\cdot a$；

②结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$；$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

③分配律　$a(b+c)=ab+ac$。

运算时，如果运算的式子里没有括号，就要先算乘方、开方，次算乘、除，最后算加、减；如果有括号，就先算括