工程力学习题指导

下册

（运动学与动力学）

刘毅朴　时学黄　刘荣暄　编

中国建筑工业出版社

本书主要介绍工程力学的解题方法及其有关内容的理论要点。全书分三册出版。上册为静力学，中册为材料力学，下册为运动学与动力学。各册的章节内容主要参考高等学校理论力学及材料力学课的教材进行安排。每章包括理论要点、例题示范和习题三个部分。习题均附有答案。

本册为运动学与动力学。运动学包括：点的运动学、刚体的基本运动、点的复合运动、刚体平面运动与绕定点运动。动力学包括：牛顿定律、质点运动微分方程式及其积分、质点的振动、质系普遍定理、碰撞、达朗伯原理、虚位移原理、中心力、拉格朗日第二类方程、质点相对运动、单自由度及两个自由度的微振动。

本书可供工程技术人员及工科大专院校师生参考。

工程力学习题指导

下　册

（运动学与动力学）

刘毅朴　时学黄　刘荣暄　编

*

中国建筑工业出版社出版（北京西郊百万庄）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

中国建筑工业出版社印刷厂印刷（北京阜外南礼士路）

*

开本：850×1168毫米 1/32 印张：23 字数：617 千字

1984年9月第一版　1984年9月第一次印刷

印数：1—21,800 册　定价：2.85元

统一书号：15040·4636

编　写　说　明

本书是《工程力学习题指导》的下册，内容范围是运动学和动力学。书中对理论部分不作详细推导，仅列出提要，着重列举运用基本规律分析问题和解题的方法。

书中取材除吸收历年各校的教学经验外，一部分选自国外近年出版的几本工程力学教材。编写时曾考虑将所列的内容与清华大学1981年新编的理论力学教材相配合，并把教材中新编的习题抽出一部分作为本书的例题，另外又补充了许多在教材中尚未编入的习题，冀使本书既适合高等学校理论力学课程在教学中参考，也可作为自学用书。全书共有例题360个，习题400个。计量单位一律采用我国新颁布的法定单位制。

本书第三、四、五、十六章由时学黄同志编写，第九、十、十一、十七章由刘荣晅同志编写，其余各章由刘毅朴同志编写。由于我们的水平有限，问题及错误一定不少，请读者多加指正。

编者　于清华大学

目　录

运　动　学

运动学是从几何方面来研究物体的相互位置随时间变化的规律，不涉及力与运动之间的关系。它的任务是建立描述运动规律的方法，确定运动物体上各点的轨迹、速度和加速度。

第一章　点的运动学

所谓点的运动就是指一个几何点的运动。当物体的大小和形状在运动过程中不起重要作用，或物体的转动因素可不考虑时，都可归结为点的运动学来研究。

§1-1　点的直线运动

设点P沿直线s运动，并规定s轴的正方向。设某瞬时t点到坐标原点的距离为s，s为时间t的连续函数，如图1-1。

$$s=f(t) \tag{1-1}$$

上式称为点沿已知轨迹的**运动规律或运动方程式**。点在任一瞬时的速度与加速度为

$$v=\frac{ds}{dt}=\dot{s} \tag{1-2}$$

$$a=\frac{dv}{dt}=\dot{v}=\ddot{s} \tag{1-3}$$

图 1-1

作出v-t曲线，则t_1到t_2时间间隔内点的位移即为曲线所包围的全部面积，点经过的路程则为这些面积的绝对值的总和。

若已知点的运动规律，求出它对时间的一阶及二阶导数后，

就是点的速度及加速度。反之，若已知加速度随时间 t 或坐标 s 的变化关系，则针对不同情况分离变量，进行积分后即可求出点的速度或位移。如果需求路程，则只需将这些位移的绝对值相加即可。如果加速度为常数，则可得

$$v=v_0\pm at \tag{1-4}$$

$$s=s_0\pm v_0t\pm\frac{1}{2}at^2 \tag{1-5}$$

$$v^2=v_0^2\pm 2as \tag{1-6}$$

正号为加速运动，负号为减速运动。

§1-2 点的曲线运动

（一）直角坐标系（x-y）

设瞬时 t 点M的向径为$\boldsymbol{r}(t)$，如图1-2，对应的坐标为

$$\begin{cases} x=f_1(t) \\ y=f_2(t) \\ z=f_3(t) \end{cases} \tag{1-7}$$

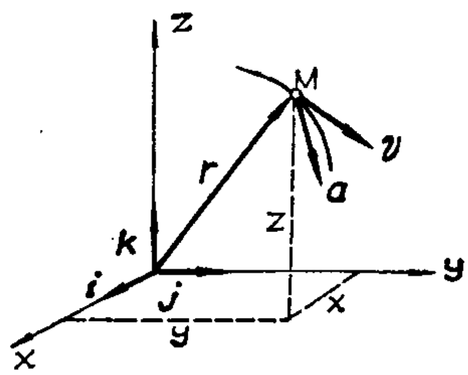


图 1-2

上式称为**直角坐标的运动方程式**，消去时间 t，即可求得**轨迹**。

若设固定参考坐标系的单位向量为$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，则任一瞬时点在空间的位置可由向径

$$\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-8}$$

来确定。任一瞬时点的速度及加速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k} \tag{1-9}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k} \tag{1-10}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} v_x=\frac{dx}{dt}=\dot{x},\quad v_y=\frac{dy}{dt}=\dot{y},\quad v_z=\frac{dz}{dt}=\dot{z} \\ a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x},\ a_y=\frac{d^2y}{dt^2}=\ddot{y},\ a_z=\frac{d^2z}{dt^2}=\ddot{z} \end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

将轨迹上各不同点的速度引至极点O，如图1-3，当点沿轨

迹运动时，从同一极点画出各速度向量。当时间连续变化，各速度向量端点将绘出一连续曲线，称为**速度端图**。将（1-7）式对时间求一次导数，消去时间 t 后，即可得到速度端图方程式

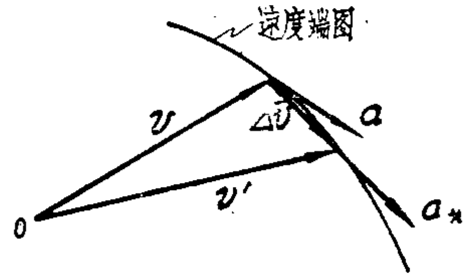


图 1-3

速度端图上任一点的切线方向表示该瞬时的加速度。

（二）自然坐标系（$\boldsymbol{n}$-$\boldsymbol{\tau}$）

与点作直线运动时相似，也可用**弧坐标** S 来确定点沿已知曲线轨迹运动时的位置。如图1.4，设O 为弧坐标原点，选某一方向为弧坐标的正方向，若已知点沿轨迹的运动规律

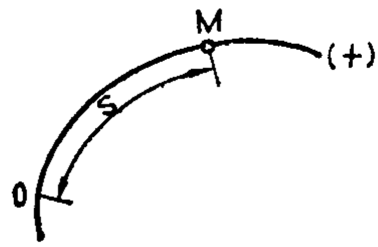


图 1-4

$$S=f(t) \qquad (1\text{-}12)$$

则任一瞬时点在轨迹上的位置即可确定。

若已知点的直角坐标的运动方程式（1-7），由

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2} \qquad (1\text{-}13)$$

积分后，即可求得点沿轨迹的运动规律。

若设轨迹在M点的切线及法线单位向量为$\boldsymbol{\tau}$,$\boldsymbol{n}$，则任一瞬时M点的速度与加速度为

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{\tau}=\frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau}=\dot{s}\boldsymbol{\tau} \qquad (1\text{-}14)$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} \qquad (1\text{-}15)$$

式中

$$a_\tau=\frac{dv}{dt} \qquad a_n=\frac{v^2}{\rho} \qquad (1\text{-}16)$$

$\boldsymbol{a}_\tau$称为**切线加速度**，描写速度大小随时间的变化，方向沿轨迹在该点的切线方向。$\boldsymbol{a}_n$称为法线加速度，描写速度的方向随时间的变化，方向与速度垂直，总是指向曲线内凹的一侧，亦即指向曲率中心。ρ 为轨迹在M点的曲率半径。由于加速度是在密切面

内，故加速度在次法线上的投影a_b等于零。

当$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{a}_\tau$方向相同时，点作加速运动；当$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{a}_\tau$方向相反时，点作减速运动，如图1-5所示。

全加速度的大小与方向为

$$\left.\begin{aligned} a&=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \\ \operatorname{tg}\alpha&=\frac{a_\tau}{a_n}\end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}17)$$

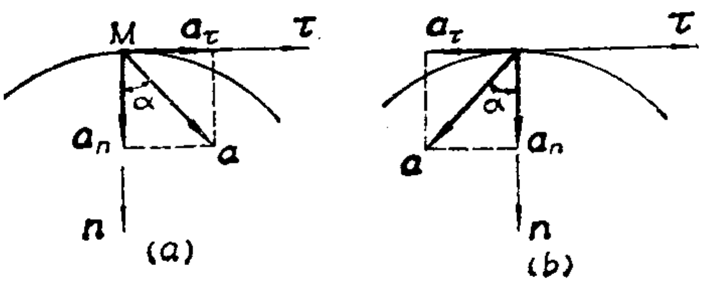


图 1-5

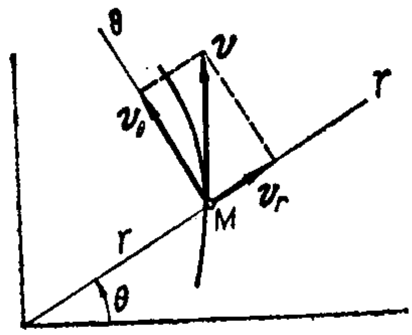


图 1-6

（三）极坐标系（r-θ）

设点在平面中运动，其位置可由径向距离r和极角θ来确定

$$r=f_1(t),\quad \theta=f_2(t) \quad (1\text{-}18)$$

r，θ称为**极坐标**。

如果以$\boldsymbol{r}_1$及$\boldsymbol{\theta}_1$表示单位径向向量和单位横向向量，则点的速度可表示为

$$\boldsymbol{v}=\frac{dr}{dt}\boldsymbol{r}_1+r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1 \quad (1\text{-}19)$$

如果以$\boldsymbol{v}_r$及$\boldsymbol{v}_\theta$表示**径向速度**和**横向速度**，则

$$v_r=\frac{dr}{dt}=\dot{r} \qquad v_\theta=r\frac{d\theta}{dt}=r\dot{\theta} \quad (1\text{-}20)$$

在任一瞬时点的加速度则为

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{r}_1+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{\theta}_1 \quad (1\text{-}21)$$

如果以$\boldsymbol{a}_r$，$\boldsymbol{a}_\theta$表示**径向加速度**和**横向加速度**，则

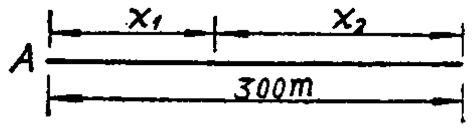
$$
\begin{cases}
a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\
a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})
\end{cases}
\qquad (1\text{-}22)
$$

例　　题

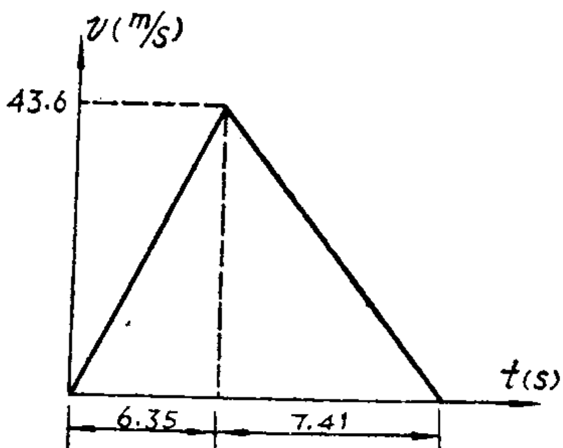
［点的直线运动例题］

（一）加速度为常数

【例题 1-1】 A，B两地的水平直线距离为300m，一摩托车由静止从A出发到B停止。如摩托车的加速度限制为$a_1=0.7\mathrm{g}$，减加速度限制为$a_2=0.6\mathrm{g}$，并假设这两个加速度均为常数。求摩托车从A到B所需的最短时间t，并求它的最大速度$\boldsymbol{v}$。



(a)



(b)

图　例题 1-1

【解】 设摩托车加速阶段与减速阶段走过的距离分别为x_1、x_2，所需的时间为t_1、t_2，则

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2, \quad x_2 = vt_2 - \frac{1}{2}a_2 t_2^2$$

$$
\begin{cases}
v = a_1 t_1 = a_2 t_2 \\
x_1 + x_2 = \dfrac{1}{2}a_1 t_1^2 + vt_2 - \dfrac{1}{2}a_2 t_2^2 = \dfrac{1}{2}a_1 t_1^2 + \dfrac{1}{2}a_2 t_2^2
\end{cases}
$$

即
$$
\begin{cases}
300 = \dfrac{1}{2}\times 0.7\times 9.8 t_1^2 + \dfrac{1}{2}\times 0.6\times 9.8 t_2^2 & (a) \\
0.7\mathrm{g}t_1 = 0.69\times t_2 & (b)
\end{cases}
$$

由式（b）得　$t_1 = \dfrac{6}{7}t_2$　　（c）

代入式（a）得　$t_2 = 7.41\mathrm{s}$　　代入（c）式，得　$t_1 = 6.35\mathrm{s}$

故　$t=t_1+t_2=13.76\mathrm{s}$

$$v=0.7\times9.8\times6.35=43.6\mathrm{m/s}=157\mathrm{km/h}$$

【例题 1-2】 某机器的滑动部分作直线运动，其速度v与时间t的变化关系为$v=0.4(t-2)\mathrm{m/s}$。当$t=0$时它的位置为$s_0=0.6\mathrm{m}$，求运动开始后头3秒钟内点的位置和经过的全部路程，并讨论点的运动特性。

【解】 由

$$v=\frac{ds}{dt}=0.4(t-2) \qquad (a)$$

积分一次后，可得

$$\int_{s_0}^{s}ds=\int_0^t 0.4(t-2)dt$$

$$s=s_0+0.2t^2-0.8t=0.2t^2-0.8t+0.6$$

把（a）对时间求一次导数，可得

$$a=\frac{dv}{dt}=0.4\mathrm{m/s^2}$$

故可得　$t=0$，$s=0.6\mathrm{m}$，$v=-0.8\mathrm{m/s}$

$t=1\mathrm{s}$，$s=0$，$v=0.4(1-2)=-0.4\mathrm{m/s}$

$t=2\mathrm{s}$，$s=0.2\times4-0.8\times2+0.6=-0.2\mathrm{m}$，

$v=0.4(2-2)=0$

$t=3\mathrm{s}$，$s=0.2\times9-0.8\times3+0.6=0$，

$v=0.4(3-2)=0.4\mathrm{m/s}$

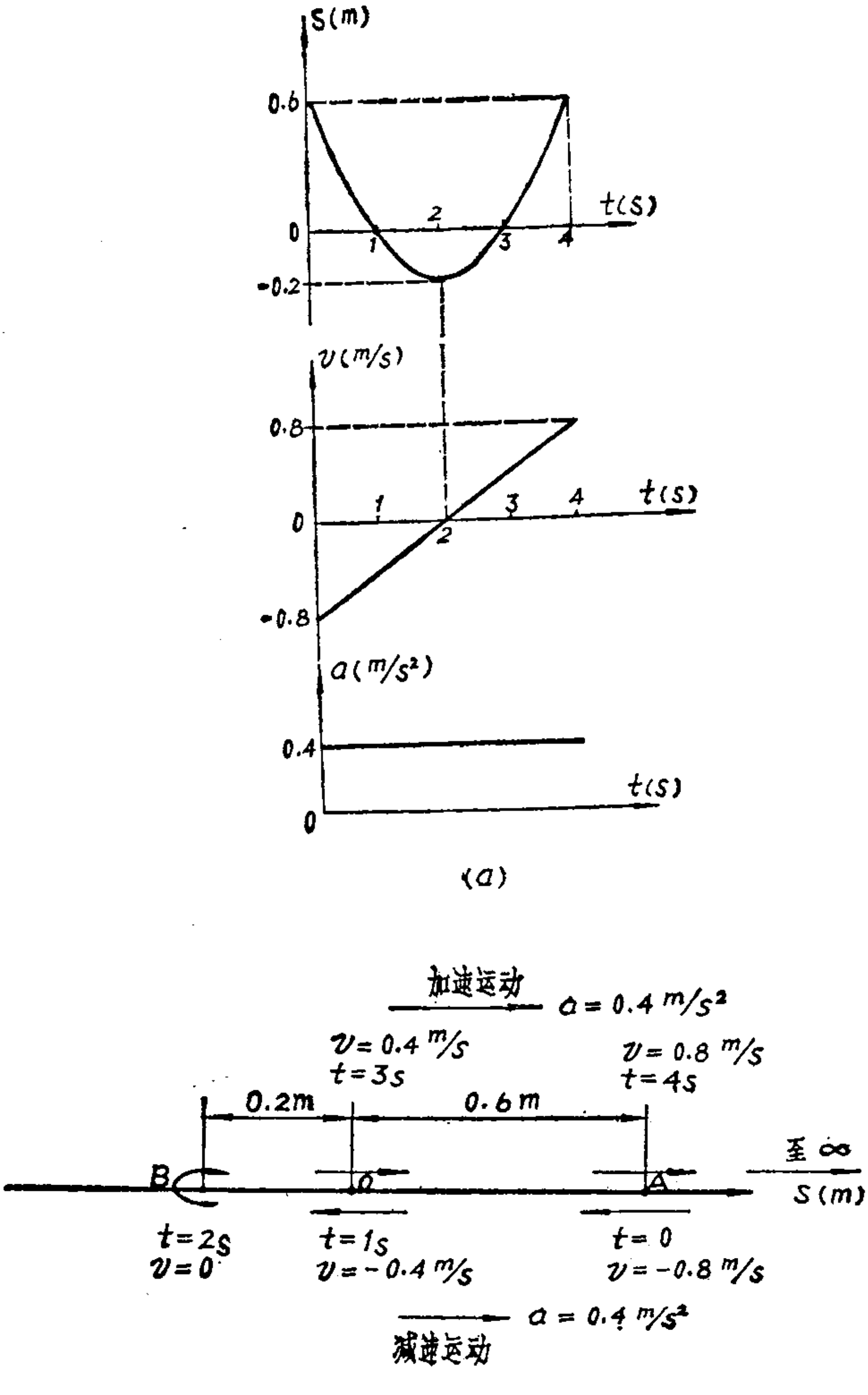
$t=4\mathrm{s}$，$s=0.2\times16-0.8\times4+0.6=0.6\mathrm{m}$

$v=0.4(4-2)=0.8\mathrm{m/s}$

其运动图、速度图及加速度图如图（a）、（b）所示。

由此可看出：$t=0$时点位于A点，距原点0.6m，速度为$-0.8\mathrm{m/s}$。然后向s轴的反方向作减速运动，加速度为$a=0.4\mathrm{m/s^2}$。$t=1\mathrm{s}$时，经过原点0，其速度为$-0.4\mathrm{m/s}$。当$t=2\mathrm{s}$时速度为零，这时点位于s轴的反方向的B点，距0点0.2m。然后折转以等加速度$a=0.4\mathrm{m/s^2}$向s轴的正方向作加速运动。当$t=3\mathrm{s}$时又回到原点0，这时速度为$0.4\mathrm{m/s}$。当$t=4\mathrm{s}$时又回到原来

出发时的A点，这时速度为0.8m/s。以后继续作等加速运动，直到无穷远。故点在头3秒钟走过的路程 为 $0.6+0.2+0.2=1m$。



(b)

图 例题 1-2

（二）加速度为时间的函数

【例题 1-3】 点作直线运动时，其运动规律为 $s=2t^3-24t+6$，s以m计，t以s计。求：

（a）点从$t=0$时的初速度改变到速度为72m/s时所需的时间；

（b）当$v=30$m/s时点的加速度；

（c）点在$t=1$s及$t=4$s瞬时，两点的距离；

（d）在$t=1$s到$t=4$s时间间隔内点走过的路程。

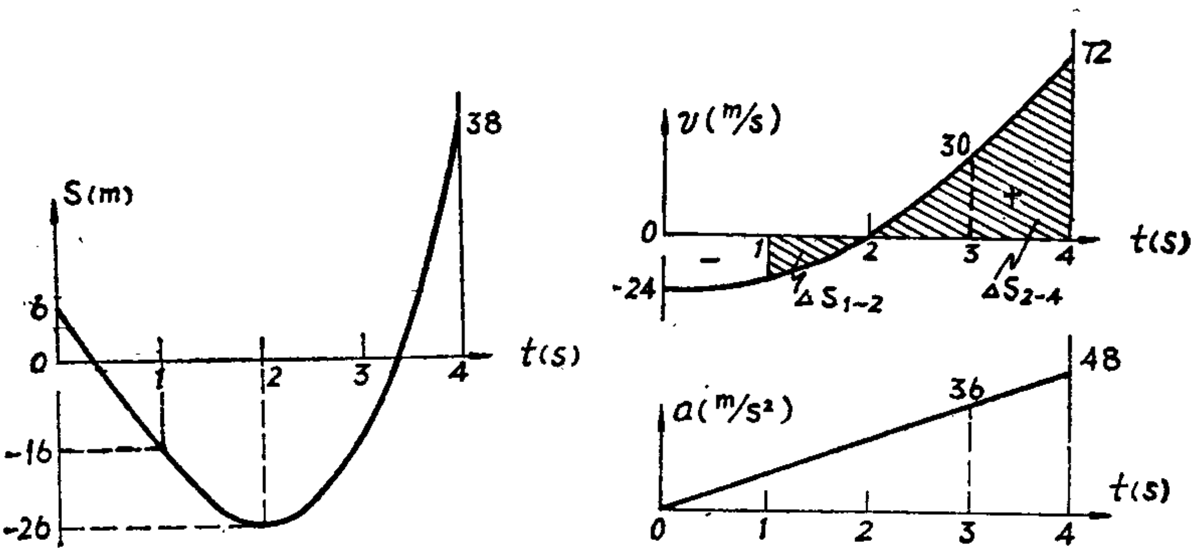


图　例题 1-3

【解】 由 $v=\dfrac{ds}{dt}=6t^2-24$(m/s)

$$a=\frac{dv}{dt}=12t(\mathrm{m/s^2})$$

（a）当$v=72$m/s时，$72=6t^2-24$，$t=\pm4$s，负号无意义，$\therefore t=4$s

（b）以$v=30$m/s代入，可得$30=6t^2-24$ $\therefore t=3$s，

$a=12\times3=36\mathrm{m/s^2}$

（c）$\Delta s=s_4-s_1=(2\times4^3-24\times4+6)-(2\times1^3-24\times1+6)=54$m

为了清楚地了解运动的特性，画出了s-t、v-t、a-t曲线。v-t曲线下面的面积代表点走过的路程，从图1-3可知，当$t=0$

到$t=2$s时，点向s轴的负方向运动。当$t=2$s时，点的速度为零。当$t=2$s以后，点才开始沿s轴正方向运动。

（ d ）在$t=1$s到$t=4$s时间间隔内，点走过的路程为

$$2\times(26-16)+16+38=74\text{m}$$

【例题 1-4】 某试验小车开始时处于静止，当它作直线运动时，其加速度的测量记录如图中实线所示。在4s的时间间隔内的a-t曲线可近似地用两段直线来代替，如图中虚线所示。求小车在此时间间隔内走过的路程s。

【解】

$$\begin{cases} 0\leqslant t\leqslant 2\text{s}, & a=5gt \qquad (a) \\ 2<t\leqslant 4\text{s}, & a=5g \qquad (b) \end{cases}$$

由（ a ） $$\frac{dv}{dt}=5gt$$

$$\int_{v_0}^{v_1} dv=\int_0^t 5g\cdot t\,dt$$

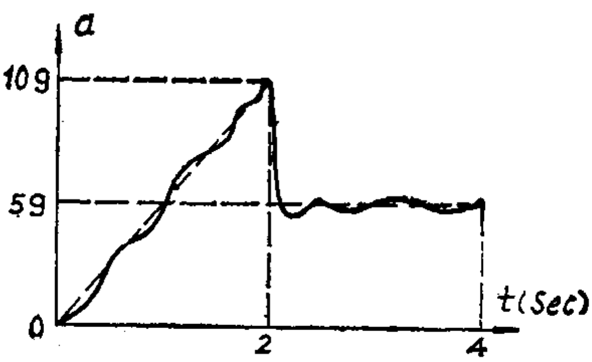


图 例题 1-4

因 $v_0=0$ 故 $v_1=\frac{5}{2}gt^2$

（ c ）

当 $t=2$s，$v_1=10g$

由（ b ）式，$\frac{dv}{dt}=5g$

$$\int_{v_1}^{v_2} dv=\int_2^t 5g\cdot dt$$

$$v_2=v_1+5g(t-2)=10g+5g(t-2)=5gt \qquad (d)$$

由（ c ）、（ d ）积分后，可得

$$s_1=\int_0^2 \frac{5}{2}gt^2\cdot dt=\left[\frac{5}{6}gt^3\right]_0^2=\frac{20}{3}g$$

$$s_2=\int_2^4 5gt\cdot dt=\left[\frac{5}{2}gt^2\right]_2^4=30g$$

$$s=s_1+s_2=36.67g\doteq 360\text{m}$$

（三）加速度为坐标的函数

【例题 1-5】 弹簧缓冲器由三个弹簧并联组成，外面两个弹簧的减加速度a与弹簧的变形成比例。当变形超过15cm时，中间弹簧就增加其减加速度。已知一较大物体沿水平方向运动，它与缓冲器接触时的速度为12m/s。求外面两个弹簧的最大压缩量s等于多少？

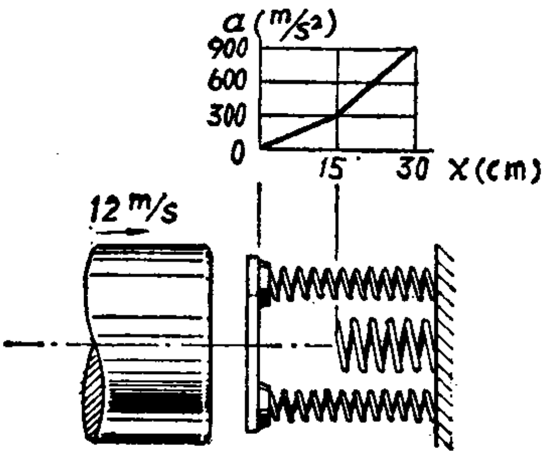


图　例题 1-5

【解】

$$\begin{cases} 0<x\leqslant 15, & a=\dfrac{300}{0.15}x=2000x \\ 15\leqslant x\leqslant 30, & a=300+\dfrac{900-300}{0.3-0.15}(x-0.15)=4000x-300 \end{cases}$$

$$\text{由}\ a=-\frac{dv}{dt}=-\frac{vdv}{dx},\quad \int vdv=-\int adx$$

（1）$0<x\leqslant 15$

$$\int_{v_0}^{v_1} vdv=-2000\int_0^{0.15} xdx$$

$$\frac{1}{2}(v_1^2-v_0^2)=-10^3[x^2]_0^{0.15}$$

$$v_1^2=v_0^2-45 \qquad v_0=12\text{m/s}$$

$$v_1=\sqrt{(12)^2-45}=9.95\text{m/s}$$

（2）$15\leqslant x\leqslant 30$

$$\int_{v_1}^{v_2} vdv=-\int_{0.15}^{s}(4000x-300)dx$$

$$\frac{1}{2}(v_2^2-v_1^2)=300(x-0.15)-2000[x^2-(0.15)^2]$$