工程数学

2

陆传务 主编

华中理工大学出版社

目 录

第三篇 线性代数

第四篇 计算方法

第五篇 网络最优化初步

《工程数学》第二册

第三篇

线性代数

编者：林昇旭　张福英

引　言

线性代数研究的对象，是一种可进行线性运算（加法和数乘）的代数结构。它在19世纪已取得了光辉的成就。这里讨论的主要内容有：行列式，矩阵，线性空间与线性变换等，这些内容是互相交错，密切相关的。特别，其中的矩阵不但是线性代数的理论基础，而且是微分方程，计算方法，离散数学的计算工具。在线性代数的许多基本概念中，线性无关（相关）和线性空间这两个概念的重要性更为突出。

线性代数的应用极为广泛，它是工科工程数学中的首要部分。

3.1 行 列 式

行列式是代数的预备知识，与线性代数有密切的关系。

§3.1.1 行列式的概念

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

从(1.1)中消去x_2，得$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$。当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，有

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

同样，从(1.1)中消去x_1，可得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

定义1 称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.2}$$

为二阶行列式，记为$\det(a_{ij})(i, j = 1, 2)$。

由(1.2)可知$D = \det(a_{ij})$共有$2! = 2$项，每项是不同行与不同列的元素的乘积，并附有±号。D又称为方程组(1.1)的系数行列式。当D不为零时，(1.1)式的解可表为

$$x_1 = D_1/D, \qquad x_2 = D_2/D, \tag{1.3}$$

其中$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$\qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$。

例1 用二阶行列式解方程组

$$\begin{cases} 2x+y=1, \\ x-y=2. \end{cases}$$

解 先计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3, \quad D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3,$$

于是由(1.3)式可得

$$x=D_1/D=-3/-3=1, \quad y=D_2/D=3/-3=-1.$$

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2; \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

固定x_3，先解(1.4)中前两个方程．设$D\neq0$，由(1.3)得

$x_1=D_1/D$；$x_2=D_2/D$，

式中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21};$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1-a_{13}x_3 & a_{12} \\ b_2-a_{23}x_3 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{22}(b_1-a_{13}x_3)$$

$$-a_{12}(b_2-a_{23}x_3);$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1-a_{13}x_3 \\ a_{21} & b_2-a_{23}x_3 \end{vmatrix}=a_{11}(b_2-a_{23}x_3)$$

$$-a_{21}(b_1-a_{13}x_3).$$

用$x_1=D_1/D$，$x_2=D_2/D$代入(1.4)中第三个方程，合并同类项后，可得方程

$$ax_3=b,$$

式中$a=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$

$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$。

分别用b_1，b_2，b_3代替a中数a_{13}，a_{23}，a_{33}（即x_3在(1.4)中的系数），可得b。若$a\neq 0$，即可得(1.4)的全部解。

定义2 称

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=\sum \pm a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$$

为三阶行列式，记为$\det(a_{ij})(i,j=1,2,3)$。

它共有$3!=6$项，每项是不同行与不同列元素的乘积，并附有±号。$i_1i_2i_3$是下标1，2，3的一种全排列，当$i_1i_2i_3$为偶排列时，该项前取正号，否则取负号。所谓偶排列是指当排列$i_1i_2i_3$通过对调相邻二数字的位置，使成为自然排列1 2 3时，若对调的次数是偶数，则称$i_1i_2i_3$为偶排列，否则，称$i_1i_2i_3$为奇排列。例如3 1 2是偶排列，1 3 2是奇排列。

可见三阶行列式$D=\det(a_{ij})$的六项中，有三项带正号，另三项带负号。

现在把上面的定义扩充到$n>3$。

定义3 设有n^2个数$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，排成n行n列，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

或$\det(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n)$，称为**$n$阶行列式**，$a_{ij}$叫做它的第$i$行第$j$列上的数或元，$\det(a_{ij})$的值等于$\sum \pm a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(a_{ij}) = \sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n},$$

式中$i_1 i_2 \cdots i_n$是$1,2,\cdots,n$的一个全排列. 当此排列为偶排列时，相应项前取正号，否则，取负号.

例2 用三阶行列式解下列线性方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 40; \\ z = y + 4; \\ 2x = 3y + 3z. \end{cases}$$

解 把所给方程组写成标准形式

$$\begin{cases} x + y + z = 40; \\ -y + z = 4; \\ 2x - 3y - 3z = 0. \end{cases}$$

先计算x，y，z系数构成的三阶行列式

$$D = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 10,$$

然后用常数项40，4，0分别代替D中的第一，二，三列，计算出三个三阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} 40 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 240;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 40 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 60;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 40 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 100.$$

得解 $x=D_1/D=24$； $y=D_2/D=6$； $z=D_3/D=10$。

例3 求下列行列式的值

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 按定义，行列式的各项是取自不同的行与不同的列的元素的乘积，第一列除了a_{11}外，其他的数都为零，因此要得到非零的项，第一列必取a_{11}，这样第二列就不能取a_{12}，而只能取a_{22}，同样第三列必须取a_{33}，类推，最后第n列必须取a_{nn}。因此，唯一的非零的项为 $a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$，即

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

例4 求下列行列式的值

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 类似例3，按行考虑，可得行列式的唯一非零项为

$$a_{1n}\ a_{2\,n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1},$$

而排列 $n(n-1)\cdots 2\ 1$ 换成自然排列 $1\ 2\ \cdots\ n$ 需要$\dfrac{n(n-1)}{2}$次对调，故得

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

§ 3.1-2 行列式的性质和计算

一 行列式的性质

定义1 设n阶行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则称D^T为D的转置。可见D^T是D将行(列)变为列(行)而得到的，因此有

$$(D^T)^T=D.$$

定义2 在D中，去掉元素a_{ij}所在的行和列中的元素而得到的一个$n-1$阶行列式叫做a_{ij}的余子式，在此余子式前乘上$(-1)^{i+j}$，而得到的行列式称为a_{ij}的代数余子式，记为A_{ij}。例如，行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

中元素6的余子式是二阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$，相应的代数余子式为

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix},$$

因为元素6是第二行第三列中的元素。

对于n阶行列式$D=\det(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n)$，有下列主要性质，这些性质是计算和化简行列式的根据。

性质1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^T$。

性质2 若对调行列式D的任意两行(列)，则行列式的值仅改变符号。

推论1 若行列式中有两行（列）的对应元素相等，则行列式等于零。

性质3 若把一个行列式的某行(列)所有元素乘上某常数k，则等于用数k乘原行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论2 若行列式中有两行(列)成比例，则行列式等于零。

性质4 若行列式D的某一行(列)的元素都是两数之和(例如第i行的元素都是两数之和)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则D等于下列二行列式之和

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质5 若把行列式D的任一行（列）的元素乘以同一个数k后，加到另一行（列）的对应元素上去，则行列式的值不变。

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{11} & a_{32}+ka_{12} & a_{33}+ka_{13} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \end{vmatrix}$$

$$= D + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

$$= D + k0 = D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质6 行列式D等于其中任一行(列)的各个元素与其相应的代数余子式的乘积之和．即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

$$(i = 1,2,\cdots,n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

$$(j = 1,2,\cdots,n).$$

推论3 行列式D中任一行(列)各个元素与另一行(列)相应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0, \text{ 或 } \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0, \quad (i \neq j, i, j = 1,2,\cdots,n).$$

综合性质6及推论3，可得

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases} \text{或} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

以上性质均可用三阶行列式来验证。今验证性质6及其推论3。

由
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$
把右边关于第一行的元素a_{11}，a_{12}，a_{13}进行提因子，得
$$D=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})$$
$$+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$
$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$
显然，若把上式右边 a_{11}，a_{12}，a_{13} 分别改为第三行元素 a_{31}，a_{32}，a_{33}，则相当于把上式左边的D中第一行改为第三行，这样第一、三两行就完全一样了，故所得行列式的值为零，即
$$a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}=0.$$
同样，可证明其他情况，

二 行列式的计算

性质 5 和 6 对于化简行列式极为重要，因为对于任一行列式，可不断地利用性质 5，尽可能地把某一行(列)的元素化为零，然后利用性质 6，按此行(列)把行列式展开，就可化为低一阶的行列式。这个手续可不断地进行下去，一直把原行列式的值计算出来。

例1 计算行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1) & -(n-1) \end{vmatrix}.$$