全国高等职业技术师范院校教材

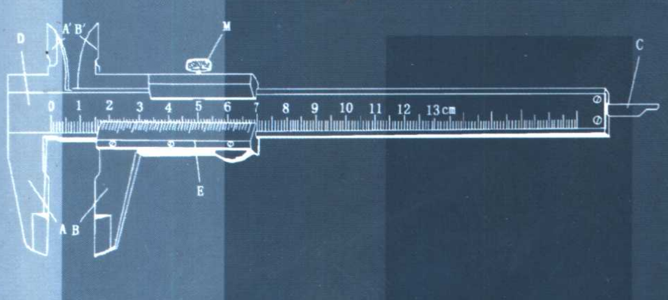
大学物理实验

谈欣柏 主编

1

6

DAXUE WULI



SHI YAN

天津大学出版社

大学物理实验

谈欣柏　主编

天津大学出版社

内容提要

本书是根据1995年12月全国高等技术师范院校石家庄会议上制订的机械制造工艺教育专业的《大学物理实验》课程教学的基本要求编写的。全书分四大部分:第一部分介绍物理量测量及数据处理的基本知识;第二部分较为系统地介绍物理实验基本方法和常用仪器的使用方法,包括若干与生产实际联系较紧密的实验,例如工厂静电除尘设计等实验;第三部分介绍近代物理实验;第四部分为附录。

本书可作为全国高等技术师范院校机械制造工艺教育专业的物理实验教学用书,也可供相近的工科专业使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验/谈欣柏主编. —天津:天津大学出版社,2000.8

ISBN 7-5618-1336-8

Ⅰ.大 ... Ⅱ.谈 ... Ⅲ.物理-实验-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.04-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 67936 号

出　版　天津大学出版社
出版人　杨风和
地　址　天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　话　发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　刷　天津市宝坻县第二印刷厂
发　行　新华书店天津发行所
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　13
字　数　328千
版　次　2000年8月第1版
印　次　2000年8月第1次
印　数　1—5 000
定　价　18.00元

前　言

《大学物理实验》是高等技术师范院校机械制造工艺教育专业教学计划中的一门独立开设的课程。其目的是通过本课程的学习,使学生不仅加深对物理概念、定律、定理等理论知识的理解,而且更重要的是获得基本的实验知识、实验方法、实验技能等诸方面的系统而严格的训练,从而为学习后继的实验课程奠定良好的基础。

学习本课程后应达到:

1.使学生通过对物理实验现象的观察和分析,学会用理论指导、分析和解决实验中问题的方法,从理论和实际的结合上加深对理论知识的理解;

2.使学生具有从事科学实验的初步能力,能概括出实验原理和方法,正确使用基本实验仪器,掌握基本实验的测量方法和实验操作技能,能正确记录和分析处理实验结果和撰写实验报告,能够完成简单的设计性实验;

3.使学生逐渐养成理论联系实际和实事求是的科学作风,严格认真的工作态度,主动研究的探索精神和遵守纪律、爱护公共财产的优良品质。

本教材根据1995年8月和1995年12月全国高等技术师范院校(机械制造工艺教育专业)教材编写会议精神及教学基本要求编写,除供高等技术师范院校机械制造工艺教育专业学生使用外,还可供高等职业技术院校工科专业参考使用。

参加本书编写工作的人员和分工如下:

绪论、第一部分物理实验的基本知识,第四部分附录3、4——谈欣柏(常州技术师范学院);

实验一、四、十、十五——范玉铠(天津技术师范学院);

实验十六、二十、二十一、二十二、二十三、二十五——汤国兴(上海师范大学职业技术学院);

实验十七、十八、十九、二十四、二十六、二十七、二十八、二十九、三十——马骥(河南技术师范学院);

实验二、五、六、十一、十二、十三——许雪芬(常州技术师范学院);

实验三、七、八、九、十四、第四部分附录1、2——章毛连(安徽农业技术师范学院);

本书主编为谈欣柏,副主编为汤国兴、范玉铠、马骥,许雪芬、章毛连参编。

本书在编写过程中,结合了各技术师范院校的教学经验并参阅了兄弟院校的有关教材、讲义和资料,在此表示由衷地感谢!

由于编者的水平所限,书中缺点和错误在所难免,恳请广大读者赐教指正。

编者

2000年7月

绪　论

物理学是一门以实验为基础的科学。物理规律的发现和物理理论的建立都要靠实验。例如:通过实验,库仑(Charles Augustin Coulomb 1736～1806)发现了库仑定律;法拉第(Michael Faraday 1791～1867)发现了电磁感应定律。又如,19 世纪末,人们发现了一些新的实验事实,无法用经典物理理论解释,为了说明这些新发现的实验事实,于是建立了相对论和量子力学。大学物理实验课是对学生进行科学实验基础训练的一门重要课程。它不仅使学生加深对物理概念和物理定律的理解,更重要的是使学生掌握从中学到大学许多基本的实验方法和实验技能,为进一步学习后继实验课程打下良好基础。

一、物理实验课的教学目的

(1)通过对物理现象的观察分析和物理量的测量,学习运用理论指导实验和通过实验来检验理论,从而加深对理论的理解。

(2)培养学生从事科学实验的初步能力。这些能力是指:

①能自行阅读实验教材或资料,做好实验前的准备工作;

②正确使用基本的实验仪器,掌握基本物理量的测量方法和实验的操作技能;

③正确记录数据和处理数据,能绘制图线,分析实验结果和撰写实验报告;

④自行设计并完成简单的实验。

(3)培养学生实事求是的科学态度、严肃认真的工作作风和勇于探索、坚韧不拔的钻研精神以及遵守纪律、爱护公共财产的优良品德。

二、如何做好每一个实验

要想做好实验,应重视以下三个基本环节。

1.实验前的准备工作

课前要认真阅读实验教材,必要时还要阅读有关参考资料,明确实验的目的和要求,理解实验所依据的原理,了解仪器的使用方法(有的仪器还须理解原理和了解结构)。根据实验目的与要求画好记录数据的表格。

2.实验的进行

学生一旦进入实验室,就应遵守实验室的规则,像一个科学工作者那样要求自己。实验正式进行之前,先要熟悉将要使用的仪器、量具等的性能及正确的使用方法,然后全面地想一想实验的操作程序和怎样的操作程序更为合理。

实验过程中,仔细观察实验现象,记录测得的数据,并随时判断正在进行的实验过程是否正常合理。对出现的所谓“反常”现象更要仔细观察、分析和认真探索。测量时,要正确读数并实事求是地记录客观现象和测量数据。仪器出现故障时,要在教师的指导下学习排除故障的方法。

实验结束后应把实验结果交给指导教师审阅,若有不合理的或错误的数据应重做。离开实验室前要整理好使用过的仪器。

3.撰写实验报告

实验后,对实验数据要及时进行处理。数据处理过程是指将原始数据代入公式计算、按作

图规则绘出图线、进行误差分析等。数据处理后应给出实验结果。最后再写一份简明扼要的实验报告。

实验报告的内容一般应包括实验名称、实验目的、原理简述、实验步骤、实验数据记录、处理与误差分析以及讨论。关于实验步骤，只要写明关键性的步骤和安全注意要点。关于数据记录，一般要求以列表的形式如实地记录完整的原始测量值。关于数据处理与误差分析，一般要求写出数据处理的主要过程、绘出图线，写出最后结果与误差分析。关于讨论，可由个人任意选取讨论内容，可以对实验中观察到的现象进行分析，也可以写自己如何排除实验中所出现的故障，或者回答思考题等等。

目　录

绪论

第一部分　基础知识

第二部分 基本实验

第三部分 近代物理实验

第四部分　附　　录

第一部分　基 础 知 识

物理实验离不开对物理量的测量。实践证明，任何测量都有误差。本部分介绍测量的概念和误差的估算、有效数字的概念及其计算、实验数据的处理和实验结果的表示等问题。这些知识不仅在做每一个物理实验时要用到，而且是学习后继的实验课程和将来从事科学实验必须具备的基本知识。

1　测量与误差

1.1　直接测量和间接测量

测量可分为直接测量与间接测量。实验时，如果能直接从量具或仪器上读出相应物理量的量值，这种测量称为直接测量。相应的物理量称为直接测量量。例如，用米尺测长度，用天平测质量，用温度计测温度都是直接测量。更多的物理量无专门的量具或仪器可作直接测量。对这些物理量，必须利用它们和可直接测量的物理量之间的函数关系加以计算才能得到量值。这种测量称为间接测量。相应物理量称为间接测量量。如，用单摆的周期公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 测重力加速度是间接测量。摆长和周期可直接测量，再利用周期公式算出重力加速度。有的物理量既可直接测量又可间接测量。如，电阻器的电阻值既可以用万用电表直接测出，又可以通过直接测量电阻器上的电压和电流，由欧姆定律算出电阻值。

1.2　误差

一个待测物理量的量值是客观存在的，称这个客观存在的量值为这个待测物理量的真值。然而，用量具或仪器测量这个物理量时，所得的测量值总是或多或少地偏离这个真值。这是因为任何量具或仪器的精密度总有一个限度，测量方法不可能完美无缺，实验条件和环境总有微小的、无规则的起伏变化，测量者的测量技能也不可能无限提高，所以待测物理量的真值不能通过测量毫无偏差地获得。真值只是一个理想的概念，真值是不知道的。

为了反映测量值偏离真值的程度，把一个物理量的测量值 x 与其真值 X 之差称为测量的绝对误差，简称误差，即

$$\text{绝对误差}=\text{测量值}-\text{真值}$$

或

$$\Delta = x - X \tag{1}$$

显然，评价一个测量结果，不仅要看这个测量值偏离真值的程度——绝对误差，还要看被测物理量本身的大小。于是引入相对误差的概念。绝对误差与真值之比称为相对误差，记为 E_r。即

$$\text{相对误差}=\frac{\text{绝对误差}}{\text{待测物理量的真值}}$$

或

$$E_r=\frac{\Delta}{X}\times 100\% \tag{2}$$

由于真值虽客观存在，但不能知道，所以上面的定义还不能用到实验测量中去，必须从许多测量值中寻找一个最接近真值的数值去代替真值——近真值。至于用近真值代替真值后，测量误差应如何估算，则要求我们对误差产生的原因或性质进行深入的讨论。

2　系统误差和偶然误差

根据误差产生的原因和性质的不同，可将误差分为系统误差和偶然误差（亦称随机误差）两大类。若在保持测量条件（仪器、方法、环境、测量者等）不变的情况下多次测量同一物理量时，误差的绝对值和正负号保持恒定，而当测量条件改变时，误差的绝对值和正负号按一定的规律变化，这样的误差称为系统误差。例如，用一个左臂比右臂短的不等臂天平多次重复测量同一物体的质量，测量数值总是小于其真值（待测物放在左盘），即每次测量的误差都是负的，且误差的绝对值也保持恒定；若把待测物放在右盘，即改变测量条件，再多次重复测量同一物体的质量，则测得的数值总是大于其真值，每次测量的误差变为正的，且误差绝对值也保持恒定。故因天平的不等臂而产生的测量误差属于系统误差。

产生系统误差的原因大致有如下四点。

1）仪器本身的缺陷或没有按规定条件使用仪器　例如：用一只比标准钟慢的表去测量时间时，读数总是偏小；仪器的零点未调准，米尺的刻度不准确，天平的不等臂等都会产生系统误差。

2）测量方法或原理不完善　例如：用伏安法测电阻时，忽略了电表的内阻，单摆法测重力加速度，周期公式 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ 是在摆角很小，并在忽略摆线质量和摆球大小时推得的。

3）环境的变化　例如，室温，气压，温度等的变化。

4）测量者的习惯或心理特点所造成的误差　例如，有人揿停表测时间总是提前，有人估计读数总是偏大或偏小。

即使完全消除显著的系统误差，在一定的测量条件下，对同一物理量作多次测量时，各次的测量值也并非相等，使绝对误差时大时小、时正时负，像这种完全带有偶然性或随机性的误差称为偶然误差或随机误差。偶然误差来源于测量方面的原因。事实上，所谓“一定的实验条件”或所谓“保持测量条件不变”是相对于测量者所能控制的程度而言的。由于实验技术水平的限制，总是存在着观测者未知或尚不能控制的某些偶然因素，使得各次测量时的实验条件发生微小变化。如环境、气压、电场、磁场等的无规则的微小起伏，读数时各次对准刻度线的不一致，以及估读数的不一致，被测物理量自身的微小起伏等，因而测量的偶然误差永远无法消除，只能尽量减小。

3　偶然误差的统计规律

3.1　偶然误差的统计规律性

假定系统误差已被消除，且被测物理量本身又是稳定的。在同一实验条件下，对物理量重复测量时，每次的测量值及测量的偶然误差互有差异，测量前又无法预言。当测量次数无限增加时，便会发现测量值及测量的偶然误差服从正态分布的统计规律。

n 次重复测量的测量值记为 x_1、x_2、x_3、…、x_n。设测量值出现在某数值 x 附近的区间 $[x, x+\Delta x]$ 内的次数为 Δn，相对次数为$\frac{\Delta n}{n}$，再除以 Δx，去掉区间 Δx 取大取小的影响因素，则比值$\frac{\Delta n}{n\Delta x}$表示 n 次测量中测量值出现在 x 附近的单位区间内的相对次数。当测量次数无限增加，且 $\Delta x \to 0$ 时，此比值存在一个极限。这个极限只与 x 有关，即只是 x 的函数，记为 $f(x)$。即

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \frac{\Delta n}{n\Delta x} = f(x), |x| < +\infty \tag{3}$$

$f(x)$称为测量值 x 的概率密度函数。可见，对同一物理量作无穷多次重复测量时，每一次的测量值出现在同一个 x 值附近单位区间内的概率是相同的，但出现在不同 x 值附近的单位区间内的概率是不同的。

历史上，首先由德国数学家、理论物理学家高斯(Carl Friedrich Gauss 1777～1855)于 1795 年从数学上推导出只存在偶然误差的测量中，获得测量值为 x 的概率密度函数的表达式

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, |x| < +\infty \tag{4}$$

式中，μ 是待测物理量的真值；x 是测量值。数学上，如果一个随机变量的概率密度函数是这种形式的函数，则称这个随机变量服从正态分布(或称高斯分布)。所以只存在偶然误差的测量值服从正态分布。

式(4)中的 $x-\mu=\Delta$ 是测量值的偶然误差，可见每次测量的偶然误差大小和正负虽在测量前无法预言，但它也服从正态分布。即

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\Delta^2/2\sigma^2}, |\Delta| < +\infty \tag{5}$$

式(4)、(5)中 σ 是函数参量，它完全取决于测量条件，在一定的测量条件下 σ 是一个常量。图 1.3.1 和图 1.3.2 分别是测量值和测量误差的正态分布曲线。

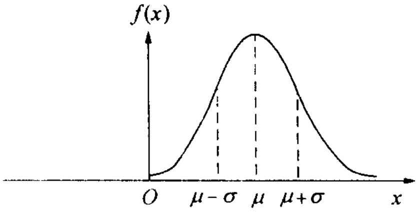


图 1.3.1

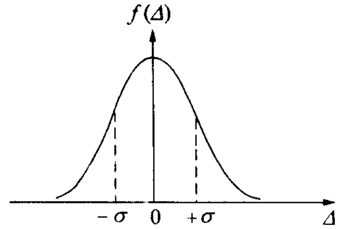


图 1.3.2

任意一次的测量值出现在区间$[x, x+dx]$内的概率为 $f(x)dx$，任意一次的测量误差出现在区间$[\Delta, \Delta+d\Delta]$内的概率为 $f(\Delta)d\Delta$。因为任意一次的测量值和测量误差一定在$(-\infty, +\infty)$内出现，所以任意一次的测量值和测量误差在$(-\infty, +\infty)$内出现的概率为 1。即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta)d\Delta = 1$$

从图 1.3.2 可知，服从正态分布的偶然误差有以下几个特点：

1)单峰性　即绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大；

2)对称性　即绝对值相等的正误差和负误差出现的概率相等；

3)有界性　即在一定的测量条件下，误差的绝对值不超过一定的界限；

4)抵偿性　即偶然误差的算术平均值随着测量次数的增加而越来越趋于零，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta\cdot f(\Delta)\mathrm{d}\Delta=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\Delta^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}\Delta=0 \tag{6}$$

3.2　**偶然误差的表示法**

偶然误差的大小常用标准误差、平均误差和极限误差表示。

1. 标准误差

可以证明，偶然误差所服从的正态分布的表达式中，参量 σ 具有以下表达式

$$\sigma=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}} \tag{7}$$

式中，n 是重复测量的次数；x_i 是第 i 次的测量值；μ 是待测物理量的真值。σ 称为 n 次重复测量中任意一次测量值的标准误差，简称标准误差或方均根误差。

式(7)证明如下。

因为 $x_i-\mu=\Delta_i$ 是第 i 次测量的偶然误差，于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}{n}=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2 f(\Delta)\mathrm{d}\Delta$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\Delta^2/2\sigma^2}\mathrm{d}\Delta$$

上述积分中的被积函数是偶函数，且积分区间对称，用分部积分法，并利用$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，便得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}=\sigma^2$$

所以

$$\sigma=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}}$$

如果令函数 $f(\Delta)$ 的一阶导数等于零，即

$$\frac{\mathrm{d}f(\Delta)}{\mathrm{d}\Delta}=\frac{-\Delta}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\Delta^2/2\sigma^2}=0$$

得 $\Delta=0$，可见函数 $f(\Delta)$在 $\Delta=0$ 处有一极大值 $f(0)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$，这就是正态分布曲线的峰值(图 1.3.3)。$\sigma$ 越小，曲线越陡且峰值越高，说明任意一次测量的偶然误差出现在小

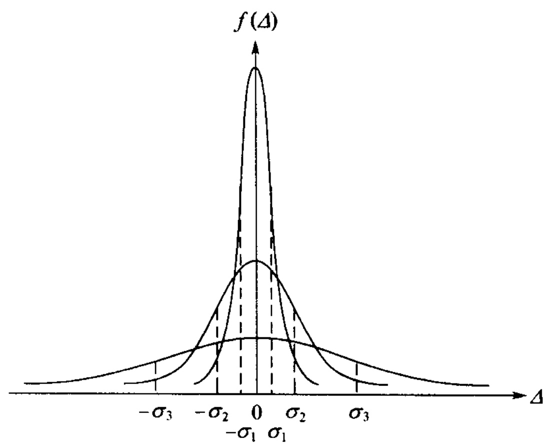


图 1.3.3

误差范围内的概率大，各次测量值的分散性小，即测量的精密度高。反之，σ 越大，曲线越平坦且峰值越低，各次测量值的分散性越大，即测量的精密度低。所以 σ 的大小反映测量精密度的高低。

任意一次测量的偶然误差出现在区间$[-\sigma,+\sigma]$内的概率为

$$P(-\sigma<\Delta<+\sigma)=\int_{-\sigma}^{+\sigma}f(\Delta)\mathrm{d}\Delta=\int_{-\sigma}^{+\sigma}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\Delta^2/2\sigma^2}\mathrm{d}\Delta=68.3\%$$

该积分值可以从拉普拉斯积分表查得。任意一次测量值出现在包含真值 μ 的区间$[\mu-\sigma,\mu+\sigma]$内的概率为

$$P(\mu-\sigma<x<\mu+\sigma)=\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\sigma}^{+\sigma}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\Delta^2/2\sigma^2}\mathrm{d}\Delta=68.3\%$$

因为区间$[\mu-\sigma,\mu+\sigma]$可写为不等式 $\mu-\sigma\leqslant x\leqslant\mu+\sigma$，由此不等式可得 $x-\sigma\leqslant\mu\leqslant x+\sigma$。于是又可以得到一个结论：若任意一次的测量值为 x，则在区间$[x-\sigma,x+\sigma]$内包含真值 μ 的概率为 68.3%。有时称包含真值的区间为置信区间，在给定的置信区间内包含真值的概率为置信概率。这个结论很重要。它表明在只存在偶然误差的测量中，测量次数无限多时，如果以任意一次的测量值 x 表示测量结果，当然它的偶然误差不知道有多大，但在标准误差 $\pm\sigma$ 的范围内，即在区间$[x-\sigma,x+\sigma]$内包含真值 μ 的概率为 68.3%。如果扩大置信区间，置信概率就会提高。例如，可以证明在区间$[x-2\sigma,x+2\sigma]$内，置信概率为 95.4%，在区间$[x-3\sigma,x+3\sigma]$内，置信概率为 99.7%。因此，表示一个测量结果，必须给出置信区间和置信概率。

2. 平均误差

在同一测量条件下，对同一物理量作 n 次重复测量，平均误差定义为

$$\eta=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\mu|}{n}\tag{8}$$

式中，x_i 是第 i 次测量值；μ 是真值。不难证明平均误差和标准误差有如下关系

$$\eta=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\approx0.789\sigma\tag{9}$$

因为

$$\eta=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\mu|}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i|}{n}=\int_{-\infty}^{0}(-\Delta)f(\Delta)\mathrm{d}\Delta+\int_{0}^{+\infty}\Delta f(\Delta)\mathrm{d}\Delta$$

$$=2\int_{0}^{+\infty}\Delta f(\Delta)\mathrm{d}\Delta=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\Delta\mathrm{e}^{-\Delta^2/2\sigma^2}\mathrm{d}\Delta$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

任意一次测量值的偶然误差出现在区间$[-\eta,+\eta]$内的概率为

$$P(-\eta<\Delta<+\eta)=\int_{-\eta}^{+\eta}f(\Delta)\mathrm{d}\Delta=\int_{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma}^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\Delta^2/2\sigma^2}\mathrm{d}\Delta$$

$= 57.5\%$

因为误差 $\Delta = x - \mu$ 在区间$[-\eta, +\eta]$内出现可表达成不等式$|x-\mu| \leqslant \eta$,由此得 $x-\eta \leqslant \mu \leqslant x+\eta$。因而又得结论:若任意一次的测量值为 x,则在区间$[x-\eta, x+\eta]$内包含真值 μ 的概率为 57.5%。即置信概率为 57.5%。

3.极限误差 δ

极限误差定义为 $\delta = 3\sigma$,即 3 倍的标准误差为极限误差。任意一次测量值的偶然误差出现在区间$[-3\sigma, +3\sigma]$内的概率为

$$P(-\delta < \Delta < +\delta) = \int_{-\delta}^{+\delta} f(\Delta) \mathrm{d}\Delta = \int_{-3\sigma}^{+3\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\Delta^2/2\sigma^2} \mathrm{d}\Delta = 99.7\%$$

因为区间$[-3\sigma, +3\sigma]$可写成$|x-\mu| \leqslant 3\sigma$ 由此得 $x-3\sigma < \mu < x+3\sigma$。所以,如果任意一次测量值为 x,则真值 μ 出现在$[x-3\sigma, x+3\sigma]$内的概率也为 99.7%,即置信概率为 99.7%。这表明在 1 000 次重复测量中,测量值的偶然误差绝对值超过 3σ 的只有 3 次左右,所以把 3σ 称为极限误差。

4 偶然误差的估算

实际上,对物理量的重复测量不可能进行无限多次,待测物理量的真值 μ 也永远无法知道。因而前面介绍的每次测量值的偶然误差 Δ_i 无法计算,于是算术平均误差 η、标准误差 σ 以及极限误差 3σ 也无法计算。所以这些概念还只具有理论上的价值。下面设法将这些概念近似地用于有限多次的重复测量及真值不知道的情形。

4.1 算术平均值 $\bar{x}$

设在同一测量条件下,对某一物理量作 n 次测量,每次的测量值为 x_1、x_2、…、x_n,则 n 次测量值的算术平均值为

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{10}$$

对 n 次测量的偶然误差求和,并除以测量次数,即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu = \bar{x} - \mu$$

因为偶然误差具有抵偿性,即当测量次数 $n \to \infty$ 时,$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) \to 0$[见式(6)],于是 $\bar{x} \to \mu$。由此可见,测量次数越多,算术平均值越接近真值。因而,多次测量值的算术平均值是待测物理量的最佳估计值。以后做实验时,就用算术平均值近似地代替真值。

4.2 残差 v_i

任意一次的测量值 x_i 与算术平均值 $\bar{x}$ 之差称为残差,又称为偏差。即

$$v_i = x_i - \bar{x} \tag{11}$$

以后,用残差 v_i 近似地代替任意一次测量的偶然误差 Δ_i。

4.3 平均偏差 η_x

n 次重复测量的算术平均偏差定义为

$$\eta_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{\sqrt{n(n-1)}} \tag{12}$$

式中 $|x_i - \bar{x}|$ 是第 i 次测量值的残差的绝对值。以后用平均偏差 η_x 近似地代替平均误差 η。

一般地讲，用平均偏差 η_x 近似地代替算术平均误差后，只要重复测量的次数在 10 次以上，任意一次测量值的偶然误差出现在区间 $[-\eta_x, +\eta_x]$ 内的概率仍然在 57% 左右。如果任意一次的测量值是 x，则区间 $[x-\eta_x, x+\eta_x]$ 内包含真值 μ 的概率也在 57% 左右。

4.4 **标准偏差 σ_x**

设 n 次重复测量中第 i 次测量值的偶然误差为 $\Delta_i = x_i - \mu$，$i = 1、2、\cdots、n$，取它们的算术平均值，即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = \bar{x} - \mu$$

写成 $\bar{x} = \mu + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i$，第 i 次测量值的残差为

$$v_i = x_i - \bar{x} = x_i - \mu - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i$$

即

$$v_i = \Delta_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i$$

对上式平方求和得

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} v_i^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left[\Delta_i^2 - 2\Delta_i \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\right)^2\right] \\
&= \sum_i \Delta_i^2 - 2\cdot\frac{1}{n}\left(\sum_i \Delta_i\right)^2 + n\cdot\frac{1}{n^2}\left(\sum_i \Delta_i\right)^2 \\
&= \sum_i \Delta_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_i \Delta_i\right)^2
\end{aligned}$$

因为，偶然误差具有对称性，即在多次重复测量中绝对值相等的正负误差出现的概率接近相等，故将 $\left(\sum_i \Delta_i\right)^2$ 展开后，交叉项 $\Delta_1\Delta_2、\Delta_1\Delta_3、\cdots$ 为正负的数值接近相等，彼此相消。于是有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\right)^2 \approx \sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \approx \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}} \approx \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}{n}}$$

上式右边若取 $n \to \infty$ 时的极限，便是标准误差 σ。因而，上式右边的表达式是标准误差 σ 的接近值（近似值），或者说是标准误差 σ 的最佳估计值，称为标准偏差，记为 σ_x，即

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{13}$$

以后使用标准偏差 σ_x 近似地代替标准误差 σ。

一般地讲，用标准偏差 σ_x 近似地代替标准误差 σ 时，只要重复测量的次数在 10 次以上，任意一次测量值的偶然误差出现在区间[$-\sigma_x$, $+\sigma_x$]内的概率也在 68% 左右。如果任意一次的测量值为 x，则在区间[$x-\sigma_x$, $x+\sigma_x$]内包含真值 μ 的概率也在 68%。

4.5　**极限偏差 δ_x**

因为 $\delta=3\sigma$，所以极限偏差的 $\delta_x=3\sigma_x$。如果用极限偏差近似地代替极限误差，只要重复测量的次数在 10 次以上，则任意一次测量值的偶然误差出现在区间[$-3\sigma_x$, $+3\sigma_x$]内的概率在 99% 左右，在区间[$\bar{x}-3\sigma_x$, $\bar{x}+3\sigma_x$]内包含真值的概率也在 99% 左右。

4.6　**算术平均值的标准偏差 $\sigma_{\bar{x}}$**

实际测量中，重复测量的次数有限，平均值不能无限接近真值。在同一测量条件下，对物理量重复测量 n 次，求得平均值 $\bar{x}_1$ 后，在原测量条件下，再重复测量 n 次，所得平均值 $\bar{x}_2$ 一般不会与 $\bar{x}_1$ 相同，因而平均值 $\bar{x}_1$、$\bar{x}_2$ 与物理量真值之差——偶然误差也不同。由此可见，n 次测量的平均值 $\bar{x}$ 和任意一次的测量值 x 一样，也具有随机性。由误差理论可以证明平均值的标准偏差为

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{14}$$

上式表明，平均值 $\bar{x}$ 的标准偏差 $\sigma_{\bar{x}}$ 是 n 次重复测量中任意一次测量值的标准偏差 σ_x 的 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 倍。

在[$\bar{x}-\sigma_{\bar{x}}$, $\bar{x}+\sigma_{\bar{x}}$]内包含真值 μ 的概率在 68% 左右。随着测量次数 n 的增加，$\sigma_{\bar{x}}$ 减小，说明平均值 $\bar{x}$ 更加接近真值 μ。但是，由于 $n>10$ 以后，$\sigma_{\bar{x}}$ 变化极慢，所以实际测量次数不必很多，一般取 10 次左右就够了。

按理，测量结果应报导出 $\bar{x}$ 和 $\sigma_{\bar{x}}$，即报导出测量结果的最佳值和最佳值的可靠程度。但当被测量本身不稳定，因而无确定的真值时，只需报导最佳值 $\bar{x}$ 和单次测量的标准偏差 σ_x。例如，测量一个本身不太圆的钢球的直径 D 时，各方向测得的直径的平均值 $\bar{D}$ 只代表钢球直径的平均效应，所以不必计算 $\sigma_{\bar{D}}$。在本课程中，主要要求实验者掌握 $\bar{x}$、η_x、σ_x 的计算。

4.7　**对具有粗大误差的测量值的处理**

在多次重复测量中，有时一、二个测量值的残差很大。对这种有反常残差的测量值，应仔细研究产生的原因，如果确定不是因为读数、记录或计算错误造成的，就应该保留。在作数据处理时，按一定的统计原则剔除它。

曾指出，在重复测量中，任意一次测量值的偶然误差出现在[$-3\sigma_x$, $+3\sigma_x$]内的概率为 99% 左右，出现在此区间外的概率只有 1% 左右。故在 10 次左右的测量中，出现残差的绝对值大于 $3\sigma_x$ 几乎是不可能的。因而常采用 $3\sigma_x$ 做为粗大残差的界限，即在数据处理中把残差绝对值大于 $3\sigma_x$ 的测量值予以剔除。这个原则称为拉依达准则。具体做法是，先对所有测量值求算术平均值 $\bar{x}$ 和标准偏差 σ_x，再检查各测量值中有没有残差绝对值 $|v_i|>3\sigma_x$ 的，若有，将其剔除。剔除后把其余的测量值重新求平均值和标准偏差，再检查有否残差的绝对值超过三倍标准偏差的测量值，若有，再剔除，一直做到没有为止。