

工程数学

2

陆传务 主编

华中理工大学出版社

目 录

第三篇 线性代数

引言	(3)
3.1 行列式.....	(5)
§ 3.1-1 行列式的概念	(5)
§ 3.1-2 行列式的性质和计算	(10)
习题 1.....	(24)
3.2 矩阵与线性方程组.....	(30)
§ 3.2-1 矩阵概念及其代数运算.....	(30)
§ 3.2-2 矩阵的逆	(42)
§ 3.2-3 矩阵的分块	(47)
* 矩阵的微分和积分运算概要.....	(55)
习题 2.....	(57)
§ 3.2-4 矩阵的秩和初等变换	(61)
§ 3.2-5 线性方程组解的结构.....	(73)
习题 3.....	(84)
3.3 线性空间与线性变换.....	(87)
§ 3.3-1 向量空间.....	(87)
习题 4.....	(96)
§ 3.3-2 线性空间.....	(97)
§ 3.3-3 欧氏空间.....	(106)
习题 5.....	(116)
§ 3.3-4 线性变换	(117)
§ 3.3-5 特征值与特征向量	(131)
习题 6.....	(144)
§ 3.3-6 二次型及其应用	(147)
习题 7.....	(172)
习题解答	(174)

第四篇 计算方法

引言.....	(185)
---------	---------

4.1 插值法	(192)
§ 4.1-1 Lagrange插值.....	(192)
§ 4.1-2 差分、差商及Newton插值公式.....	(199)
§ 4.1-3 分段低次插值	(204)
§ 4.1-4 分段三次样条 (Spline) 插值	(209)
§ 4.1-5 曲线拟合的最小二乘法	(217)
习题 1.....	(224)
4.2 数值微积分	(226)
§ 4.2-1 机械求积公式及其构造方法	(226)
§ 4.2-2 复化求积公式及其收敛性	(240)
§ 4.2-3 Richardson外推法及Romberg算法	(246)
§ 4.2-4 Gauss求积公式	(249)
§ 4.2-5 数值微分	(258)
习题 2.....	(261)
4.3 常微分方程初值问题的数值解法	(263)
§ 4.3-1 离散化方法	(264)
§ 4.3-2 Euler方法.....	(268)
§ 4.3-3 Runge-Kutta方法	(276)
§ 4.3-4 线性多步方法	(287)
§ 4.3-5 一阶微分方程组和高阶微分方程	(295)
习题 3.....	(297)
4.4 迭代法	(299)
§ 4.4-1 非线性方程求根	(299)
§ 4.4-2 线性代数方程组的迭代解法	(313)
习题 4.....	(330)
4.5 线性代数方程组的直接解法	(332)
§ 4.5-1 Gauss消去法及其变形	(334)
§ 4.5-2 三角分解法	(351)
§ 4.5-3 解三对角形方程组的追赶法	(358)
§ 4.5-4 方程组的性态、条件数	(360)
习题 5.....	(364)
参考书	(365)

第五篇 网络最优化初步

引言	(369)
5.1 图的基本概念	(371)
§ 5.1-1 子图与支撑子图	(371)
§ 5.1-2 路、回路和连通图	(372)
§ 5.1-3 割点与割集	(373)
§ 5.1-4 树、支撑树	(374)
§ 5.1-5 二部图	(375)
§ 5.1-6 有向图	(376)
5.2 树的算法	(377)
§ 5.2-1 最小树及其算法	(377)
§ 5.2-2 最小树形图及其算法	(382)
5.3 最短路算法	(394)
§ 5.3-1 一指定点到另一指定点的最短路算法	(394)
§ 5.3-2 任意两点间的最短路算法	(404)
§ 5.3-3 第 k 最短路算法	(408)
§ 5.3-4 有关最短路的几个问题	(411)
5.4 网络流及其算法	(415)
§ 5.4-1 最大流算法	(416)
§ 5.4-2 最小费用流及其算法	(425)
5.5 对集及其算法	(433)
§ 5.5-1 二部图的最大对集算法	(434)
§ 5.5-2 二部网络的最大拟对集算法	(437)
§ 5.5-3 二部网络的最大最小对集算法	(441)
习题	(448)
习题答案	(451)
●考书	(453)

《工程数学》第二册

第三篇

线性代数

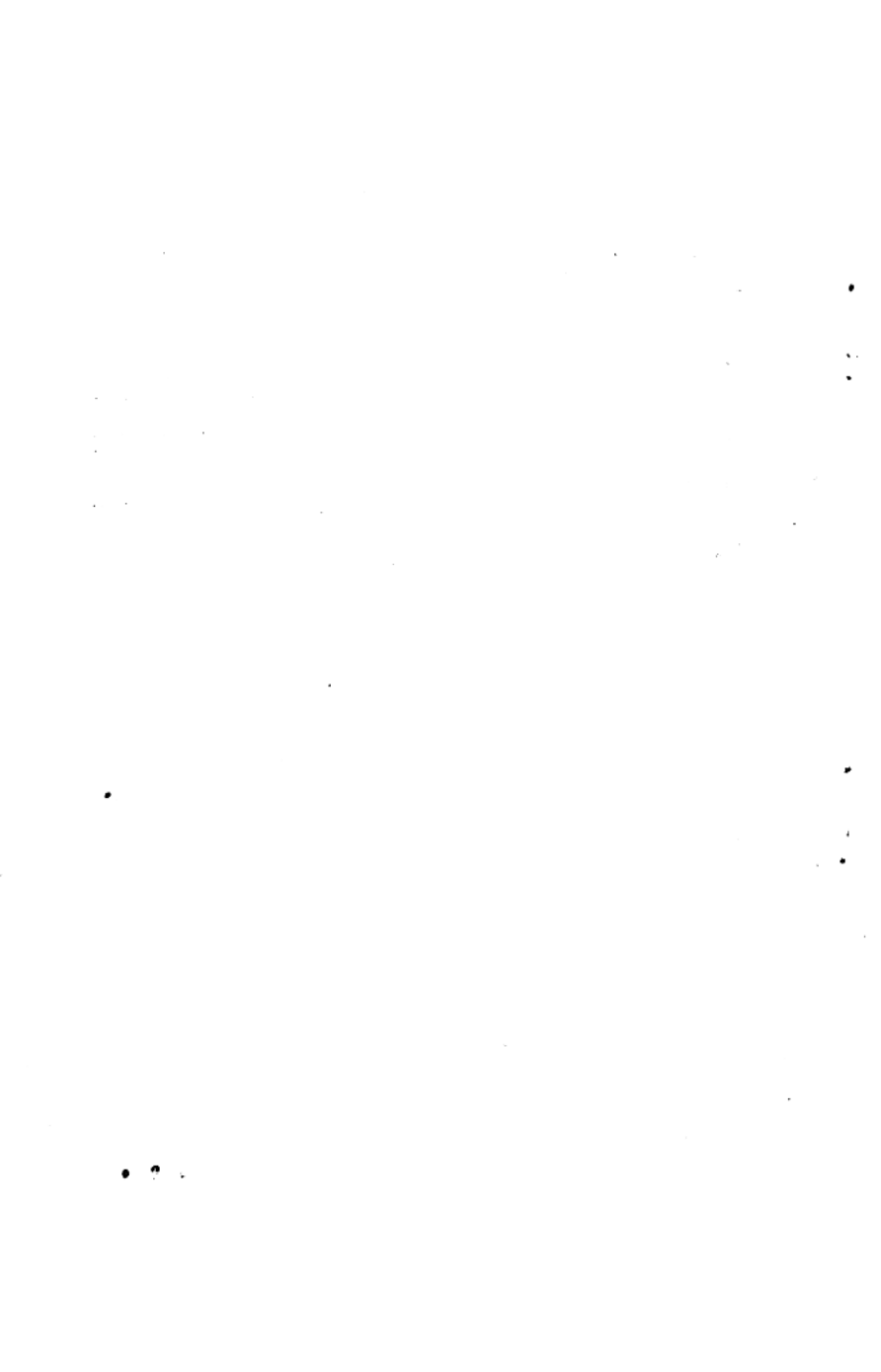
编者：林昇旭 张福英



引 言

线性代数研究的对象，是一种可进行线性运算（加法和数乘）的代数结构。它在 19 世纪已取得了光辉的成就。这里讨论的主要内容有：行列式，矩阵，线性空间与线性变换等，这些内容是互相交错，密切相关的。特别，其中的矩阵不但是线性代数的理论基础，而且是微分方程，计算方法，离散数学的计算工具。在线性代数的许多基本概念中，线性无关（相关）和线性空间这两个概念的重要性更为突出。

线性代数的应用极为广泛，它是工科工程数学中的首要部分。



3.1 行列式

行列式是代数的预备知识，与线性代数有密切的关系。

§ 3.1.1 行列式的概念

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1.1)$$

从(1.1)中消去 x_2 ，得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$ 。当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，有

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}};$$

同样，从(1.1)中消去 x_1 ，可得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

定义1 称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.2)$$

为二阶行列式，记为 $\det(a_{ij}) (i, j = 1, 2)$ 。

由(1.2)可知 $D = \det(a_{ij})$ 共有 $2! = 2$ 项，每项是不同行与不同列的元素的乘积，并附有±号。 D 又称为方程组(1.1)的系数行列式。当 D 不为零时，(1.1)式的解可表为

$$x_1 = D_1/D, \quad x_2 = D_2/D, \quad (1.3)$$

$$\text{其中 } D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

例1 用二阶行列式解方程组

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

解 先计算二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

于是由(1.3)式可得

$$x = D_1/D = -3/-3 = 1, \quad y = D_2/D = 3/-3 = -1.$$

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1.4)$$

固定 x_3 , 先解(1.4)中前两个方程. 设 $D \neq 0$, 由(1.3)得

$$x_1 = D_1/D, \quad x_2 = D_2/D,$$

式中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 - a_{13}x_3 & a_{12} \\ b_2 - a_{23}x_3 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}(b_1 - a_{13}x_3) - a_{12}(b_2 - a_{23}x_3),$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 - a_{13}x_3 \\ a_{21} & b_2 - a_{23}x_3 \end{vmatrix} = a_{11}(b_2 - a_{23}x_3) - a_{21}(b_1 - a_{13}x_3).$$

用 $x_1 = D_1/D$, $x_2 = D_2/D$ 代入(1.4)中第三个方程, 合并同类项后, 可得方程

$$ax_3 = b,$$

$$\text{式中 } a = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

分别用 b_1, b_2, b_3 代替 a 中数 a_{13}, a_{23}, a_{33} (即 x_3 在 (1.4) 中的系数), 可得 b . 若 $a \neq 0$, 即可得 (1.4) 的全部解.

定义2 称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ = \sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3}$$

为三阶行列式, 记为 $\det(a_{ij})(i, j=1, 2, 3)$.

它共有 $3! = 6$ 项, 每项是不同行与不同列元素的乘积, 并附有 \pm 号. $i_1 i_2 i_3$ 是下标 1, 2, 3 的一种全排列, 当 $i_1 i_2 i_3$ 为偶排列时, 该项前取正号, 否则取负号. 所谓偶排列是指当排列 $i_1 i_2 i_3$ 通过对调相邻二数字的位置, 使成为自然排列 1 2 3 时, 若对调的次数是偶数, 则称 $i_1 i_2 i_3$ 为偶排列, 否则, 称 $i_1 i_2 i_3$ 为奇排列. 例如 3 1 2 是偶排列, 1 3 2 是奇排列.

可见三阶行列式 $D = \det(a_{ij})$ 的六项中, 有三项带正号, 另三项带负号.

现在把上面的定义扩充到 $n > 3$.

定义3 设有 n^2 个数 $a_{ij}(i, j=1, 2, \dots, n)$, 排成 n 行 n 列, 记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

或 $\det(a_{ij})(i, j=1, 2, \dots, n)$, 称为 n 阶行列式, a_{ij} 叫做它的第 i 行第 j 列上的数或元, $\det(a_{ij})$ 的值等于 $\sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$, 即

$$\begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_n} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \cdots & a_{2i_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ni_1} & a_{ni_2} & \cdots & a_{ni_n} \end{vmatrix} = \det(a_{ij}) = \sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n},$$

式中 i_1, i_2, \dots, i_n 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个全排列。当此排列为偶排列时，相应项前取正号，否则，取负号。

例2 用三阶行列式解下列线性方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 40, \\ z = y + 4, \\ 2x = 3y + 3z. \end{cases}$$

解 把所给方程组写成标准形式

$$\begin{cases} x + y + z = 40, \\ -y + z = 4, \\ 2x - 3y - 3z = 0. \end{cases}$$

先计算 x, y, z 系数构成的三阶行列式

$$D = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 10,$$

然后用常数项 40, 4, 0 分别代替 D 中的第一, 二, 三列, 计算出三个三阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} 40 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 240,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 40 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 60,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 40 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 100.$$

• • •

得解 $x = D_1/D = 24$, $y = D_2/D = 6$, $z = D_3/D = 10$.

例3 求下列行列式的值

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 按定义, 行列式的各项是取自不同的行与不同的列的元素的乘积, 第一列除了 a_{11} 外, 其他的数都为零, 因此要得到非零的项, 第一列必取 a_{11} , 这样第二列就不能取 a_{12} , 而只能取 a_{22} , 同样第三列必须取 a_{33} , 类推, 最后第 n 列必须取 a_{nn} . 因此, 唯一的非零项为 $a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}$, 即

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}.$$

例4 求下列行列式的值

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 类似例3, 按行考虑, 可得行列式的唯一非零项为

$$a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} a_{n1},$$

而排列 $n(n-1) \cdots 21$ 换成自然排列 $1 2 \cdots n$ 需要 $\frac{n(n-1)}{2}$

次对调, 故得

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

§ 3.1-2 行列式的性质和计算

一 行列式的性质

定义1 设 n 阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则称 D^T 为 D 的转置。可见 D^T 是 D 将行(列)变为列(行)而得到的, 因此有

$$(D^T)^T = D.$$

定义2 在 D 中, 去掉元素 a_{ij} 所在的行和列中的元素而得到的一个 $n-1$ 阶行列式叫做 a_{ij} 的余子式, 在此余子式前乘上 $(-1)^{i+j}$, 而得到的行列式称为 a_{ij} 的代数余子式, 记为 A_{ij} 。

例如, 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

中元素6的余子式是二阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$, 相应的代数余子式为

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix},$$

因为元素6是第二行第三列中的元素。

对于 n 阶行列式 $D = \det(a_{ij}) (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 有下列主要性质, 这些性质是计算和化简行列式的根据。

性质1 行列式与它的转置行列式相等, 即 $D = D^T$ 。

性质2 若对调行列式 D 的任意两行(列), 则行列式的值仅改变符号。

推论1 若行列式中有两行(列)的对应元素相等, 则行列式等于零。

性质3 若把一个行列式的某行(列)所有元素乘上某常数 k , 则等于用数 k 乘原行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论2 若行列式中有两行(列)成比例, 则行列式等于零。

性质4 若行列式 D 的某一行(列)的元素都是两数之和(例如第 i 行的元素都是两数之和)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + a'_{i1} & a_{i2} + a'_{i2} & \cdots & a_{in} + a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列二行列式之和

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质5 若把行列式 D 的任一行(列)的元素乘以同一个数 k 后, 加到另一行(列)的对应元素上去, 则行列式的值不变。

例如

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{11} & a_{32} - ka_{12} & a_{33} + ka_{13} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \end{vmatrix} \\
&= D + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \\
&= D + k \cdot 0 = D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

性质6 行列式 D 等于其中任一行(列)的各个元素与其相应的代数余子式的乘积之和。即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}$$

($i = 1, 2, \dots, n$),

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

($j = 1, 2, \dots, n$).

推论3 行列式 D 中任一行(列)各个元素与另一行(列)相应元素的代数余子式的乘积之和等于零, 即

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = 0, \text{ 或 } \sum_{i=1}^n a_{ik}A_{ij} = 0, \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots,$$

n).

综合性质6及推论3, 可得

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \text{ 或 } \sum_{i=1}^n a_{ik}A_{ij} = \begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

以上性质均可用三阶行列式来验证,今验证性质6及其推论3.

由

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

把右边关于第一行的元素 a_{11} , a_{12} , a_{13} 进行提因子,得

$$D = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

显然,若把上式右边 a_{11} , a_{12} , a_{13} 分别改为第三行元素 a_{31} , a_{32} , a_{33} ,则相当于把上式左边的 D 中第一行改为第三行,这样第一、三两行就完全一样了,故所得行列式的值为零,即

$$a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = 0.$$

同样,可证明其他情况.

二 行列式的计算

性质5和6对于化简行列式极为重要,因为对于任一行列式,可不断地利用性质5,尽可能地把某一行(列)的元素化为零,然后利用性质6,按此行(列)把行列式展开,就可化为低一阶的行列式.这个手续可不断地进行下去,一直把原行列式的值计算出来.

例1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1) & -(n-1) \end{vmatrix}.$$