

1981 高中毕业生
总复习纲要

数学

GAOZHONG
BIYESHENG
ZONGFUXI
GANGYAO

福建人民教育出版社

一九八一年高中毕业生

数学总复习纲要

上册

福建教育学院编

福建人民教育出版社

一九八一年高中毕业生
数 学 总 复 习 纲 要
上 册
福建教育学院编

★

福建人民教育出版社出版
福建省新华书店发行
福建新华印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 10.25 字数: 230千字

1981年1月第一版 1981年1月第一次印刷

印数1—515,800

统一书号: 7159·572. 定价: 0.75元

编 者 的 话

本《纲要》是根据“全日制十年制学校中学数学教学大纲”的要求编写的，供1981年高中毕业生系统地复习中学阶段所学的基础知识和担任总复习课的教师教学参考用。

本《纲要》分上、下两册，包括代数、几何、三角和平面解析几何等四部分。各部分都首先把中学数学教材中的基础知识进行综合、概括，使学生通过复习获得比较系统和扎实的基础知识；然后围绕教材的重点和关键，选择较有启发性的范例和练习题，帮助学生更好地掌握数学的基本概念、定理、公式和法则，灵活、准确地应用这些知识进行解题，以提高他们的运算能力、逻辑推理和逻辑表达能力以及分析、解决问题的能力。

《纲要》中对某些基础知识只提出纲目或概括成图表，如果学生对这些知识有所遗忘或缺漏，必须根据全国统编的全日制十年制中学数学课本进行复习。为了突出说明某些数学知识的应用，有的范例所采用的解题或证题的方法并不是最简捷的，有的也不完整。《纲要》中的基本练习题应根据不同班级的实际需要适当增补，复习题中有一部分难度比较大的题目，仅供解题能力比较强的学生选做。

在编写过程中，许多老师给我们提供许多宝贵的意见和建议，特此表示感谢！但限于我们的水平，《纲要》中必定还存在缺点，需要进一步通过教学实践来修改、充实和提高。我们殷切地期望老师和同学们随时给予批评和指正。

福建教育学院数学组

一九八〇年十月

目 录

代 数

一、集合	(1)
(一) 集合	(1)
(二) * 集合运算性质	(3)
(三) * 集合元素的个数的运算性质	(3)
二、数与代数式	(7)
(一) 数	(7)
(二) 代数式	(25)
三、方程与方程组	(43)
(一) 方程的基本知识	(43)
(二) 方程	(44)
(三) 行列式	(68)
(四) 方程组	(73)
(五) 列方程(组)解应用题	(84)
四、不等式	(94)
(一) 不等式的概念和性质	(94)
(二) 不等式和不等式组的解法	(95)
(三) 不等式的证明与最大最小值	(107)
五、函数	(114)
(一) 初等函数的分类表	(114)

(二) 对应·····	(115)
(三) 函数的基本概念·····	(116)
(四) 函数关系的表示法·····	(116)
(五) 函数的一些重要性质·····	(117)
(六) 反函数·····	(118)
(七) 几种代数函数·····	(122)
六、指数与对数·····	(137)
(一) 指数的概念和运算法则·····	(137)
(二) 对数的概念·····	(138)
(三) 指数函数与对数函数·····	(139)
(四) 积、商、幂、方根的对数和对数的换底公式·····	(141)
(五) 常用对数·····	(141)
(六) 简单的指数方程和对数方程·····	(147)
七、数列和极限·····	(156)
(一) 数列的概念和数列的通项公式·····	(156)
(二) 等差数列与等比数列·····	(156)
(三) 数列极限与函数极限·····	(164)
八、排列、组合和二项式定理·····	(177)
(一) 加法原理和乘法原理·····	(177)
(二) 排列与组合·····	(178)
(三) 数学归纳法·····	(182)
(四) 二项式定理·····	(185)

几 何

一、几何定理的证明·····	(195)
(一) 定义和命题·····	(195)

(二) 公理和定理·····	(197)
(三) 定理的证明·····	(197)
二、相交线与平行线·····	(205)
(一) 线段、射线、直线·····	(205)
(二) 相交线·····	(205)
(三) 平行线·····	(208)
(四) 成比例线段·····	(209)
三、多边形·····	(214)
(一) 三角形·····	(214)
(二) 四边形·····	(232)
(三) 多边形·····	(234)
四、圆·····	(242)
(一) 圆的基本性质·····	(242)
(二) 关于圆的比例线段·····	(243)
(三) 圆心角、圆周角和弦切角定理·····	(244)
(四) 判定四边形内接于圆的定理·····	(244)
(五) 圆内接四边形的性质·····	(244)
(六) 圆的切线·····	(245)
(七) 两圆的位置关系·····	(245)
(八) 弧长与面积的计算公式·····	(245)
五、几何定理证明小结·····	(256)
(一) 证明两条线段相等·····	(256)
(二) 证明两个角相等·····	(257)
(三) 证明两直线互相平行·····	(257)
(四) 证明两直线互相垂直·····	(258)
(五) 证明诸线段成等比或等积·····	(258)
(六) 证明线段或角的不等关系·····	(258)

(七) 证明线段(或角)的和、差、倍、分问题·····	(259)
(八) 关于图形面积的证明题·····	(259)
六、基本轨迹和作图题·····	(267)
(一) 基本轨迹·····	(267)
(二) 作图题·····	(268)
七、直线与平面·····	(274)
(一) 平 面·····	(274)
(二) 直线与直线的位置关系·····	(275)
(三) 直线与平面的位置关系·····	(276)
(四) 平面与平面的位置关系·····	(278)
八、简单几何体·····	(289)
(一) 多面体·····	(289)
(二) 旋转体·····	(291)
(三) 简单几何体的侧面积与体积的计算公式·····	(293)

代 数

一、集 合

(一) 集合

具有某种属性的一些对象看做一个整体便形成一个集合。集合里的各个对象叫做集合的元素。

1. 常用的集合表示方法

(1) 列举法 把集合的元素一一列举出来，写在大括号内用来表示集合。

(2) 描述法 把描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素的规律，写在大括号内用来表示集合。

(3) 字母表示法 常用大写拉丁字母表示集合，用小写拉丁字母表示元素。

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A ，表示为 $a \in A$ ；

如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A ，表示为 $a \notin A$ 。

常用 N 表示自然数的集合， J 表示整数的集合， Q 表示有理数的集合， R 表示实数的集合， C 表示复数的集合。

2. 集合的一般概念

(1) 子集 对于两个集合 A 与 B ，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么，集合 A 就叫做集合 B 的子集，表示为

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A,$$

如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一

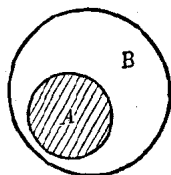


图 1.1

个元素不属于 A ,那么集合 A 就叫做集合 B 的真子集,表示为
 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ (图1·1).

(2) 相等 对于两个集合 A 、 B ,如果 $A \subseteq B$,同时
 $B \subseteq A$,那么,集合 A 和集合 B 就叫做相等,表示为
 $A = B$.

(3) 空集 不含任何元素的集合叫做空集,用符号 ϕ
 表示.

(4) 交集 由同时属于 A 和 B
 的一切元素所组成的集合,叫做集合
 A 与 B 的交集,表示为 $A \cap B$.

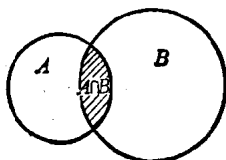


图 1·2

图1·2中的阴影部分,表示集合
 A 与 B 的交集 $A \cap B$.

(5) 并集 由属于 A 或者属于 B 的一切元素所组成的
 集合,叫做集合 A 与 B 的并集,表示为
 $A \cup B$.

图1·3甲、乙中的阴影部分,表示集合 A 与 B 的并集 $A \cup B$.

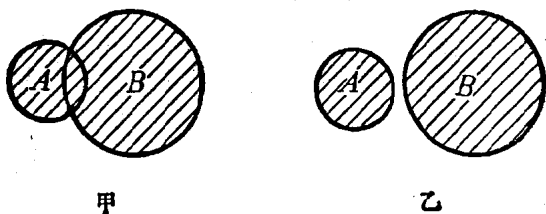


图 1·3

(6) 全集 在研究集合与集合之间的关系时,这些
 集合常常是某一个给定集合的子集,这个给定的集合叫做
 全集,用符号 I 表示.也就是说,全集包含了我们所要研究的
 各个集合的全部元素.

(7) 补集 已知全集 I , $A \subseteq I$, 由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做集合 A 的补集, 表示为 $\bar{A}$.

图 1·4 中的长方形表示全集 I , 圆表示集合 A , 阴影部分表示集合 A 的补集 $\bar{A}$.

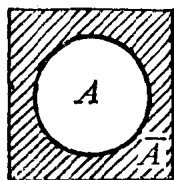


图 1·4

(二) 集合运算性质*:

1. $A \cup I = I$; $A \cap \phi = \phi$.
2. $A \cup \bar{A} = I$; $A \cap \bar{A} = \phi$.
3. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
6. $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$.
7. $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.
8. $A \cup \phi = A$; $A \cap I = A$.
9. $\bar{\bar{A}} = A$.
10. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
11. $A \subseteq A$; $\phi \subseteq A$; $A \subseteq I$.
12. $A \cup B \supseteq A$ (或 B) $\supseteq A \cap B$.
13. 若 $A \subseteq B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.
若 $A \subset B \subset C$, 则 $A \subset C$.

(三) 集合元素的个数的运算性质*:

集合 A 的元素的个数记以 $n(A)$.

* 这部分内容供选学, 下同.

1. 若 $A \cap B = \phi$, 则 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$;

若 $A \cap B \neq \phi$,

则 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

2. 任意集合 A, B, C , 则

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

例 1 大于 3 小于 11 的偶数集用描述法与列举法表示出来.

解: (1) 描述法 $\{x: x=2n, 3 < x < 11, n \in J\}$;

(2) 列举法 $\{4, 6, 8, 10\}$.

例 2 设 $A = \{x: x \leq 8, x \in N\}$,

$$B = \{y: y^2 - 7y - 8 = 0, y \in N\},$$

$$C = \{x: x \neq x, x \in N\},$$

求 $A \cup B, A \cap B, A \cap \bar{B}, A \cup C, A \cap \bar{C}$.

解 $\because A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

$$B = \{8\}, C = \phi.$$

$$\bar{B} = \{y: y \neq 8, y \in N\}, \bar{C} = N.$$

$$\therefore A \cup B = A, A \cap B = B,$$

$$A \cap \bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\};$$

$$A \cup C = A \cup \phi = A,$$

$$A \cap \bar{C} = A \cap N = A \cap I = A.$$

例 3 如果 $A \subseteq C, B \subseteq C$, 则 $A \cup B \subseteq C$.

证明 若 $A \cup B = \phi$, 显然 $A \cup B \subseteq C$;

若 $A \cup B \neq \phi$, 则在 $A \cup B$ 中任意取一元素 x ,

则 $x \in A$ 或 $x \in B$, 又 $A \subseteq C, B \subseteq C$,

因而 $x \in C$.

即 $A \cup B$ 中的元素, 都是 C 的元素.

$$\therefore A \cup B \subseteq C.$$

例 4 用直角坐标系的图象表示下面的集合:

$$A = \{(x, y) : x \in J, \quad y = |x + 1|\};$$

$$B = \{(x, y) : x \in R^+, \quad y = [x]\}.$$

其中 R^+ 为正实数, $[x]$ 为 x 的最大整数部分.

解: 图 1.5 表示集合 A 的图象, 图 1.6 表示集合 B 的图象.

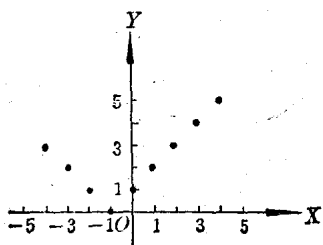


图 1.5

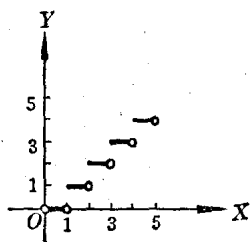


图 1.6

例 5 某校先后分别举行数学、物理、化学竞赛, 参加的学生中, 数学 807 人, 物理 739 人, 化学 437 人; 而参加数学也参加物理考试的 593 人, 参加数学也参加化学考试的 371 人, 参加物理也参加化学考试的 267 人; 既参加数学又参加物理又参加化学考试的 213 人. 问参加竞赛的学生总数多少?

解: 设 A 、 B 、 C 分别表示参加数学、物理、化学的学生集合, 因而 $n(A) = 870$, $n(B) = 739$, $n(C) = 437$, $n(A \cap B) = 593$, $n(A \cap C) = 371$, $n(B \cap C) = 267$, $n(A \cap B \cap C) = 213$.

$$\therefore n(A \cup B \cup C) = 870 + 739 + 437 - 593$$

$$-371 - 267 + 213 = 965.$$

所有参加竞赛的学生总数为965人。

练习 1.1

1. 将下列集合用描述法表示出来:

$$A = \{1, 3\}; \quad B = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1 \right\};$$

$$C = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\};$$

$$D = \{1, 4, 9, 16, \dots\}.$$

2. 将下面集合用列举法表示出来:

$$A = \{x : x \in \mathbb{N}, 5 < x < 8\};$$

$$B = \{w : w \in \mathbb{J}, |w| < 5\};$$

$$C = \{y : y \in \mathbb{R}, y^2 - 5y + 2 = 0\};$$

$$D = \{z : z \in \mathbb{C}, z^3 = 1\}.$$

3. 求适合条件的集合:

$$(1) \{x : x = x + 1\};$$

$$(2) F = \{x : x \in \mathbb{J}, 0 < x < 5\}, G = \{y : y \in \mathbb{J}, 4 \leq y < 7\},$$

$$\text{求 } F \cap G; F \cup G; F \cap \overline{G}.$$

$$(3) I = \{x : |x - 1| < 1, x \in \mathbb{R}\}, A = \{x : 0 < x < 1\}.$$

$$\text{求 } \overline{A}.$$

4. 已知 $E = \{x : x = 2n, n \in \mathbb{J}\}$, $D = \{y : y = 2n + 1, n \in \mathbb{J}\}$,

$$P = \{w : 0 < w < 25, w \in \mathbb{J}\}, T = \{z : z = 3n, n \in \mathbb{J}\}.$$

$$\text{求 } (1) E \cup D; (2) E \cap D; (3) N \cap P; (4) J \cap \overline{E};$$

$$(5) P \cap D; (6) (N \cap E) \cap T; (7) (E \cap T) \cap P.$$

5. 用直角坐标系的图象 (或阴影) 表示下列集合:

$$(1) \{(x, y) : x = 1, y \in \mathbb{R}\};$$

$$(2) \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x < 0, y > 0\};$$

$$(3) \{(x, y) : x = 1, y = 1\};$$

$$(4) \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, |x + y| = 1\};$$

$$(5) \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| = 5\};$$

- (6) $\{ (x, y) : x \in R, y \in R, |x| - |y| = 5 \};$
 (7) $\{ (x, y) : x \in N, y \in R, y = 2x \};$
 (8) $\{ (x, y) : x \in J, y \in J, 0 < x < 4, 0 < y < 3 \}.$

6. 证明 如果 $A \subseteq B$, 任意集合 C ,

则 $A \cup C \subseteq B \cup C, A \cap C \subseteq B \cap C.$

7. 已知 $A \subseteq \phi$, 证明 $A = \phi.$

8. 已知 $A = B, A = \{c, a, b\}, B = \{a, x, b\}.$

求 $x.$

9. 若 $A \cup B = \phi, C = \{1, 2, 3\}$, 问 $A \cap C = ? A \cup C = ?$

10. 若 $A \cap B = I, A = \{1, 2, 3\}$, 求 $I; B.$

11. 若 $A \cap B = \phi$, 能否推得 $A = \phi$ 或 $B = \phi$? 为什么?

12. 若 $A \cap B = A \cap C$, 能否推得 $B = C$? 为什么?

13. 若 $A \cup B = A \cup C$, 能否推得 $B = C$? 为什么?

14. 若 $A = \{1, 3, 5\}, \bar{A} = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 2\}.$

求 $\bar{B}; \overline{A \cup B}; \overline{A \cap B}.$

15. 有 a, b, c 三片电影, 至少看过其中一片电影的有 18 人, 看过 a, b, c 的分别有 9 人, 8 人, 11 人. 同时看过 a, b 的 5 人; 看过 b, c 的 3 人; 看过 c, a 的 4 人. a, b, c 全都看过的有几人?

16. 在集合 $\{x: 100 < x < 300, x \in J\}$ 中, 有多少个数能被 7 或 11 整除的数.

二、数 与 代 数 式

(一) 数

1. 数集的系统表

$$\begin{aligned}
 \{\text{复数}\} &= \begin{cases} \{\text{实数}\} = \begin{cases} \{\text{有理数}\} = \begin{cases} \{\text{整数}\} = \begin{cases} \{\text{正整数}\} = \{\text{自然数}\} \\ \{0\} \\ \{\text{负整数}\} \end{cases} \\ \{\text{分数}\} = \{\text{有限小数}\} \cup \{\text{无限循环小数}\} \\ \{\text{无理数}\} = \{\text{无限不循环小数}\} \end{cases} \\ \{\text{虚数}\} = \{\text{纯虚数}\} \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

2. 自然数集 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$.

性质

① 自然数是无限多的，它有最小的数1，没有最大的数；

② 任意两个自然数都可以比较大小，即自然数是有顺序的，

③ 在自然数集内的数施行加、乘、乘方运算的结果仍是自然数集内的数。

3. 整数集

正整数（自然数）、零、负整数（自然数的相反数）总称整数。

性质

① 在整数集内无最小的数，亦无最大的数；

② 在整数集内任意两个数可以比较它们的大小；

③ 在整数集内的数施行加、减、乘、乘方四种运算的结果仍是整数集内的数。

4. 有理数集

整数、分数总称有理数（即一切有限小数、无限循环小数）。

设 p, q 为整数，若 $q \neq 0$ ，则有理数可以表示成 $\frac{p}{q}$ 的形式。

① $\frac{p}{q} = \frac{pm}{qm} (m \neq 0)$ 。根据这个性质可以进行通分和约分。分子和分母是互质数的分数叫做既约分数（最简分数）。

② 当一个既约分数的分母只含有2和5的因数时可化为有限小数；如含有2和5以外的质因数时只能化为无限循环小数。

性质

① 在有理数集内没有最小的数，也没有最大的数；

②在有理数集内任意两个数可以比较它们的大小；

③在有理数集内的数施行加、减、乘、除（除数不为零）、乘方五种运算结果仍是有理数集内的数。

5. 实数集 有理数、无理数总称为实数。

(1) 性质

①在实数集内无最小的数，亦无最大的数；

②在实数集内的数与数轴（规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴）上的点建立一一对应关系。这就是：任意一个实数都有数轴上确定的一个点与它对应；反过来，数轴上的任意一个点，也都有确定的一个实数与它对应；

③在实数集内任意两个数可以比较它们的大小；

实数大小的比较，可以按实数在数轴上所对应的点的排列顺序来比较，在数轴上的点越往右，它表示的数就越大，也就是任何正实数都大于零，任何负实数都小于零，任何正实数都大于任何负实数。

④在实数集内的数施行加、减、乘、除（除数不为零）、乘方五种运算结果仍是实数集内的数。

(2) 实数的绝对值 若 a 是实数， $|a|$ 叫做 a 的绝对值。

$$|a| = \begin{cases} a & (\text{当 } a \geq 0 \text{ 时}) \\ -a & (\text{当 } a < 0 \text{ 时}) \end{cases}$$

$|a|$ 在数轴上是表示实数 a 的点至原点的距离。

(3) 实数的运算定律

①交换律 $a+b=b+a$ ； $a \cdot b=b \cdot a$ ；

②结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$ ； $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$ ；

③分配律 $a(b+c)=ab+ac$ 。

运算时，如果运算的式子里没有括号，就要先算乘方、开方，次算乘、除，最后算加、减；如果有括号，就先算括