●大学数学学习指导●

# 线性代数
# 解题方法和技巧

# 线性代数
# 解题方法和技巧

毛纲源　编著

湖南大学出版社

# 线性代数
# 解题方法和技巧

毛纲源　编著

☆

湖南大学出版社出版发行
（长沙岳麓山）
湖南省新华书店经销　湘潭大学印刷厂印刷

☆

787×1092毫米　32开本　10.375印张　233千字
1987年11月第一版　1987年11月第一次印刷
印数：0001—9500册
ISBN 7—314—00163-4/0·2
统一书号：13412·10　定价：2.20元

# 前 言

学生学习线性代数、高等代数时，常反映："题目难做，不知从何下手。"针对这一情况，我编写了《高等代数解题方法选讲》。试用中取得了较好的效果，受到了校内外好评。这次应读者要求，进行了较大的修改和补充，改名为《线性代数解题方法和技巧》正式出版。

本书不同于一般的教科书、习题集和题解，它是解题方法与技巧的归纳总结，其特点是把线性代数、高等代数的主要内容结合研究生入学试题按问题性质归纳分类，对每类问题综合阐述各种解法与技巧。每介绍一种方法，都列举具有一定深度、综合性较强、技巧较高的例题，每节后面还配有一定数量的习题，这些例题和习题绝大多数选自重点高校和科研单位硕士研究生入学试题。读者可以从各类问题的多种解法中系统复习，加深理解线性代数、高等代数的基本内容；并能学到各种解题方法和技巧，从而能开阔思路，活跃思想，提高解题能力。

本书可供大专院校、电大、职大、函大等广大学生学习线性代数、高等代数时阅读和参考；也可作为线性代数、高等代数复习提高课的教材；对于自学青年及有志报考硕士研究生的读者，本书更是良师益友，值得一读；对于从事线性代数、高等代数教学的教师也有一定的参考价值。

对于本书的编写和出版，湘潭大学数学系和几何代数教研室给予了热忱的支持；武汉大学熊全淹教授及湘潭大学唐

祐华副教授审阅了本书初稿，提出了不少宝贵意见，在此一并表示感谢。

书中归纳的方法与技巧大多是编者教学过程中经验和体会的总结。由于学识水平和教学经验所限，书中难免有不当之处和错误，恳请读者不吝指正。

毛 纲 源

1987年8月

# 目 录

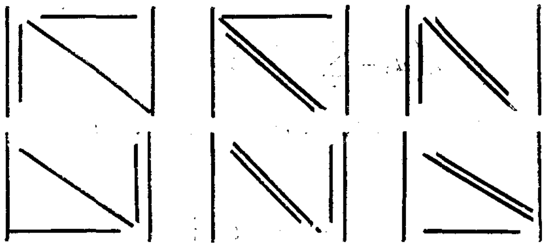
## 第七章　线性变换

# 第一章　行列式计算

## §1.1　三对角线型及其变形行列式常用算法

三对角线型的行列式是指主对角线上元素与主对角线上方和下方第一条次对角线上元素不全为零而其余元素全为零的行列式。

如用两竖表示行列式，用三斜线表示三对角线上不全为零的元素，那么这种行列式可形象地表示为；下面几种行列式可视为它的变形。



这些行列式常用下面几种方法计算。

**法一**　化三角形法

此法是将主对角线上方或下方第一条次对角线上元素全部消成零，有时也将次对角线下方的 $n-1$ 个主对角元消成零。

**例1.1.1**　计算

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

**解** 当$a_i\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时，提取公因式后，将新行列式的第 $i+1$ 列乘以$-(c_i/a_i)$ ( $i=1,2,\cdots,n$) 都加到第1列，可得三角形行列式：

$$D=\prod_{i=1}^{n}a_i\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{c_ib_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}a_i\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right)$$

当 $a_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时，显然，$D=0$。

**例1.1.2** 证明

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^{n-i-1}$$

(东北师大，81年)

**证** 如将 $D_n$ 中与主对角线平行的 $n-1$ 个元素（$-1$）化为 0，则 $D_n$ 就变为三角形行列式，但这样做会出现分式，计算比较麻烦。如将（$-1$）下边的 $n-1$ 个主对角元 $x$ 化为 0，$D_n$ 也变为三角形行列式，且计算较简。事实上，

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0x+a_1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0x+a_1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0x^2+a_1x+a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}=\cdots$$

$$=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0x+a_1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0x^2+a_1x+a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0x^{n-2}+a_1x^{n-3}+\cdots+a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0 x+a_1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0x^{n-2}+a_1x^{n-3}+\cdots+a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i-1}$$ 〔证毕〕

**法二** 递推法

先建立原行列式与其类型相同的低阶行列式的递推关系，然后按递推关系计算原行列式。

**例1.1.3** 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$ (厦门大学，82年)

**解** 将 $D_n$ 按第一列展开，得到

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$$

即 $$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$$

或 $$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})$$

由此递推下去，得到

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)$$

或 $$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1)$$

因 $D_2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$，$D_1=\alpha+\beta$，故

$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^n$ （1），$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n$ （2）

当 $\alpha\neq\beta$ 时，由(1)与(2)得到

$$D_n=(\alpha^n-\beta^n)/(\alpha-\beta)=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$$

当 $\alpha=\beta$ 时，由(1)或(2)递推下去，得到

$$D_n=\alpha^n+\beta\alpha^{n-1}+\cdots+\beta^{n-1}\alpha+\beta^n=(1+n)\alpha^n$$

**例1.1.4** 计算 $n$ 阶行列式（空白处全为零，下同。）

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+x & z & & \\ z & 1+x & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & y \\ & & z & 1+x \end{vmatrix}$$

这里 $x=yz$。（武汉大学，83年）

**解** 按第1列（或第 $n$ 列）展开，得到

$$D_n=(1+x)D_{n-1}-zyD_{n-2}=(1+x)D_{n-1}-xD_{n-2} \quad (1)$$

由（1），得到

$$D_n-D_{n-1}=x(D_{n-1}-D_{n-2})=x^2(D_{n-2}-D_{n-3})$$

$$=\cdots=x^{n-2}(D_2-D_1)=x^n$$

即 $D_n=x^n+D_{n-1}$，由此递推下去，得到

$$D^n=x^n+x^{n-1}+D_{n-2}=\cdots=x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+D_1$$

$$=x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x+1$$

**例1.1.5** 计算行列式：

$$\triangle_n=\begin{vmatrix} x-y_1 & y_2 & & & \\ -x & x-y_2 & y_3 & & \\ & -x & x-y_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & y_n \\ & & & -x & x-y_n \end{vmatrix}$$

（湖北大学，86年）

**解一** 用递推法计算

将$\triangle_n$按第 $n$ 行展开，得到

$$\triangle_n=(x-y_n)\triangle_{n-1}+xy_n\triangle_{n-2}$$

其中 $\triangle_{n-1}$、$\triangle_{n-2}$ 仍为与 $\triangle_n$ 同类型的 $n-1$ 阶、$n-2$ 阶行列式，于是由上式可得

$$\begin{aligned}\triangle_n-x\triangle_{n-1}&=(-y_n)(\triangle_{n-1}-x\triangle_{n-2})\\&=(-y_n)(-y_{n-1})(\triangle_{n-2}-x\triangle_{n-3})\\&=\cdots=(-y_n)(-y_{n-1})\cdots(-y_3)(\triangle_2-x\triangle_1)\\&=(-1)^n y_1y_2\cdots y_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle_n&=(-1)^n y_1y_2\cdots y_n+x\triangle_{n-1}\\&=(-1)^n y_1y_2\cdots y_n+(-1)^{n-1}xy_1y_2\cdots y_{n-1}+x^2\triangle_{n-2}\\&=\cdots\cdots\\&=(-1)^n y_1y_2\cdots y_n+(-1)^{n-1}y_1y_2\cdots y_{n-1}x\\&\quad+(-1)^{n-2}y_1y_2\cdots y_{n-2}x^2+\cdots+(-1)y_1x^{n-1}+x^n\end{aligned}$$

**解二**

$$\triangle_n=\begin{vmatrix}x & y_2 & & & \\ -x & x-y_2 & y_3 & & \\ & -x & x-y_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & y_n \\ & & & -x & x-y_n\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}-y_1 & y_2 & & & \\ 0 & x-y_2 & y_3 & & \\ & -x & x-y_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & y_n \\ & & & -x & x-y_n\end{vmatrix}$$

右端第一个行列式的第 1 行加到第 2 行，再将新行列式的第 2 行加到第 3 行，如此继续下去，第一个行列式就化为对角

元为 $x$ 的上三角行列式，因而等于$x^n$。第二个行列式按第 1 列展开后得到$(-y_1)\overline{\triangle}_{n-1}$，其中$\overline{\triangle}_{n-1}$是与$\triangle_n$同类型的 $n-1$ 阶行列式，于是将$\overline{\triangle}_{n-1}$的第 1 列拆成两分列之和，$\overline{\triangle}_{n-1}$又可拆成两个 $n-1$ 阶行列式之和，如此继续下去，可得

$$\begin{aligned}\triangle_n &= x^n + (-y_1)\overline{\triangle}_{n-1} = x^n + (-y_1)[x^{n-1} + (-y_2)\overline{\triangle}_{n-2}] \\ &= x^n - y_1x^{n-1} + (-y_1)(-y_2)\overline{\triangle}_{n-2} = \cdots \\ &= x^n - y_1x^{n-1} + y_1y_2x^{n-2} - y_1y_2y_3x^{n-3} + \cdots \\ &\quad + (-y_1)(-y_2)\cdots(-y_{n-2})\overline{\triangle}_2 \\ &= x^n - y_1x^{n-1} + y_1y_2x^{n-2} - y_1y_2y_3x^{n-3} + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-2}y_1y_2\cdots y_{n-2}(x^2 - y_{n-1}\overline{\triangle}_1) \\ &= x^n - y_1x^{n-1} + y_1y_2x^{n-2} - y_1y_2y_3x^{n-3} + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-2}y_1y_2\cdots y_{n-2}x^2 + (-1)^{n-1}y_1y_2\cdots y_{n-1}x \\ &\quad + (-1)^n y_1y_2\cdots y_{n-1}y_n\end{aligned}$$

解毕。

**法三** 对于三对角线（主对角线及其上方，下方两条次对角线）上的元素分别完全相同的行列式可用例 1.1.3 的结果计算。

**例1.1.6** 求 $n$ 级行列式$D_n$的值：

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

（武汉大学，81年）

（湖北大学，81年）

**解** 令$\alpha\beta = 1$，$\alpha + \beta = 0$，则$\alpha$，$\beta$为方程$x^2 + 1 = 0$的两根，故$\alpha = i$，$\beta = -i$ $(i = \sqrt{-1})$，由例1.1.3之结果，得到

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{(i)^{n+1} - (-i)^{n+1}}{2i}$$

$$= \frac{i^n[1+(-1)^n]}{2} = \begin{cases} 0 & (n\text{为奇数}) \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & (n\text{为偶数}) \end{cases}$$

**例1.1.7** 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ （中山大学，84年）

**解** 因 $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=1$，则$\alpha$，$\beta$为方程$x^2-x+1=0$的两个根，求之得 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$。

为化简结果，设 $x^2+x+1=0$ 的两根为 $x_1$，$x_2$，则 $x_1=-\dfrac{(1-\sqrt{3}i)}{2}=-\beta$；$x_2=-\dfrac{(1+\sqrt{3}i)}{2}=-\alpha$。

由 $x_1^3=1$，$x_2^3=1$ 推出 $\alpha^3=\beta^3=-1$，$\beta^{3k}=\alpha^{3k}=(-1)^k$，故

$$D_n = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} = \dfrac{(-1)^k-(-1)^k}{\alpha-\beta} = 0 & n=3k-1\text{时} \\ \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} = \dfrac{(-1)^k(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} = (-1)^k & n=3k\text{时} \\ \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} = \dfrac{(-1)^k(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha-\beta} = (-1)^k & n=3k+1\text{时} \end{cases}$$

进一步化简，有

$$D_n = \begin{cases} 0 & \text{当}n=6t+2, \quad \text{或}n=6t+5\text{时} \\ -1 & \text{当}n=6t+3, \quad \text{或}n=6t+4\text{时} \\ 1 & \text{当}n=6t+1, \quad \text{或}n=6t\text{时} \end{cases}$$

**例1.1.8** 证明 $n$ 阶行列式

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$ （南京大学，86年）

$$=\begin{cases} \dfrac{(a+\sqrt{a^2-4bc})^{n+1}-(a-\sqrt{a^2-4bc})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{a^2-4bc}} & \text{当 } a^2\neq 4bc \text{ 时} \\ (n+1)\left(\dfrac{a}{2}\right)^n & \text{当 } a^2=4bc \text{ 时} \end{cases}$$

**证** 各列提公因式 $c$，得到

$$\Delta_n=c^n\begin{vmatrix} \frac{a}{c} & \frac{b}{c} & & & \\ 1 & \frac{a}{c} & \ddots & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{b}{c} \\ & & & 1 & \frac{a}{c} \end{vmatrix}$$

令 $\alpha+\beta=\dfrac{a}{c}$，$\alpha\beta=\dfrac{b}{c}$，解方程 $x^2-\dfrac{a}{c}x+\dfrac{b}{c}=0$，求出两根 $\alpha$，$\beta$ 为

$$\alpha=\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2c},\qquad \beta=\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2c}$$