



学人教版教材
用人教版教辅

高中同步系列

(双色版)

与人教版全日制普通高级中学教科书(试验修订本)同步

教材精析精练

数学 第二册(上)



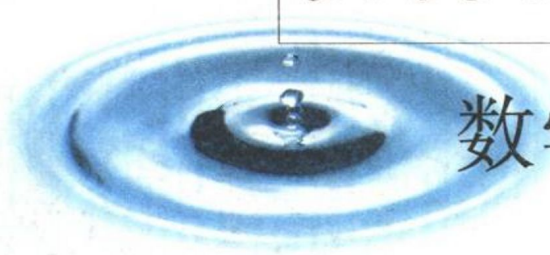
人民教育出版社

延边教育出版社

高中同步系列

与人教版全日制普通高级中学教科书(试验修订本)同步

教材精析精练



数学 第二册(上)

学校_____

班级_____

姓名_____

人民教育出版社 延边教育出版社

- ☐ 顾 问：顾振彪 蔡上鹤 龚亚夫
- ☐ 策 划：崔炳贤 申敬爱
- ☐ 丛书主编：周益新
- ☐ 本册主编：项中心
- ☐ 编 著：项中心 陈体国 梅寿桃 余祖良 王席良 赵正良
 易汉桃 乐东华 张 帆 宋新春 武 冰 汤彩仙
 吴克明 刘辉弦 易 霁 李 娟 邢 环 于汉雄
- ☐ 特邀编辑：廖康强
- ☐ 责任编辑：张倩影 黄俊葵
- ☐ 编辑统筹：宁德伟
- ☐ 封面设计：王 睢 于文燕
- ☐ 版式设计：李 超

与人教版全日制普通高级中学教科书（试验修订本）同步
《教材精析精练》数学 第二册（上）

出 版：人民教育出版社 延边教育出版社
 发 行：延边教育出版社
 地 址：北京市海淀区紫竹院路 88 号紫竹花园 D 座 702
 邮 编：100087
 网 址：<http://www.ybep.com>
 电 话：010-88552311 88552651
 传 真：010-88552651-11
 排 版：北京民译印刷厂
 印 刷：保定市印刷厂
 开 本：787×1092 16 开本
 印 张：10
 字 数：268 千字
 版 次：2002 年 5 月第 1 版
 印 次：2002 年 5 月第 1 次印刷
 书 号：ISBN 7-5437-4739-1/G·4268
 定 价：（双色版）12.00 元

如印装质量有问题，本社负责调换

前言

为了配合人民教育出版社全日制普通高级中学教科书(试验修订本)的推广使用,以适应新教材课程改革、研究性学习、“3+X”高考模式改革和培养学生健全的聚合思维及发散思维能力,人民教育出版社、延边教育出版社组织约请了参与人教版新教材试验并对新教材及“3+X”高考改革和思维能力培养有深入研究的湖北黄冈市、北京海淀区、山西省、江苏省、广东省、浙江省等国内知名教师共同编写这套丛书。

目前市场上教辅书多而杂,大多数是教材的翻版,且从内容上讲,与新教材课程改革、研究性学习、“3+X”高考模式改革之间缺乏必要的联系。针对这种状况,我们策划了本套丛书,目的在于培养学生理性的、逻辑性的思维方式和研究、解决问题的方法,使学生在高中课程的学习中将各学科基础的、核心的、可再生的知识内容系统化,构建起学科知识体系,并掌握科学的方法和技巧,来解决学习中的思维障碍。同时,通过适当的练习,使学生了解、适应新大纲、新教材对知识范围和能力的要求。促使学生转换固有的、陈旧的思维方式,使他们拥有全面、健康、严谨、灵活的思维品质,让他们学会将社会热点、焦点问题和新科学发现、新技术的发明等问题同日常学习联系起来,使他们拥有综合的发散思维能力。

这套丛书主要有以下特点:

权威性——以国家教育部颁布的新教学大纲为纲,以人民教育出版社最新教材(试验修订本)为依据,人民教育出版社各学科编辑室指导全书编写工作并审定丛书书稿。

新颖性——丛书根据国家教育部颁布的高中各年级课时标准编写,体现了课程改革新方案、“3+X”高考模式改革和研究性学习新思路,突出新教材、新大纲中知识、能力、素质“三元合一”的教学模式和方法、实践、创新“三位一体”的教学内容,侧重学法指导。减少陈题,不选偏题,精编活题,首创新题,启迪思维方法。将国际上流行的开发学生智力的“活性动态”版式与我国教辅版式相结合,既保护了学生视力、激活了思维,又符合中学生心理年龄层次。



前瞻性——丛书突出素质教育的要求,强调培养学生创新精神和实践能力,设计了学生自己构思答案的研究性学习案例和充分挖掘学生思维潜力的潜能测试,以培养和提高学生的发散思维能力。

实用性——内容与教材紧密配套,既有教师的精辟分析和指导学生自主学习知识归纳和学法建议,又有剖析“活题”思维障碍的解题思维技巧。课后有精选精编针对性很强的知能达标训练和综合能力训练;每单元进行一次小结和能力测试;期中、期末进行阶段性测试,方便学生与人教版教材同步配套使用,可操作性极强。

科学性——丛书按学习规律和思维能力培养的规律循序渐进,突出能力升级的五步递进——知识归纳、学法建议、潜能开发、知能达标训练、综合能力训练,科学地对学生进行显能测试和潜能测试,培养学生思维的敏捷性、科学性、深刻性和发散性。

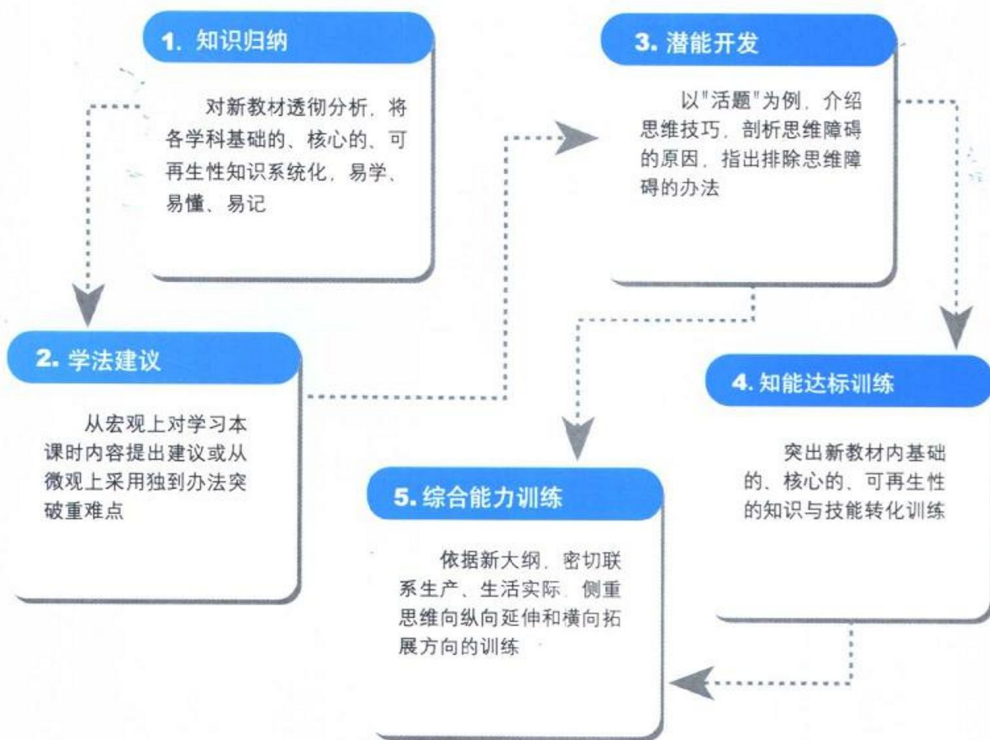
这套丛书在策划、组稿、编写、审读整个过程中,得到了人民教育出版社和延边教育出版社的支持和指导,在此一并致谢。

思维是智力的核心,思维更是能力的体现。思维的表现特征是素质教育和创新教育重要的研究课题。在我国,对中学生进行科学的思维技巧训练、显能测试和潜能测试是一种新的教学尝试。尽管书中许多内容是作者长期教学实践和潜心研究的心得和成果,但仍需要不断完善,不当之处,恳请专家、读者指正。

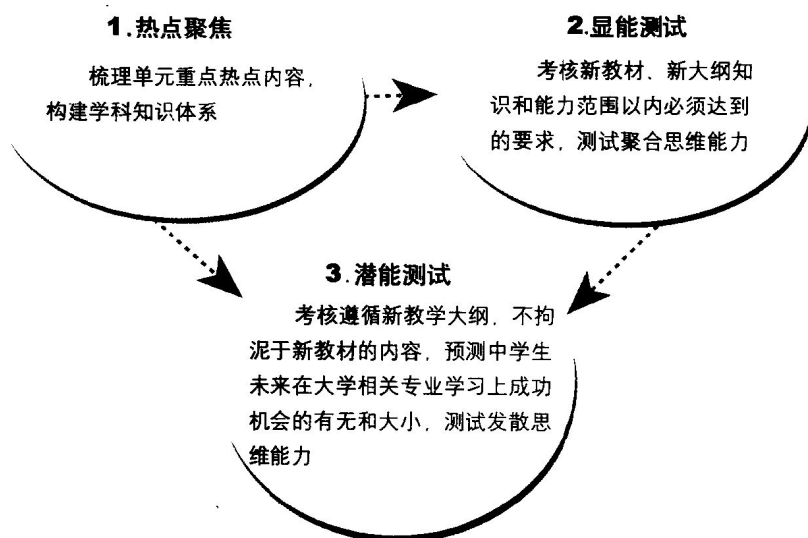
丛书主编:周益新

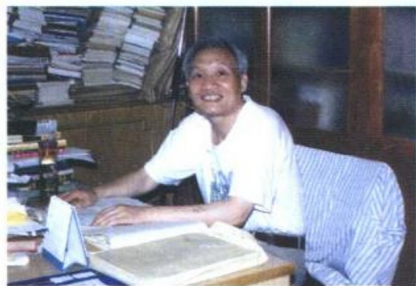
2002年4月

内容结构与能力培养过程示意图（高中同步）



单元小结





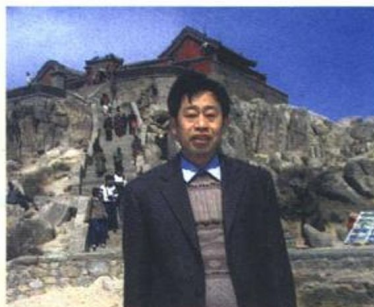
顾振彪 1965年毕业于华东师范大学中文系，人民教育出版社中学语文室编审，课程教材研究所研究员。从事中学语文教材编写、研究工作三十多年，参与或主持编写初、高中语文教材多套。与人合著《语文教材编制与使用》、《文学创作技巧七十题》、《新中国中学语文教育大典》等，并撰写论文《义务教育初中语文教材的编写与实验》、《国外文学教材管窥》等数十篇。

蔡上鹤 1964年毕业于华东师范大学数学系，人民教育出版社编审。主要从事中学数学课程、教材的理论研究和实践活动。曾编写过中学数学通用教材、中学数学教学指导书，著有《数学纵横谈》、《初中数学学习问答》等书；发表过50余篇学术论文，其中《民族素质和数学素养》一文被原国家教委评为一等奖。1983、1984年参加高考数学试卷的命题工作。曾出席国际数学教育大会和国际数学教育心理学会会议。1995年10月被国务院授予有突出贡献专家称号。现兼任中国数学会《数学通报》编委、人教社《中小学教材教学（中学理科版）》副主编、北京师范大学兼职教授。



高亚夫 全国政协第九届委员会委员，课程教材研究所研究员，人民教育出版社英语室主任，编审，现行高中英语教学大纲及新基础教育英语课程核心小组成员。加拿大约克大学教育系研究生毕业，获教育硕士学位。长期从事基础英语教育研究工作，曾在北京海淀区教师进修学校、美国威斯康辛州私立学校任教。1991—1993年在教育部基础教育司工作。主编、改编过多套大型电视英语教学片，其中较有影响的有《走遍美国》、《澳洲之旅》、《TPR儿童英语》等，参与编著英语教材，英语学习方法等各类图书，并发表文章数十篇。

周益新 中国科协国家教育专家委员会学术委员，全国优秀地理教师，《中国教育报》高考研究专家。在湖北省黄冈中学工作二十多年，潜心研究素质教育、创新教育与学生潜能开发的方法和途径。在《光明日报》、《中国教育报》等国家级报刊发表教育研究论文数十篇。指导学生撰写的研究性学习小论文获湖北省科协、湖北省教研室一等奖。策划并主编教育教研丛书多部。





◆ 第6章 不等式	1
6.1 不等式的性质	1
6.2 算术平均数与几何平均数	6
6.3 不等式的证明	12
6.4 不等式的解法举例	20
6.5 含有绝对值的不等式	25
第6章 小 结	30
◆ 第7章 直线和圆的方程	34
7.1 直线的倾斜角和斜率	34
7.2 直线的方程	38
7.3 两条直线的位置关系	47
7.4 简单的线性规划	57
7.5 曲线和方程	65
7.6 圆的方程	72
第7章 小 结	81
◆ 第8章 圆锥曲线方程	84
一 椭圆	84
8.1 椭圆及其标准方程	84
8.2 椭圆的简单几何性质	89
二 双曲线	96
8.3 双曲线及其标准方程	96
8.4 双曲线的简单几何性质	103
三 抛物线	110
8.5 抛物线及其标准方程	110
8.6 抛物线的简单几何性质	117
第8章 小 结	123
◆ 期中测试题	127
◆ 期末测试题	129
◆ 参 考 答 案	132

第 6 章

不 等 式

6.1 不等式的性质

知识归纳



1. 两个实数的大小

两个实数的大小是用实数的运算性质来定义的,有

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b; \quad a-b=0 \Leftrightarrow a=b; \quad a-b<0 \Leftrightarrow a<b.$$

2. 不等式的性质

性 质	内 容
对称性	$a>b \Leftrightarrow b<a$ $a<b \Leftrightarrow b>a$
传递性	$\left. \begin{array}{l} a>b \\ b>c \end{array} \right\} \Rightarrow a>c$
加法性质	$\left. \begin{array}{l} a>b \\ c \in \mathbf{R} \end{array} \right\} \Rightarrow a+c>b+c$ $\left. \begin{array}{l} a>b \\ c>d \end{array} \right\} \Rightarrow a+c>b+d$
乘法性质	$\left. \begin{array}{l} a>b \\ c>0 \end{array} \right\} \Rightarrow ac>bc$ $\left. \begin{array}{l} a>b>0 \\ c>d>0 \end{array} \right\} \Rightarrow ac>bd$
指数运算性质	$\left. \begin{array}{l} a>b>0 \\ n \in \mathbf{N}_+ \end{array} \right\} \Rightarrow a^n>b^n$ $\left. \begin{array}{l} a>b>0 \\ n \in \mathbf{N}_+ \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$
倒数性质	$\left. \begin{array}{l} a>b \\ ab>0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$



学 法 建 议

本节内容的重点是不等式的性质,推论及证明;难点是不等式性质中各字母的限制条件及运用不等式的性质解决一些实际问题;关键是要弄清每一性质的条件和结论,注意条件的放宽和加强,以及条件与结论之间的相互联系.

学习中要注意以下几点:

1. 对于不等式的性质,不仅要了解性质的内容,还要掌握不等式性质是如何证明的.
2. 要深入理解不等式的性质. 特别要注意有些性质的逆命题是成立的;有些性质的逆命题不成

·高中数学第二册(上) 教材解析精练

立;有些不等式性质成立的条件是充分必要的,有些不等式性质成立的条件是充分不必要的.

例如 $a > b$ 就是 $b < a$ 的充要条件. 而对于传递性,由 $a > b$ 且 $b > c$ 可得 $a > c$;反过来由 $a > c, b > c$ 不能得到 $a > b$. 同时由 $a > c, a > b$ 也不能得到 $b > c$, 因此 $a > b$ 且 $b > c$ 是 $a > c$ 成立的充分不必要条件.

3. 运用不等式性质时注意不要弱化了条件,也不要强化了条件,否则都会得出错误结论. 如:在应用“ $a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”这一性质时,有些同学要么是弱化了条件,写成 $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$,要么是强化了条件,写成 $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

4. 不等式性质的考查常与函数的性质,充要条件结合起来,因而在学习中,要注意不等式性质与有关知识的联系和结合.



潜能开发

[例 1] 判断下列命题的真假,并简述理由.

- (1) 若 $a > b, c > d$, 则 $ac > bd$;
- (2) 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$;
- (3) 若 $a > b, c < d$, 则 $a - c > b - d$;
- (4) 若 $a > b$, 则 $a^n > b^n, \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbf{N}_+, \text{且 } n \geq 2)$.

思路分析

上述不等式都不能直接运用不等式的性质. 要断定命题是真命题,必须经过严格的推理论证;要断定命题是假命题,只要举出恰当的反例即可,但举反例不是轻而易举的一件事,这里用“相等法”及取特殊值法求解.

[解答] (1) 取 $a = 3, b = 2, c = -2, d = -3$, 即 $3 > 2, -2 > -3$, 此时, $ac = bd = -6$. 因此(1)是假命题.

(2) 因同向不等式不能相除,取 $a = 6, b = 4, c = 3, d = 2$, 此时 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = 2$, 因此(2)为假命题.

(3) 由 $c < d$, 得 $-c > -d$, 因此(3)为真命题.

(4) $a > b > 0$ 时才能成立,取 $a = -2, b = -3$, 当 n 为偶数时不成立.

[例 2] 已知 $a > b (ab \neq 0)$, 比较 $\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{b}$ 的大小.

思路分析

判断它们差的符合,即求差比较法. 或在 $a > b$ 两边同乘 $\frac{1}{ab}$ 后进行

思维诊断

不等式的“运算”一定要依据加、乘规律以及传递性进行,不能自己“制造”性质来运算.

取特殊值要有一定的目的性、方向性,盲目取值,既浪费时间效果又差. 在(1)、(2)中,如果适当调整数值,会产生各种结果(大于、小于、等于).

思维诊断

求商比较法: $\frac{b}{a} > 1$, 误认为 $a > 0$ 导致错误. 还有的同学认为 a, b 为正数,直接

比较.

[解答]解法一: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$, 而 $b-a < 0$, 故:

当 $ab < 0$, 即 $a > 0 > b$ 时, $\frac{b-a}{ab} > 0$, 有 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;

当 $ab > 0$, 即 $a > b > 0$ 时, $\frac{b-a}{ab} < 0$, 有 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

解法二: 当 $ab > 0$ 时, $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$, 即 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$;

当 $ab < 0$ 时, $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$, 即 $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

[例 3] 设 $m \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$, 比较 $x^2 - x + 1$ 与 $-2m^2 - 2mx$ 的大小.

思路分析

作两个实数 $x^2 - x + 1$ 与 $-2m^2 - 2mx$ 的差, 考察它们差的符号, 这里的差的符号还需利用二次三项式的判别式的符号来确定. 也可以作差后用配方的方法证明它大于 0.

[解答]解法一: $\because (x^2 - x + 1) - (-2m^2 - 2mx) = x^2 + (2m-1)x + (2m^2+1)$,

二次三项式 $x^2 + (2m-1)x + (2m^2+1)$ 的判别式为

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4(2m^2+1) = -4m^2 - 4m - 3,$$

二次三项式 $-4m^2 - 4m - 3$ 的判别式为

$$\Delta' = (-4)^2 - 4(-4)(-3) = -32 < 0,$$

$\therefore x^2 + (2m-1)x + (2m^2+1) > 0$ 恒成立.

$\therefore (x^2 - x + 1) - (-2m^2 - 2mx) > 0$,

即 $x^2 - x + 1 > -2m^2 - 2mx$.

解法二: $\because (x^2 - x + 1) - (-2m^2 - 2mx)$

$$= x^2 + (2m-1)x + (2m^2+1)$$

$$= x^2 + (2m-1)x + \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 + 2m^2 + 1 - \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2.$$

$$= \left(x + \frac{2m-1}{2}\right)^2 + m^2 + m + \frac{3}{4}$$

$$= \left(x + \frac{2m-1}{2}\right)^2 + \left[m^2 + m + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{2}$$

$$= \left(x + \frac{2m+1}{2}\right)^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0,$$

$\therefore x^2 - x + 1 > -2m^2 - 2mx$.

[例 4] 设 $f(x) = ax^2 + bx$, 且 $1 \leq f(-1) \leq 2, 2 \leq f(1) \leq 4$, 求 $f(-2)$ 的取值范围.

可得 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. 这些都是违反不等式的性质. 解法二充分体现了转化意识和应用意识.

本题可作为今后有关不等式问题的一个非常重要的定理, 应用极为广泛, 请读者引起足够的重视.

思维诊断

作差之后, 有许多同学感到无从下手, 有的用特殊值法, 还有的这样讨论: $x^2 - x + 1 > 0$, 而 $-2m^2 - 2mx$ 有正有负, 需分类讨论. 这些方法都是片面的. 事实上, 二次三项式的符号确定, 用判别式较为简单.

判别式法对于解决作差之后为二次三项式的符号的判别有独特作用. 如果变量是多个, 可以其中一个为主元, 然后用判别式.

思维诊断

本题常出现下面的错误解法:

• 高中数学第二册(上) 教材同步训练

思路分析

因为 $f(-1)=a-b$, $f(1)=a+b$, 而 $1 \leq a-b \leq 2$, $2 \leq a+b \leq 4$, 又 $a+b$ 与 $a-b$ 中的 a, b 不是独立的, 而是相互制约的, 所以, 若将 $f(-2)$ 用 $a-b$ 和 $a+b$ 表示, 则问题得解.

[解答] 设 $f(-2)=mf(-1)+nf(1)$ (m, n 为待定系数),

则 $4a-2b=m(a-b)+n(a+b)$, 即

$$4a-2b=(m+n)a-(m-n)b.$$

$$\begin{cases} m+n=4, \\ m-n=2. \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} m=3, \\ n=1. \end{cases}$$

$$\therefore f(-2)=3f(-1)+f(1).$$

$$\because 1 \leq f(-1) \leq 2, 2 \leq f(1) \leq 4,$$

$$\therefore 5 \leq 3f(-1)+f(1) \leq 10. \text{ 故 } 5 \leq f(-2) \leq 10.$$

$$\begin{cases} 1 \leq f(-1) \leq 2, \\ 2 \leq f(1) \leq 4 \end{cases} \quad \text{得}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \leq a \leq 3, \\ 0 \leq b \leq \frac{3}{2}. \end{cases} \quad \text{故 } 3 \leq f(-2)$$

$=4a-2b \leq 12$. 上面解法错在多次运用同向不等式相加这一性质(单向性)上, 导致 $f(-2)$ 取值范围的扩大.



知能达标训练

一、选择题

- 如果 a, b, c, d 是任意实数, 则 ()
 A. $a > b, c = d \Rightarrow ac > bd$ B. $\frac{a}{c} > \frac{b}{c} \Rightarrow a > b$
 C. $a^3 > b^3, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $a^2 > b^2, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- 已知 $a+b > 0, b < 0$, 那么 $a, b, -a, -b$ 的大小关系是 ()
 A. $a > b > -b > -a$ B. $a > -b > -a > b$ C. $a > -b > b > -a$ D. $a > b > -a > -b$
- 已知 $-1 < a < b < 0$, 则下面不等式中正确的是 ()
 A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < b^2 < a^2$ B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < a^2 < b^2$ C. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < a^2 < b^2$ D. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < b^2 < a^2$
- 若 $a < b < 0$, 则下列不等式中不能成立的是 ()
 A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$ C. $|a| > |b|$ D. $a^2 > b^2$
- 若 α, β 满足 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 $\alpha - \beta$ 的取值范围是 ()
 A. $-\pi < \alpha - \beta < \pi$ B. $-\pi < \alpha - \beta < 0$ C. $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$ D. $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < 0$
- 有以下四个条件: (1) $b > 0 > a$; (2) $0 > a > b$; (3) $a > 0 > b$; (4) $a > b > 0$. 其中能使 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立的有 ()
 A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题

- 设 a 是互异的三个正数 a, b, c 中最大的数, 且 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $a+d$ 与 $b+c$ 的大小关系是_____.
- $a, b \in \mathbf{R}$, 则使 $a > b$ 与 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 同时成立的充要条件是_____.

三、解答题

9. 证明:

(1) 若 $a > b > 0, c < d < 0$, 则 $ac < bd$;(2) 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $\sqrt{\frac{a}{d}} > \sqrt{\frac{b}{c}}$.10. 设 $x, y, z \in \mathbf{R}$, 比较 $5x^2 + y^2 + z^2$ 与 $2xy + 4x + 2z - 2$ 的大小.11. 若 $a, b, x, y \in \mathbf{R}$, 求证 $\begin{cases} x+y > a+b \\ (x-a)(y-b) > 0 \end{cases}$ 是 $\begin{cases} x > a \\ y > b \end{cases}$ 成立的充要条件.

综合能力训练



一、选择题

- 已知命题“ $a \geq b \Rightarrow c \geq d$ ”和“ $a < b \Rightarrow e \leq f$ ”是真命题, 则下列命题中的真命题是 ()
 A. $e \geq f \Rightarrow c > d$ B. $c \leq d \Rightarrow e < f$ C. $e < f \Rightarrow c \geq d$ D. $c < d \Rightarrow e \leq f$
- 若 $a > b > 1$, 且 $P = \sqrt{\lg a \cdot \lg b}$, $Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$, $R = \lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 则 ()
 A. $R < P < Q$ B. $P < Q < R$ C. $Q < P < R$ D. $P < R < Q$
- 若 $a > b > c, a + b + c = 0$, 则有 ()
 A. $ab > ac$ B. $ac > bc$ C. $ab > bc$ D. 不同于 A、B、C 的结论
- 当 $a > 0, b > 0$ 时, 有 ()
 A. $\frac{b}{a^3} + \frac{a}{b^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ B. $\frac{b}{a^3} + \frac{a}{b^3} \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ C. $\frac{b}{a^3} + \frac{a}{b^3} \geq a + b$ D. $\frac{b}{a^3} + \frac{a}{b^3} \geq a^2 + b^2$
- 设 x, y, m, n 为互不相等的正数, 且 $x + y = m + n, 0 < \sqrt{x} - \sqrt{y} < \sqrt{m} - \sqrt{n}$, 则以下结论中正确的是 ()
 A. $xy > mn$, 且 $x > m > n > y$ B. $xy > mn$, 且 $m > x > y > n$
 C. $xy < mn$, 且 $x > m > n > y$ D. $xy < mn$, 且 $m > x > y > n$
- 设 $6 < a < 10, \frac{a}{2} \leq b \leq 2a, c = a + b$, 那么 c 的取值范围是 ()
 A. $9 < c < 30$ B. $0 \leq c \leq 18$ C. $0 \leq c \leq 30$ D. $15 < c < 30$

二、填空题

- 设 $a > b > 0, c > 0, d > 0$, 则 $\frac{b}{a}, \frac{a}{b}, \frac{b+c}{a+c}, \frac{a+d}{b+d}$ 之间的大小关系是_____.
- 已知三个不等式: (1) $ab > 0$; (2) $-\frac{c}{a} < -\frac{d}{b}$; (3) $bc > ad$. 以其中两个作为条件, 余下一个作为结论,

• 高中数学第二册(上) 教材新析精练

可以组成_____个正确的命题.

三、解答题

9. 设 $f(x) = 1 + \log_3 3$, $g(x) = 2 \log_3 2$, 其中 $x > 0$ 且 $x \neq 1$, 试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小.

10. 已知 a, b, c 为三角形三边, $a^2 + b^2 = c^2$, $n \in \mathbf{N}_+$, 且 $n > 2$, 求证 $c^n > a^n + b^n$.

11. 已知 $1 \leq a + b \leq 5$, $-1 \leq a - b \leq 3$, 求 $3a - 2b$ 的取值范围.

6.2 算术平均数与几何平均数

知识归纳



1. 几个重要的不等式

条 件	结 论	等号成立的条件
$a \in \mathbf{R}$	$a^2 \geq 0$	$a = 0$
$a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$	$a^2 + b^2 \geq 2ab$	$a = b$
$a > 0, b > 0$	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	$a = b$

2. 利用上述定理, 求两个正数 x, y 的和 $x+y$ 与积 xy 的最大(小)值.

(1) xy 为定值 P , 那么当 $x=y$ 时, 和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$;

(2) $x+y$ 为定值 S , 那么当 $x=y$ 时, 积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}S^2$.



学法建议

本节内容重点是算术平均数与几何平均数定理的含义及证明. 难点是运用算术平均数与几何平均数定理解决数学问题(如证明不等式、求最大(小)值、求变量的范围等). 关键是要注意定理成立的条件, 以及应用重要不等式解题时, 会创设一个应用重要不等式的情境和使等号成立的条件.

1. 对于重要不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 和 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 要明确它们成立的条件是不同的. 前者成立的条件是 a 与 b 都为实数, 并且 a 与 b 都为实数是不等式成立的充分必要条件; 而后者成立的条件是 a 与 b 都为正实数, 并且 a 与 b 都为正实数是不等式成立的充分不必要条件, 如 $a=0, b=0$ 仍然能使 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 成立.

两个不等式中等号成立的条件都是 $a=b$, 而 $a=b$ 是不等式中等号成立的充要条件.

2. 运用两个重要不等式解题时,要学会应用它们的变式灵活地解题,例如 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 可变形为 $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$, $b^2 \geq 2ab - a^2$, 以及当 $b > 0$ 时, $\frac{a^2}{b} + b \geq 2a$, $\lambda a^2 + \frac{1}{\lambda} b^2 \geq 2ab (\lambda > 0)$ 等. 又如 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 可变形为 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$, $(a+b)^2 \geq 4ab$ 等.

3. 在使用“和为常数,积有最大值”和“积为常数,和有最小值”这两个结论时,应把握“一正、二定、三相等、四最大(小)值”. 当条件不完全具备时,应创造条件.

4. $\frac{a+b}{2}$ 是两个正数 a 与 b 的算术平均数, $\sqrt{ab}$ 是两个正数的几何平均数, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 表明两个正数 a 与 b 的算术平均数不小于几何平均数. 此性质可推广到三个及三个以上的情况. 注意熟悉和掌握下列结论:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc \quad (a, b, c \in \mathbf{R}_+);$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad (a, b, c \in \mathbf{R}_+).$$



潜能开发

[例1] 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 求证 $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$.

思路分析

利用重要不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 及推论,联想到 $|a|^2 + |b|^2 \geq 2|ab| \geq 2ab$, 可以用已证的算术平均数与几何平均数定理来证明.

[证明] $a^2 + b^2 = |a|^2 + |b|^2 \geq 2\sqrt{|a|^2 \cdot |b|^2} = 2|ab|$.

当且仅当 $|a| = |b|$ 时取“=”号.

[例2] 求函数 $y = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$ 的最小值.

思路分析

用换元法, 设 $t = \sqrt{x^2 + 4} \geq 2$, 原函数变形为 $y = t + \frac{1}{t} (t \geq 2)$, 再利用函数 $y = t + \frac{1}{t} (t \geq 2)$ 的单调性可得结果. 或用函数方程思想求解.

[解答] 解法一: 设 $t = \sqrt{x^2 + 4} \geq 2$, 故 $y = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}} = t + \frac{1}{t} (t \geq 2)$.

设 $t_2 > t_1 \geq 2$, $y_1 - y_2 = (t_1 - t_2) + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) = (t_1 - t_2) \frac{t_1 t_2 - 1}{t_1 t_2}$.

由 $t_1 - t_2 < 0$, $t_1 t_2 > 2$, 得 $t_1 t_2 - 1 > 0$, 故 $y_1 < y_2$.

思维诊断

不等式等号成立的条件, 往往是学生易忽视的, 或有的学生在解答此题时把等号成立的条件写成 $a = b$. 排除错误的办法是准确理解重要不等式中等号成立的条件, 要在变量指定的取值范围内进行检验.

思维诊断

本题易出现如下错解:

$$y = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}} = \sqrt{x^2 + 4} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq 2. \text{ 要知道,}$$

$$\sqrt{x^2 + 4} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \text{ 无实数}$$

解, 即 $y \neq 2$, 所以原函数的最小值不是 2. 错误的原因是忽视了等号成立的条件.

当 a, b 为常数, 且 ab 为定值, $a \neq b$ 时, $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$,

• 高中数学第二册(上) 教材解析精练

∴ 函数 $y=t+\frac{1}{t}$ ($t \geq 2$) 为增函数, 从而 $y \geq 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

解法二: 设 $\sqrt{x^2+4}=t \geq 2$, 知 $y=t+\frac{1}{t}$ ($t \geq 2$), 可得关于 t 的二次方程 $t^2-yt+1=0$, 由根与系数的关系, 得 $t_1 t_2=1$.

又 $t \geq 2$, 故有一个根大于或等于 2.

设函数 $f(t)=t^2-yt+1$, 则 $f(2) \leq 0$, 即 $4-2y+1 \leq 0$, 故 $y \geq \frac{5}{2}$.

[例 3] $a > 0, b > 0, a+b=4$, 求 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2$ 的最小值.

思路分析

利用重要不等式求最小值.

[解答] 由 $a+b=4$, 得 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=16-2ab$.

又 $a^2+b^2 \geq 2ab$, 得 $16-2ab \geq 2ab$, 即 $ab \leq 4$.

$$\begin{aligned} \therefore \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 &\geq \frac{\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} \\ &= \frac{\left(4+\frac{4}{ab}\right)^2}{2} \geq \frac{\left(4+\frac{4}{4}\right)^2}{2} = \frac{25}{2}. \end{aligned}$$

故 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2$ 的最小值是 $\frac{25}{2}$.

[例 4] 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}_+$, 求证 $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c$.

思路分析

根据题设, 可想到利用重要不等式进行证明.

[证明] $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq 2\sqrt{\frac{abc^2}{ab}} = 2c$, 即 $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq 2c$.

同理, $\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} \geq 2b$, $\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a$.

$$\therefore 2\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right) \geq 2(a+b+c).$$

$$\therefore \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c.$$

不能直接求最大(小)值, 可以利用恒等变形 $a+b=\sqrt{(a-b)^2+4ab}$, 当 $a-b$ 之差最小时, 再求原函数的最大(小)值.

思维诊断

本题易出现如下错解:

$$\begin{aligned} \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 &\geq \\ &\left(2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}}\right)^2 + \left(2\sqrt{b \cdot \frac{1}{b}}\right)^2 \\ &= 4+4=8, \text{ 故 } \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \\ &\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \text{ 的最小值是 } 8. \end{aligned}$$

错误的原因是, 在两次用到重要不等式当等号成立时, 有 $a=1$ 和 $b=1$, 但在 $a+b=4$ 的条件下, 这两个式子不会同时取等号 ($a=1$ 时, $b=3$). 排除错误的办法是看都取等号时, 与题设是否有矛盾.

思维诊断

证明本题易出现的思维障碍是: (1) 想利用三元重要不等式解决问题; (2) 不会利用重要不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 的变式; (3) 不熟练证明轮换对称不等式的常用方法. 因此, 在证明不等式时, 应根据求证式两边的结构, 合理地选择重要不等式. 另外, 本题的证明方法在证轮换对称不等式时具有一定的普遍性.

[例 5] 设 $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$, 且 $a+b+c+d+e=8, a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$, 求 e 的最大值.

思路分析

如何将 a^2+b^2 与 $a+b$ 用不等式的形式联系起来, 是本题获解的关键. 算术平均数与几何平均数定理 $a^2+b^2 \geq 2ab$ 两边同加 a^2+b^2 之后得 $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2} \cdot (a+b)^2$.

[解答] 由 $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$, 则有

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq \frac{1}{2}[(a+b)^2+(c+d)^2]$$

$$\geq \frac{1}{4}(a+b+c+d)^2,$$

$$\therefore 16-e^2 \geq \frac{1}{4}(8-e)^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq e \leq \frac{16}{5}.$$

当 $a=b=c=d=\frac{6}{5}$ 时,

$$e_{\text{最大值}} = \frac{16}{5}.$$

[例 6] 某单位决定投资 3 200 元建一仓库(长方体状), 高度恒定, 它的后墙利用旧墙不花钱, 正面用铁栅, 每 1m 长造价 40 元, 两侧墙砌砖, 每 1m 长造价 45 元, 顶部每 1m² 造价 20 元. 计算:

(1) 仓库底面积 S 的最大允许值是多少?

(2) 为使 S 达到最大, 而实际投资又不超过预算, 那么正面铁栅应设计为多长?

思路分析

用字母分别表示铁栅长和一堵砖墙长, 再由题意翻译数量关系.

[解答] 设铁栅长为 x m, 一堵砖墙长为 y m, 则有 $S=xy$.

由题意得 $40x+2 \times 45y+20xy=3\,200$. (*)

应用算术平均数与几何平均数定理, 得

$$3\,200 \geq 2\sqrt{40x \cdot 90y} + 20xy$$

$$= 120\sqrt{xy} + 20xy$$

$$= 120\sqrt{S} + 20S,$$

$$\therefore S+6\sqrt{S} \leq 160,$$

思维诊断

常有以下错解: $16-e^2 = a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 2(ab+cd) \geq 4\sqrt{abcd}$, $8-e = a+b+c+d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$. 故 $\frac{(16-e^2)^2}{4^2} \geq abcd$, $\left(\frac{8-e}{4}\right)^4 \geq abcd$. 两式相除且开方得 $\frac{16-e^2}{(8-e)^2} \geq 1 \Rightarrow 0 \leq e \leq \frac{16}{5}$.

错因是两不等式相除, 如 $2 > 1, 1 > \frac{1}{2}$, 相除则有 $2 > 2$.

不等式 $a^2+b^2 \geq 2ab$ 是解诀从“和”到“积”的形式. 从“和”到“和”怎么办呢? 有以
下变形: $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$
或 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{1}{2}(a+b)$.

思维诊断

本题也可将 $y = \frac{S}{x}$ 代入 (*) 式, 导出关于 x 的二次方程, 利用判别式法求解.