

高等学校教学参考书

数学分析

第一册

何 琛 史济怀 徐森林 编



高等教育出版社

高等学校教学参考书

数 学 分 析

第 一 册

(一元微积分)

何 琛 史济怀 徐森林 编

高等教育出版社

内 容 简 介

本书系参照 1980 年 5 月在上海举行的高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会(扩大)会议上审订的综合大学数学、计算数学专业“数学分析教学大纲”编写的。全书共分三册。第一册为一元微积分。本册除传统内容外,还讨论了一般的映射和逆射概念、凸函数、上极限和下极限,并较详细地讨论了实数的连续性。第二册为多元微积分。该册内容与传统内容有较大的差异,讨论了映射的微分、隐射和逆射定理,并严格地讨论了平面上的 Riemann 积分,直观地介绍了 R^3 中的外微分运算。第三册为无穷级数和广义积分。该一册较详细地讨论了无穷级数、广义积分和求导次序交换的问题,还讨论了 Weierstrass 逼近定理和处处连续而处处不可导的例子,以及 Fourier 分析初步等内容。

本书可作为数学专业的教学参考书。

高等学校教学参考书

数 学 分 析

第 一 册

(一元微积分)

何 琛 史济怀 徐森林 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.875 字数 262,000

1983 年 12 月第 1 版 1984 年 8 月第 1 次印刷

印数 90,001—11,550

书号 13010·0958 定价 1.70 元

序 言

本书共分三册。第一册是一元微积分，第二册是多元(二元、三元和相当一部分 n 元)微积分，第三册是无穷级数和广义积分。内容大体与1980年5月在上海举行的高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会(扩大)会议上审订的综合大学数学、计算数学专业“数学分析教学大纲”相仿。

早在50年代，微积分的面貌在国外开始出现较大的变化，到了60年代就出现了很多观点较高的多元微积分著作。自此，我们深感微积分教材改革的首要问题是内容的现代化，这就是我们编写本书的指导思想。我们在书中对多元微积分部分的内容作了比较大的改变，对一元微积分部分也作了不少变动。无穷级数和广义积分是经典的分析基础，对此我们编写得比较充实，单独成册。

我们在编写时的基本想法是：线性代数要进入微积分，并且要在 R^3 中引进外微分运算。下面就本书的主要内容作一简介。

(1) 实数。我们认为，对于实数重要的是在思想上认识清楚它是如何产生的，它的最深刻部分是什么，以及实数公理大意。至于详尽的构造过程是很次要的，对初学者尤其是如此。所以我们在第一册中，前后分两至四个部分，反复讲解了上述内容。由于人们习惯于用无尽小数表示实数，我们证明了无尽小数有连续性(确界的存在性)。

(2) 函数。传统的教材大都忽略了函数的代数运算，似难跟上数学发展的需要。本书开始，我们按照《大纲》讲了从集合到集合的映射(函数)，这样可以避免以后对这个概念作重复枯燥的叙述。

在此基础上着重讲了函数的代数运算。由于“复合”是一种很重要的代数运算，因此我们严格地讲了逆射(反函数)的概念。凡此，均应区分函数 f 和函数值 $f(x)$ ，这在一切现代著作中早已这样做了。但由于演算和应用的需要，我们保留了一个不定义的概念——“变量”。视 x 为变量时， $y=f(x)$ 是因变量， x 是自变量。并仍用变量处理微分的运算，以使初学者易于掌握。

(3) 极限。关于数列极限我们分“两步走”。第一步讲至单调数列为止，但对单调数列有极限这一命题暂不作出证明。其中关于无理指数的问题，在讲授时不必详讲。在第一册将结束时再走第二步——全部实数连续性命题。在教学时，两步既可分开，也可合一。这一部分内容的重要性是人所公认的，我们应予以充分的重视。

(4) 微分。代数进入分析学，由来已久。自 60 年代以来，国外数学界已把线代数引入了微积分，这对于较快地提高数学水平是很有帮助的。因此我们以(从 R^n 中到 R^m 中的)映射为基本对象，讲了微分，切向量，隐射和逆射定理等。但是，对于象国外流行的那种采用线性变换讲解上述问题的方法未被采用，因为我们认为这似乎应是泛函分析的内容和方法，不宜用于微积分课本中，尤其不宜用于低年级的微积分课本中。因此我们一律改用矩阵。相应地，我们突出 **Jacobi** 矩阵的作用，它就是多元函数和映射的“导数”。为使初学者易懂，我们仍采用古典的方法(归纳法)证明隐射定理，然后再讲逆射定理，这也与大部分国外现代著作不同。

(5) 积分。严格处理多重 **Riemann** 积分，国外也是从 60 年代就已很普遍。本书为使初学者易学，我们把重点放在讲清二重积分上，读者自然也就懂得了多重积分，其中的讲法也可能是最简便的。我们认为，**Riemann** 积分的直观意义即“微元求和”的思想，对初学者是十分重要的，因此我们保留了积分的极限定义。既

然二重积分起到承上启下的作用,那么有关它的理论应是一个重点,所以在教学时,一重积分的可积性问题可以跳过不讲.这样,第一册的最后一章就可并入到第二册的开头一章(R^2 拓扑)中去.重积分换元是一个难点,我们就二重积分给出了严格的证明,但其方法同样适用于 n 重积分.

在 R^3 中引进外微分运算,早在 60 年代初期就已为龚昇同志积极主张,并成为我们教材改革的最早动机.之后他又在《简明微积分》一书中实践了上述想法.1980 年 5 月在上海举行的高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会(扩大)会议上将微分形式列入“数学分析教学大纲”,这对于提高数学分析水平是有好处的.一方面,可为以后学习微分流形提供预备知识.另一方面,外微分是一个有力的运算工具,它使得整个线面积分包括正交曲线坐标在内的内容易于处理.最明显的是统一了 Green 公式, Gauss 公式和 Stokes 公式,从而使我们在 R^3 中看到了“微积分基本公式”.当然,我们只能用直观的,初等的方法处理这个运算,不可能追求过高的严格性.在低年级微积分课本中这样做尚属少见,我们这种大胆尝试,恐未必十分妥当,难免有错,望识者指正.

(6) 无穷级数和广义积分.这部分内容是“硬分析”(古典分析学)的基本功,对大部分数学工作者都是必不可少的.这一“硬功”的基本训练,现今对学生仍然是很重要的.因此我们在书中编入了一些大纲要求以外的内容,如无穷乘积, Weierstrass 逼近定理,处处连续而处处不可导的例子,以及均值求和等.讲授时可以酌情删减.

本书配置了较多的习题.除大部分练习性的习题外,还有少量具有一定难度的习题.这些难题大多有提示,或采用了大题化小的办法,实际已非难题了.我们并不认为每一个初学者都必须全部完成书中的作业.我们编写了较多的习题,一方面使教师有挑

选的余地，另一方面使有余力的学生可以多思考一些问题。初学者应在教师指导下完成课外作业，如果埋头钻到习题堆里，那就与我们的愿望相违了。

全书讲授时数，恐难低于 250 个学时。使用本书时，内容可根据具体情况作适当调整，同时对一些过难的证明也可降低一些要求，这样就可使学时数相应减少。如果线代数的教学还未能跟上，则二、三册的教学次序可以进行适当的对换。

复旦大学欧阳光中同志在审稿时仔细阅读了全稿，指出了不少疏误，并提出了许多很好的意见，谨在此表示衷心感谢。

微积分是一门传统的基础课，但为适应科学技术发展的需要，它的面貌不停地在发生变化。作为既是入门又与其它学科有广泛联系的课程，欲编好它实非易事。限于我们的水平，深感力不从心，热切期望专家和读者对本书的缺点和错误给予批评指正。

编 者

1982.7

目 录

第一章 极限与连续	1
第一节 函数	1
§ 1.1 实数和数轴	1
§ 1.2 函数	7
§ 1.3 函数的代数运算	18
§ 1.4 初等函数	29
第二节 数列极限	36
§ 2.1 数列极限的概念	36
§ 2.2 数列极限的基本性质	46
§ 2.3 极限 ∞ ·子列	55
§ 2.4 单调数列	60
§ 2.5 圆周率 π	65
§ 2.6 数 e 和指数函数	68
第三节 函数极限	74
§ 3.1 函数极限的概念	74
§ 3.2 函数极限的性质	84
§ 3.3 数量级	95
第四节 连续函数	100
§ 4.1 函数的连续性	100
§ 4.2 连续函数的性质	108
§ 4.3 反函数的连续性	113
第二章 一元函数的微分	117
第一节 导数和微分	117
§ 1.1 引言	117
§ 1.2 导数概念	120
§ 1.3 求导法则	126
§ 1.4 补充例题	134
§ 1.5 高阶导数	140

§ 1.6	微分	146
第二节	用一阶和二阶导数研究函数	154
§ 2.1	微分平均值定理	154
§ 2.2	函数的增减	165
§ 2.3	函数的最大值和最小值	169
§ 2.4	函数的凹凸	177
§ 2.5	函数作图	184
§ 2.6	L'Hospital 法则	189
第三节	Taylor 公式及其应用	198
§ 3.1	Taylor 公式	198
§ 3.2	几个初等函数的 Taylor 公式	204
§ 3.3	Taylor 公式的一些应用	207
第三章	一元函数的积分	212
第一节	不定积分	212
§ 1.1	不定积分的概念	212
§ 1.2	换元法	218
§ 1.3	部分积分法	225
§ 1.4	有理函数的不定积分	229
§ 1.5	可有理化的积分	235
第二节	定积分	240
§ 2.1	引言	240
§ 2.2	定积分的概念	243
§ 2.3	定积分的性质	250
§ 2.4	微积分基本公式	259
§ 2.5	定积分的换元和分部积分	267
§ 2.6	定积分在物理上应用举例	277
第三节	广义积分	282
§ 3.1	无穷积分	282
§ 3.2	瑕积分	288
第四章	实数连续性·函数的连续性和可积性	294
第一节	实数连续性各等价命题	294
§ 1.1	确界	294
§ 1.2	有界闭区间的紧致性和列紧性	301

§ 1.3	R 的完备性·实数公理·····	305
§ 1.4	上极限和下极限·····	314
第二节	函数的连续性和可积性·····	323
§ 2.1	连续函数性质的证明·····	323
§ 2.2	一致连续·····	325
§ 2.3	函数的可积性·····	330

第一章 极限与连续

第一节 函 数

§ 1.1 实数和数轴

数学中的一个大的分支叫做“分析学”，分析学是从“微积分”开始的。微积分在古代就已可见其思想的萌芽，直至十七世纪才告产生。其后的一百余年中它完全处于混沌朦胧的状态，无严格的叙述和论证方法，因此众论纷纭，争论不休。直至十九世纪方始玉宇澄清，这是法、德数学家的贡献。他们提出了一个明确的“极限”概念，从而使微积分有了清楚的语言。极限是一种运算，是四则运算以外的一种运算，可以叫做“分析运算”。分析学就是以此运算为其基础的。但是，要弄清楚极限的道理，归根到底就是要弄清楚数。

那么数是什么呢？它又是如何产生的呢？也许大家会认为，这是不成问题的问题。其实不然，像今天这样文明的世界里，尚可找到一些偏僻的少数民族，他们几乎没有数的概念，只有少量几个数：1, 2, 3, 或多至 4, 5。自 4, 5 以上概曰为“多”。数的体系是人们在长期的生产和科学实践中逐渐创造出来的，但在很长的时期里，人们对数的认识很不完善，直至十九世纪，随着数学各学科的发展，人们对数才有了比较完善的数系理论。

我们说，桶内有 5 公升水，这话说明桶内水的含量，这个量是由数“5”和单位“公升”来共同表达的。所以数是反映量的，是量的抽象。量无非是多寡、长短和大小，是比较出来的。比如说，2 匹

马, 5 头羊, 这是量的多寡, 是可以数的量. 似乎可以说, 由这种可数量的多寡比较, 产生出了自然数 $1, 2, 3, \dots$. 但自然数远远不足以度量长短, 这是因为, 长短是连续变化的, 这种“连续”的量与上述“可数”的或“离散”的量有根本区别. 人们想到, 规定一个标准长叫做“一尺”, 一切长短拿来与这个标准长比较, 就产生了有尽小数的概念, 如 3 尺 2 寸 5 分, 即 3.25 尺. 大小就是面积或体积的比较, 而面积是长度的平方, 体积是长度的立方, 因此要用数反映量, 归根到底, 就是要创造出足以反映一切长短的全部数来. 也就是说, 规定了标准的单位长以后, 每一个线段都相应有一数表示其长短, 并且数与数的关系能反映线段的长短关系.

那么有尽小数是否能度量一切线段的长短呢? 还是远远不能! 下面我们就先来讲解这个问题.

数既然是反映量的, 为了反映量与量之间的关系, 就要对数做运算. 我们暂且不考虑加减法, 而先讨论除法的运算. 将 3 尺布平分给 5 个人, 这就要做除法, 每人得 $\frac{3}{5}$ 尺. 于是就产生了“分数”.

若 p, q 是两个无公因子的自然数, 则 $\frac{p}{q}$ 是一个分数.

从分数(除法)又产生有尽小数或无尽循环小数. 例如

$$\frac{22}{7} = 3.142857.$$

用 7 除 22, 除不尽, 产生余数 1; 再除, 产生余数 3; 如此下去, 每次所余只能是 0, 1, $\dots$, 6 这七个数之一. 因此最多除七次必得重复出现的余数. 如果重复出现的余数是 0, 就得有尽小数. 现在是得重复出现的非零余数 1, 因此得循环小数. 所以分数都是有尽小数或无尽循环小数.

反之, 一个有尽小数显然可以化为分数. 例如

$$3.25 = \frac{325}{100} = \frac{13}{4}.$$

而一个无尽循环小数也一定可以化为分数. 例如, 记

$$3.\dot{1}4285\dot{7}=3+0.\dot{1}4285\dot{7}=3+\alpha,$$

则

$$10^6\alpha=142857+\alpha,$$

于是

$$\alpha=\frac{142857}{10^6-1}=\frac{142857}{999999}=\frac{1}{7},$$

所以

$$3.\dot{1}4285\dot{7}=3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}.$$

由以上讨论知道: 分数都是有尽小数或无尽循环小数, 反之亦然. 所以有尽小数只是分数的一部分. 那么分数能否度量一切线段的长短呢? 仍是远远不能!

我们知道, 勾股均为 1 的直角三角形斜边之长为 $\sqrt{2}$. 这个数就不是分数. 事实上, 设 $\sqrt{2}$ 为分数:

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q},$$

其中 p, q 是无公因子的自然数. 于是

$$p^2=2q^2,$$

即 p^2 是偶数, 所以 p 也是偶数. 设 $p=2k$ (k 是一自然数), 代入上式则得

$$q^2=2k^2.$$

所以 q 也是偶数. 于是 p, q 有公因子 2, 这与 p, q 的假设矛盾. 所以 $\sqrt{2}$ 非分数. 由此可见分数不足以度量一切线段的长短, 它不能表示勾股均为 1 的直角三角形斜边之长, 因此我们还应补充新的数!

如果我们用尺去量 $\frac{5}{4}$ 尺 (将 5 尺 4 等分), 得 1 尺 2 寸 5 分, 即得 1.25 尺. 如果我们用尺去量 $\frac{22}{7}$ 尺, 得 3 尺 1 寸 4 分 2 厘 8 毫

5 丝..., 永远量不尽, 即得 3.142857 尺. 如果我们用尺去量勾股均为 1 尺的直角三角形的斜边, 则得 1 尺 4 寸 1 分 4 厘 2 毫 1 丝..., 也永远量不尽, 并且不会循环, 否则 $\sqrt{2}$ 就是分数了. 因此我们说 $\sqrt{2}$ 是一个无尽不循环小数:

$$\sqrt{2} = 1.41421\ldots,$$

于是我们看到, 用标准长去量一切线段只能出现上述三种情况: 量得尽, 得长为有尽小数; 量不尽, 出现循环, 得长为无尽循环小数; 量不尽, 且不出现循环, 得无尽不循环小数. 对于第三种情况, 我们自然用量得的无尽不循环小数表示该线段之长. 也就是说, 在分数(有尽或循环小数)的基础上再补充无尽不循环小数, 就可度量一切线段之长了.

直至七世纪才开始出现 0 这个数, 为了反映量的盈亏, 后来才又出现负数. 由运算的角度来看, 方程

$$3x + 2 = 1$$

在正数范围内无解, 而这样的方程随处可见, 所以必须有 0 和负数. 这是容易理解的. 我们把

$$0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

叫做“整数”. 把 0 和正负分数(整数也是分数)叫做“有理数”. 所以有理数包括正、负有尽和循环小数. 把正、负无尽不循环小数叫做“无理数”. 有理数和无理数统称“实数”, 或简称为“数”. 有尽小数当然也可以看作特殊的无尽(循环)小数, 例如

$$1.25 = 1.2500\ldots = 1.2499\ldots.$$

这样, 实数就是全体无尽小数.

构造了实数以后, 我们就可以建立“数轴”. 在直线 l (图 1) 上任取一点 O 叫做原点. 再取定一个线段叫做单位长. 以此单位长从原点开始往右量, 量得线段 OP 之长为 x , 则以 x 表示 P 点, 叫做 P 点的“坐标”. 以此单位长从原点开始往左量, 量得线段 OQ 之

长为 x' , 则以 $-x'$ 表示 Q 点, 叫做 Q 点的坐标. 这样, l 上每一点都对应一个数, 即该点的坐标, l 叫做“数轴”. 有了数轴就可以建立平面和空间坐标系, 因而就可以建立解析几何学. 但要记住, 这只有在构造了实数以后才能办到.

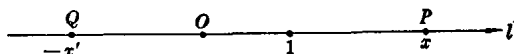


图 1

至此, 问题还没有完. 数轴上每一点都对应一个实数为其坐标. 那么, 每一实数是否都是数轴上某点的坐标呢? 也就是说, 全体实数是否正好铺满整个数轴? 要回答这个问题, 我们须得承认直线的“连续性”. 什么叫做直线的连续性呢? 这就是下述的命题.

直线的连续性: 设在直线上有一列带端点的线段 $A_1, A_2, A_3, \dots$, 且线段 A_2 套在 A_1 之中, A_3 套在 A_2 之中, 如此继续下去, 并且它们一个比一个无限制地缩短(图2), 则存在唯一的一点 P 位于这列线段中的每一个线段上.

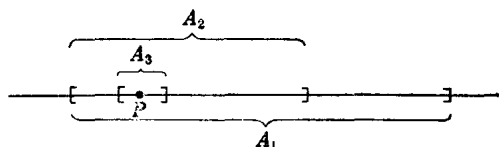


图 2

承认了直线的上述连续性以后, 便可知每一个实数都在数轴上有一个位置. 事实上, 当 α 为一有理数时显然是正确的. 但还要证明当 α 为一无理数时, 数轴上也必有一点 P 以 α 为其坐标. 不妨假定 $\alpha > 0$. 设

$$\alpha = a . a_1 a_2 \dots$$

是一无理数, 即是一无尽不循环小数, 其中 a 是整数, $a_1, a_2, \dots$ 各为 $0, 1, \dots, 9$ 中的一个数. 并设

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \cdot a_1, & \beta_1 &= a \cdot a_1 + \frac{1}{10}, \\ \alpha_2 &= a \cdot a_1 a_2, & \beta_2 &= a \cdot a_1 a_2 + \frac{1}{10^2}, \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

则 $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \dots$ 都是有理数, 即是数轴上的点. 设 A_1 是以 α_1, β_1 为端点的线段, A_2 是以 α_2, β_2 为端点的线段, $\dots$, 则 A_2 套在 A_1 之中, A_3 套在 A_2 之中, $\dots$, 并且它们一个比一个无限地缩短. 根据直线的连续性, 存在唯一的一点 P 位于一切 $A_1, A_2, \dots$ 上. 易见, P 点的坐标就是 α .

通过上述方法我们构造了实数, 并且指出实数正好铺满整个数轴. 我们的目的是要说明两点:

1. 由实数可以建立数轴, 从而就可以建立平面和空间坐标系, 就可以用代数和分析方法研究几何问题(例如解析几何).

2. 既然直线有连续性, 则实数也应有相应的连续性. 我们尤其要说明的, 是这第二点. 以后我们在第四章中将从无尽小数本身, 即不依赖于几何直线来发现这种连续性. 我们将逐渐看到, 实数连续性对于微积分乃至整个分析学有着无比的重要性, 是分析学的基础.

最后我们还要补充说明, 上面构造实数的工作是非常初步的和直观的, 目的只是为了建立数轴, 从而说明实数必然要有某种连续性, 但并未真正完成构造实数的工作. 为什么呢? 因为我们根本未曾谈及无尽小数如何做四则运算的问题, 也未曾谈及运算时大小次序的规律. 如要真正完成这件工作, 就要讲究数的表示方法. 无尽小数是实数的一种表示方法, 这种表示方法在实用中是非常方便的. 例如在计算时都采用十进制小数; 根据所需要的精确度, 计算到有限位小数. 但对于构造实数来说, 无尽小数就不是一个好的表示方法. 十九世纪数学家致力解决的就是这个表示方法

问题.

以上我们概述了实数大意. 在第四章中我们除了进一步严格讨论实数的连续性以外, 还将简单地介绍实数的公理化方法, 那时大家对实数就可以有一个比较完整的认识了.

习 题

1. 回答下列问题:

- (1) 数是用来反映什么的?
- (2) 自然数, 整数, 有理数和无理数各是哪些数? 何谓实数?
- (3) 有理数为什么不够我们应用?
- (4) 实数和直线之间有什么关系?
- (5) 什么叫做直线的连续性?
- (6) 相应于直线的连续性, 你认为实数应有什么样的连续性?

2. 化下列循环小数为分数:

- (1) $0.24999\cdots$, (2) $0.\dot{3}75$, (3) $4.51\dot{8}$, (4) $2.1\dot{3}\dot{6}$.

3. 回答下列问题:

- (1) $0.1010010001\cdots$ 是有理数还是无理数?
- (2) 两个无理数之和是否还是无理数?

4. 证明下列命题:

- (1) 一个有理数与一个无理数之和一定是无理数.
- (2) 两个不相等的有理数之间有有理数.
- (3) 两个不相等的实数之间有有理数, 也有无理数.

5. 证明下列命题:

- (1) $\sqrt{3}$ 是无理数.
- (2) 若 p 是素数, 则 $\sqrt{p}$ 是无理数.

§ 1.2 函数

我们在中学已经有了“集合”和“函数”的概念. 集合是一切数学的基础, 函数是微积分学的运算和研究对象, 它们是至为重要的两个概念. 为了与读者统一语言起见, 我们再明确一下这两个概