

张双德 王静海 郑乃法 魏平 编著

# 经济数学简明教程

天津科学技术出版社



# 经济数学简明教程

张双德 王静海 郑乃法 魏 平 编著

天津科学技术出版社

津新登字(90)003号

责任编辑:苏 飞

**经济数学简明教程**

张双德 王静海 郑乃法 魏 平 编著

\*

天津科学技术出版社出版、发行

天津市和平区张自忠路189号 邮编 300020

山东费县第二印刷厂印刷

\*

开本 787×1092毫米 1/16 印张 36.5 896 000 千字

1996年5月第1版

1996年5月第1次印刷

印数:1-3 000

ISBN 7-5308-2157-1  
F·149 定价:33.00元

具有了其具体性，从而更深刻地反映了  
，社会工农业大发展。

工概联

## 前 言

在我国改革开放不断深化，经济建设取得了巨大发展的今天，社会各业对经济人才的需求与日俱增。各高校应社会之需，近几年来纷纷设置和开办了许多经济类专业，无疑，这对经济建设是一种促进。

开设新专业，除了有必须的教学设备、高水平的师资力量外，还需要有一套好的教材。众所周知，教材是教学的根本。但是，几年来的教学实践，使我们深深感到，教材建设远远落后于专业的设置。一般高校开办的经济类专业有别于专门的经济类院校，所以应当有一套能体现自己特点的与之配套的教材。正是基于这种原因，使我们萌发了编写本教材的念头，一经提出，即刻得到了全国许多院校教师的赞同和积极响应。

在教材内容的选择、组织和编写体系上，我们注意了以下几个方面：

一是选择的内容要能够满足经济类各专业所必需的最基本的数学知识，遵循“少而精、广而浅”的原则。按照内容的相关性将教材分为独立的四篇。考虑到不同专业对于数学内容的要求和授课的时数不尽相同，所以在许多章节和定理证明前加了星号“\*”，以使教师在教学时，根据具体情况作灵活取舍。

二是体现教材的简明、实用性。许多内容作了删繁就简，避免了冗长繁杂的纯形式推导，采取直观的解释、例题说明和证明并行。对于一些重要的性质和定理，当证明过程不繁杂和过难时，一般给出证明。因为好些证明过程本身就是一种重要的数学方法。实践告诉我们，数学中的证明不可缺少，而且对于培养学生慎密思考的良好品质具有积极作用。在整个教材中，我们不去追求过份的严谨性，注重反映数学的思想方法。

三是注重理论联系实际。多从读者身边熟悉的一些经济问题中引入概念，对于一些重要的概念尽可能地给出经济学方面的应用和解释。

四是增强教材的趣味性与思想性。结合教材的相关内容讲述一些数学史料专题，通过这些史料，既可使学生了解到数学发展的一些脉络，又可提高学生的学习兴趣。一些数学大家的异常勤奋和高尚品质可给人以启迪，对于培养学生的人生观和敬业精神将会起到一定的作用。

全书分为4篇26章。第一篇微积分，第1至9章，包括了函数、极限、微分、积分、级数和常微分方程等最基础的知识；第二篇线性代数与线性规划，第10至17章，包括了行列式、向量、矩阵、线性方程组、投入产出数学模型、线性规划问题、单纯形方法和对偶线性规划等内容。线性代数与线性规划本属于数学中的两个不同领域，之所以把它们归在一篇中，是基于两方面的考虑：一是两部分都是经济类各专业需要学习的基本内容，二是二者之间又有着密切的联系，线性规划完全依赖于线性代数的方法。因此把它们放在一起更便于学习；第三篇随机数学与模糊数学，第18至23章，主要讲概率统计的基本内容和方法，包括随机事件的概率、随机变量的分布、随机变量的数字特征、统计估计、假设检验等。由于模糊数学用来解决经济问题和在进行经济分析与经济预测方面的有效性，所以专辟一章介绍模糊数学的基础知识；第四篇对策论与金融数学，第24至26章，包括对策论初步、货物存贮数学模型、金融数学与投资决策三章内容。这一篇可作为选学内容。

全书由张双德副教授整体设计、组织,编委分工执笔,初稿完成后,由主编对其进行了认真的修正、统编,在此期间听取了多方面的意见和建议,最后定稿。因此,该教材是大家分工合作、共同努力的成果。

参加本书编写的院校有武警医学院、西安交通大学、东南大学、北京信息工程学院、郑州工学院、洛阳工学院、驻马店师专、德州师专、天津师专、张家口农专、淮南教育学院、佛山农牧高专、江西吉安地区职工大学、无锡市电视大学、宁夏农行职工中专、辽宁银行学校等。

在编写过程中,得到了武警医学院院、部领导的大力支持和关注。天津科学技术出版社的苏飞编辑对书稿作了认真细致的审校工作,孙娜小姐为本书的排版付出了艰辛的劳动,在此一并向这些对本书的出版给予支持、关心、指导和帮助的同志表示衷心的感谢,同时也向编写中引用和参考过的许多著述的作者表示诚挚的谢意。

由于编者水平所限,时间仓促,难免睽异编写教材的初衷。不合理、不恰当、甚至谬误之处定会存在,恳请使用本教材的师生及所有读者不吝指正。

作者

1996年3月

## 本书编委会

|     |           |     |     |     |
|-----|-----------|-----|-----|-----|
| 主 编 | 张双德       | 王静海 | 郑乃法 | 魏 平 |
| 副主编 | 吴昌恣       | 陈东升 | 王开新 | 姜曰华 |
| 编 委 | (以姓氏笔划为序) |     |     |     |
|     | 王文平       | 刘三明 | 刘晓莉 | 肖冠云 |
|     | 肖永红       | 肖文甲 | 李明远 | 李必胜 |
|     | 陆妍菊       | 张文彦 | 贾军国 |     |

# 目 录

## 第一篇 微 积 分

|                               |       |
|-------------------------------|-------|
| 微积分发展史略 .....                 | (2)   |
| <b>第一章 函数</b> .....           | (5)   |
| § 1.1 集合的基本知识 .....           | (5)   |
| § 1.2 函数概念 .....              | (11)  |
| § 1.3 函数的几种特性 .....           | (16)  |
| § 1.4 反函数与复合函数 .....          | (19)  |
| § 1.5 初等函数 .....              | (21)  |
| § 1.6 经济事务的数学模型 .....         | (24)  |
| 复习题一 .....                    | (32)  |
| <b>第二章 极限与函数</b> .....        | (33)  |
| § 2.1 数列极限 .....              | (33)  |
| § 2.2 函数极限 .....              | (39)  |
| § 2.3 无穷小量与无穷大量 .....         | (46)  |
| § 2.4 连续函数 .....              | (50)  |
| 复习题二 .....                    | (56)  |
| 数学史料(1):数学大师——欧拉 .....        | (57)  |
| <b>第三章 导数与微分</b> .....        | (60)  |
| § 3.1 导数概念 .....              | (60)  |
| § 3.2 导数的基本公式及运算法则 .....      | (64)  |
| § 3.3 复合函数、反函数和隐函数的求导法则 ..... | (67)  |
| § 3.4 高阶导数 .....              | (72)  |
| § 3.5 微分 .....                | (73)  |
| 复习题三 .....                    | (76)  |
| 数学史料(2):科学巨擘——牛顿 .....        | (77)  |
| <b>第四章 导数的应用</b> .....        | (80)  |
| § 4.1 中值定理 .....              | (80)  |
| § 4.2 罗比达法则 .....             | (83)  |
| § 4.3 函数的单调性与极值 .....         | (86)  |
| * § 4.4 函数作图 .....            | (91)  |
| § 4.5 导数在经济中的应用 .....         | (95)  |
| 复习题四 .....                    | (100) |
| <b>第五章 不定积分</b> .....         | (102) |

|                          |       |
|--------------------------|-------|
| § 5.1 原函数与不定积分的概念 .....  | (102) |
| § 5.2 基本积分公式 .....       | (105) |
| § 5.3 换元积分法与分部积分法 .....  | (106) |
| § 5.4 有理函数的积分 .....      | (115) |
| 复习题五 .....               | (119) |
| 数学史料(3): 博学多才的莱布尼兹 ..... | (120) |
| <b>第六章 定积分</b> .....     | (122) |
| § 6.1 定积分的定义和性质 .....    | (122) |
| § 6.2 积分与微分的关系 .....     | (126) |
| § 6.3 定积分的计算 .....       | (129) |
| * § 6.4 定积分的近似计算 .....   | (132) |
| § 6.5 定积分的应用 .....       | (135) |
| § 6.6 广义积分 .....         | (142) |
| 复习题六 .....               | (144) |
| <b>第七章 无穷级数</b> .....    | (146) |
| § 7.1 数项级数及其性质 .....     | (146) |
| § 7.2 数项级数收敛判别法 .....    | (149) |
| § 7.3 幂级数与泰勒级数 .....     | (155) |
| 复习题七 .....               | (165) |
| <b>第八章 多元函数微积分</b> ..... | (167) |
| § 8.1 二元函数的基本概念 .....    | (167) |
| § 8.2 二元函数的极限与连续 .....   | (173) |
| § 8.3 多元函数微分法 .....      | (175) |
| § 8.4 二元函数的极值 .....      | (184) |
| § 8.5 二重积分 .....         | (195) |
| 复习题八 .....               | (201) |
| <b>第九章 微分方程初步</b> .....  | (203) |
| § 9.1 微分方程的基本概念 .....    | (203) |
| § 9.2 一阶线性微分方程及其解法 ..... | (205) |
| 复习题九 .....               | (215) |

## 第二篇 线性代数与线性规划

|                          |       |
|--------------------------|-------|
| <b>第十章 行列式</b> .....     | (219) |
| § 10.1 行列式的定义 .....      | (219) |
| § 10.2 行列式的性质 .....      | (224) |
| § 10.3 行列式的展开 .....      | (232) |
| § 10.4 克莱姆法则 .....       | (237) |
| 复习题十 .....               | (243) |
| 数学史料(4): 刘徽与《九章算术》 ..... | (245) |

|                            |       |
|----------------------------|-------|
| <b>第十一章 向量</b> .....       | (248) |
| § 11.1 向量及其运算.....         | (248) |
| § 11.2 向量组的线性相关性.....      | (250) |
| § 11.3 向量组的秩、内积及正交性 .....  | (254) |
| 复习题十一.....                 | (257) |
| <b>第十二章 矩阵</b> .....       | (259) |
| § 12.1 矩阵的概念.....          | (259) |
| § 12.2 矩阵的运算.....          | (261) |
| § 12.3 几种特殊矩阵.....         | (267) |
| § 12.4 逆矩阵.....            | (271) |
| § 12.5 矩阵的初等变换.....        | (274) |
| 复习题十二.....                 | (280) |
| <b>第十三章 线性方程组</b> .....    | (282) |
| § 13.1 线性方程组有解的判定.....     | (282) |
| § 13.2 线性方程组的消元解法.....     | (286) |
| § 13.3 线性方程组的解的结构.....     | (291) |
| § 13.4 矩阵的特征值与特征向量.....    | (297) |
| 复习题十三.....                 | (302) |
| 数学史料(5):数学王子——高斯.....      | (303) |
| <b>第十四章 投入产出数学模型</b> ..... | (305) |
| § 14.1 价值型投入产出模型.....      | (305) |
| § 14.2 直接消耗系数.....         | (309) |
| § 14.3 平衡方程组的解.....        | (312) |
| § 14.4 完全消耗系数和完全需要系数.....  | (315) |
| § 14.5 投入产出应用举例.....       | (318) |
| 复习题十四.....                 | (322) |
| <b>第十五章 线性规划问题</b> .....   | (325) |
| § 15.1 线性规划的数学模型.....      | (325) |
| § 15.2 线性规划问题的图解法.....     | (329) |
| § 15.3 线性规划问题的标准形式.....    | (332) |
| § 15.4 线性规划问题的解及其性质.....   | (334) |
| 复习题十五.....                 | (337) |
| <b>第十六章 单纯形方法</b> .....    | (339) |
| § 16.1 单纯形方法的基本思想.....     | (339) |
| § 16.2 单纯形方法.....          | (342) |
| § 16.3 单纯形方法的进一步讨论.....    | (350) |
| 复习题十六.....                 | (358) |
| <b>第十七章 对偶线性规划问题</b> ..... | (361) |
| § 17.1 对偶线性规划问题.....       | (361) |

|                           |       |
|---------------------------|-------|
| § 17.2 对偶规划的性质及其经济意义····· | (368) |
| § 17.3 对偶单纯形方法·····       | (370) |
| 复习题十七·····                | (375) |

### 第三篇 随机数学与模糊数学

|                             |       |
|-----------------------------|-------|
| 概率统计发展史略·····               | (378) |
| <b>第十八章 随机事件及其概率</b> ·····  | (381) |
| § 18.1 样本空间与随机事件·····       | (381) |
| § 18.2 事件的概率·····           | (384) |
| § 18.3 几何概率·····            | (387) |
| § 18.4 概率的性质·····           | (388) |
| § 18.5 条件概率·····            | (390) |
| § 18.6 事件的独立性·····          | (394) |
| 复习题十八·····                  | (396) |
| <b>第十九章 随机变量及其分布</b> ·····  | (398) |
| § 19.1 随机变量与分布函数·····       | (398) |
| § 19.2 离散型随机变量·····         | (401) |
| § 19.3 连续型随机变量·····         | (405) |
| § 19.4 随机变量函数的分布·····       | (410) |
| * § 19.5 二维随机变量及其分布·····    | (414) |
| * § 19.6 随机变量的独立性·····      | (418) |
| 复习题十九·····                  | (420) |
| <b>第二十章 随机变量的数字特征</b> ····· | (422) |
| § 20.1 数学期望·····            | (422) |
| § 20.2 方差·····              | (426) |
| § 20.3 协方差与相关系数·····        | (429) |
| § 20.4 中心极限定理·····          | (432) |
| 复习题二十·····                  | (436) |
| <b>第二十一章 统计估计</b> ·····     | (438) |
| § 21.1 基本概念·····            | (438) |
| § 21.2 统计描述·····            | (440) |
| § 21.3 参数的点估计·····          | (445) |
| § 21.4 参数的区间估计·····         | (450) |
| 复习题二十一·····                 | (451) |
| <b>第二十二章 假设检验</b> ·····     | (454) |
| § 22.1 一个正态总体的假设检验·····     | (454) |
| § 22.2 两个正态总体的假设检验·····     | (460) |
| § 22.3 置信区间·····            | (465) |
| § 22.4 假设检验中的两类错误·····      | (469) |

|                        |       |
|------------------------|-------|
| 复习题二十二                 | (471) |
| <b>第二十三章 模糊数学与市场预测</b> | (474) |
| § 23.1 模糊集的概念          | (474) |
| § 23.2 模糊集论的基本定理       | (478) |
| § 23.3 模糊关系与模糊聚类分析     | (480) |
| § 23.4 模糊识别            | (488) |
| § 23.5 模糊判决            | (492) |
| § 23.6 模糊预测与模糊综合评价     | (495) |
| 复习题二十三                 | (500) |

## 第四篇 对策论与金融数学

|                              |       |
|------------------------------|-------|
| <b>第二十四章 对策论初步</b>           | (504) |
| § 24.1 对策论的基本概念              | (504) |
| § 24.2 对策的展开形与标准形            | (506) |
| § 24.3 二人零和对策的最优纯策略          | (510) |
| § 24.4 混合策略对策                | (513) |
| § 24.5 策略的优越性与缩减             | (516) |
| § 24.6 $2 \times n$ 矩阵对策的图解法 | (518) |
| § 24.7 二人非零和对策               | (521) |
| § 24.8 $n$ 人零和对策             | (524) |
| 复习题二十四                       | (527) |
| <b>第二十五章 货物存储数学模型</b>        | (529) |
| § 25.1 经济批量模型                | (529) |
| § 25.2 允许缺货的存贮模型             | (535) |
| § 25.3 单位价格有变动的存贮模型          | (540) |
| 复习题二十五                       | (543) |
| <b>第二十六章 金融数学与投资决策</b>       | (544) |
| § 26.1 单利与复利                 | (544) |
| § 26.2 年金及其种类                | (549) |
| § 26.3 投资决策                  | (554) |
| 复习题二十六                       | (559) |
| 附表 1 标准正态分布表                 | (561) |
| 附表 2 普阿松分布表                  | (562) |
| 附表 3 $t$ 分布表                 | (564) |
| 附表 4 $\chi^2$ 分布表            | (565) |
| 附表 5 $F$ 分布表                 | (567) |

# 部史系史分目

# 第一篇

# 微 积 分

## 微积分发展史略

微积分,或者数学分析是高等数学最基本最重要的组成部分,是大学理工科(也即将成为高校文科)必修的一门基础课程.它是近代自然科学与工程技术中一种无可取代的有力的数学工具,是人们认识客观世界、探索宇宙奥妙乃至人类自身的典型的数学模型之一.

微积分的产生在数学史上是一个具有重大意义的创造,是人类思维的伟大成果之一.它产生以后,又经过了一个长期的发展过程.回眸微积分的发展史,真乃曲折跌宕,撼人心灵,显现出人们探求真知的艰辛与数学大师创建新理论的智慧光芒.

文艺复兴的火炬驱散了中世纪的漫漫黑暗,15世纪后的欧洲,资本主义逐渐发展起来,采矿冶金、机器发明、商业交往、枪炮制造、远洋航海、天象观测等大量的生产与技术问题,向力学、天文学等自然科学提出了新的研究课题,这些学科又紧紧地联系着数学,因此也极大地推动了数学的发展.航海事业需要确定船只在大海中的位置,这就要求精确地测定地球的经纬度和制造准确的时钟,于是推动了对天体运动的深入研究;船舶的改进,必须探讨流体及物体在流体中的运动规律;在战争中,要求炮弹打的准确,导致对抛射体运动的研究.此外,机械、建筑、水利等方面也提出了种种课题.在这些课题研究中通过大量的观察和系统的实验,人们逐步总结出一些基本的力学概念和规律.例如,开普勒(1571~1630年)根据长期天文观测的资料,总结出行星运动的三大定律;伽里略(1564~1642年)系统地研究了落体速度变化的规律,并发现了惯性规律;他还把精密的物理实验与数学分析方法结合起来,第一次成功地用数学公式定量地描述了物理学的规律.在以落体和行星为典型的机械运动的研究中,提出了许多问题,其中两个是最基本的:一个是已知路程求速度,另一个是已知速度求路程.在等速运动的情况下,这两个问题用初等数学就可以解决.但在变速运动,即速度随时间变化的情况下,只用初等数学的方法就无法解决了.因为速度成了变量,初等的常量数学无法描述时间、位置、速度之间的复杂关系,这就要求数学提供能够用以描述和研究物体运动及变化过程的新工具——变量数学.微积分作为变量数学的主要部分,正是适应当时这些实际的需要,逐渐产生出来的.

微积分概念虽然产生于17世纪,但它的思想萌芽可以追溯到古希腊和我国魏晋时期.古希腊的科学家阿基米得(公元前287~212年)在解决许多实际问题的同时,研究了圆的周长和面积的计算问题.他利用圆的内接正多边形和外切正多边形来推算,边数越多,圆和多边形就越接近.从圆心到多边形角点的半径把多边形分成一个个三角形,也同时把圆分成一个个扇形.多边形的边数越多,一个个三角形就越接近于扇形,三角形的底边便近似扇形的圆弧,三角形的面积便近似扇形的面积,各个三角形底边之和便近似圆周长;各个三角形面积之和就近似圆的面积,随着边数的增多,就越来越精确.我国魏晋时期的数学家刘徽<sup>①</sup>为计算圆面积而创造的“割圆术”,也是把圆近似地分割成边数很多,边长很短的正多边形来计算圆的面积.“割之

<sup>①</sup> 见数学史料:刘徽与《九章算术》.

弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣”。这里,无论是阿基米德,还是刘徽,他们在计算圆面积和圆周长的工作中,所采用的“无限分割”(即不断增加圆内多边形的边数)、“以直代曲”(即用三角形的底边代替圆弧)和“无限求和”(即求所有小三角形的面积之和与所有三角形底边的边长之和)的思想恰是微积分思想的萌芽。

到了16世纪以后,面积计算的问题又从力学获得了新的动力和启发,产生了新的成果,求出了象由正弦函数及由单项式表示的曲线所围成的面积等许多公式.而且由原子论的启示,普遍地把一块面积近似地看成很多个细窄的矩形面积的总和,这就是微积分中积分概念的雏形.在此期间,笛卡尔(1596~1650年)于1637年在他的《几何学》中研究透镜的聚光性能时,讨论了求曲线的切线问题,同年费尔马(1601~1665年)在其手稿《求最大值和最小值的方法》中,借助于运动的观点,提出了较好的确定切线的方法.1669年剑桥大学的数学教授巴罗(1630~1677年,牛顿的老师)在其《几何讲义》中也给出了求曲线的切线的方法.这些都是微积分中微分计算的先导.应该指出,笛卡尔和费尔马关于解析几何的创立,是数学的一个转折点,是变量概念的引进,把描述运动的函数关系和几何中曲线问题的研究统一起来了.从此,力学中关于求速度与求路程的两个问题,就分别化为求切线与求面积的问题.于是解决前述生产实践中提出来的问题,就可以应用数学上长期累积的关于切线和面积的成果,使微积分的产生不但必需,而且也有了可能.

这样,由于生产实际的需要,力学和天文学的推动,在众多数学家长期努力下,17世纪后半叶,终于由伟大的英国数学家、物理学家牛顿和德国哲学家、数学家莱布尼兹,在不同的国家,几乎同时在总结先贤研究成果的基础上,各自独立地创建了划时代的微积分.

牛顿和莱布尼兹都是结合着力学或光学问题的研究,并且都是用几何学的方法达到微积分的.牛顿侧重于力学的研究,为寻求变速运动的瞬时速度,而建立了微积分的计算方法,他用这个方法从行星运动规律推论出万有引力,并根据万有引力解决了许多力学和天文学的问题.莱布尼兹关于微积分的工作,则来自于对几何的研究,突出了切线的概念,并且特别重视运算的符号和规则,至今尚袭用的微分和积分的符号,就是莱布尼兹首先使用的.牛顿和莱布尼兹依据过去关于切线和面积的研究,得到一般微分和积分的概念,使微分和积分成为两个新的数学运算.他们还揭示了这两个运算的内在的联系,就如同加法与减法一样,是互逆的,由此得到了一系列简单易行的运算法则.从此以后,微积分就成为行之有效的一套数学方法.过去需要用特殊技巧分别处理的一些困难问题,这时就获得了一般性的解决办法.

微积分刚一形成,就在解决实际问题中显示出成效.例如,在天文学中,能够精确地计算行星、慧星的运行轨道和它们的位置.哈雷(1656~1742年)就通过这种计算,断定在1531年、1607年和1682年出现过的慧星是同一颗慧星,并推断它将于1759年再次出现,这个预见后来果然被证实.又如,用微积分可以计算摆锤在受力情况下的运动和周期,这给当时设计精确的时钟提供了依据.牛顿曾根据摆锤周期与重力的关系,考察了地球各地摆锤运动的实验资料,在理论上作出了地球是扁圆的科学理论.这一切说明,微积分反映了自然界的客观规律.但是,当时产生的微积分还存在着严重的缺点,它的概念还是模糊不清的,并且缺乏严格的理论基础,从而也招致了英国大主教贝克莱(1685~1753年)等人的猛烈攻击,并由此引发了第二次数学危机.

初创时期的微积分,主要应用于力学、天文学和几何学,其中出现的数量关系还比较简单,而且理论计算的结果又往往可以从实践得到直接的验证.因此,在那个时候,微积分理论基础

的缺陷,还没有形成严重的障碍。但是,到了18世纪末,随着微积分应用的更加广泛与深入,遇到的数量关系也日益复杂,有些问题已超出了简单直观的范围。在这种情况下,明确的概念,合乎逻辑的推理就更加显得重要了。同时,在一些复杂的问题中,需要推广函数的概念,这些都对微积分理论基础的建立,提出了迫切的要求。

例如,牛顿和莱布尼兹在微积分概念中都使用了无穷小量,但这个无穷小量是零?还是非零?他们两人都是含混不清的,如果是零,则 $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ 无意义;如果非零,但在微分计算中牛顿和莱布尼兹都直接舍去了含无穷小量的项,而所得到的结果又都是正确的,这是为什么?再例如,在微积分里,有一个典型的基本算法,就是把无穷多项加起来,叫做无穷级数。在当时,无穷级数的应用已经非常广泛。无穷多项相加与有限项相加是有区别的,有限项相加,总有确定的“和”。无穷多项相加,是加不完的,因此什么是无穷级数的“和”是不清楚的。但是,在很长一段时间里,人们认识不到这种区别,习惯地把有限项相加的运算规则照搬到无穷级数中去,虽然解决了许多问题,但有时还得出象 $\frac{1}{2} = 0$ 这样一些荒谬的结论。这使人们认识到,在运用无穷级数进行运算时,必须弄清楚无穷级数的“和”的概念及其运算法则。这就迫使数学家回过头来重新审视和奠基微积分的理论基础。于是,一场微积分或数学分析严密化的工作就从18世纪末开始了。

历经近百年的时间,在众多大数学家艰苦的努力下,终于在19世纪建立起了微积分的理论基础——极限论。这期间为此作出贡献的有拉格朗日(1736~1813年)、高斯(1777~1855年)、柯西(1789~1857年)、波尔查诺(1781~1848年)、维尔斯特拉斯(1815~1897年)等人,其中有卓越贡献的当推柯西和维尔斯特拉斯。例如,在柯西的《分析教程》(1821年)中,给出了极限这个概念的基本上明确的叙述,并以极限概念为基础,得出了无穷小量、无穷级数的“和”等一系列基本概念的严格定义。这样,就逐步建立起了微积分的严格的数学理论,微积分的发展从此进入了一个新的阶段。

在本篇中,前两章讲述微积分的基础知识,三、四章是微分学,五、六章是积分学,第六章是无穷级数,第八章讲多元函数微积分,第九章介绍微分方程的初步知识。容易看出,教材的内容顺序已完全不同于微积分产生发展的过程。正象数学家柯朗(美籍德国人,1888~1972年)所说:“微积分,或者数学分析,是人类思维的伟大成果之一。它处于自然科学与人文科学之间的地位,使它成为高等教育的一种特别的有效工具。遗憾的是,微积分的教学方法有时流于机械,不能体现出这门科学乃是一种憾人心灵的智力奋斗的结晶”。为此,我们在教材中尽可能补充一些数学史料,以增强读者的学习情趣。

# 第一章 函 数

在我们周围,许多现象都可以通过函数关系进行表达和描述.函数是反映现实世界中事物之间相依关系的一个重要数学概念,也是微积分学所研究的最基本对象.因此,在本章中,我们将给出函数的概念和基本性质,并对经济学中一些常见的函数作简单介绍.在此之前,我们先介绍集合的一些基本知识.

## § 1.1 集合的基本知识

### 一、集合的概念

集合是数学中不精确定义的一个基本概念,一般只对它作描述性说明.例如,我们说:①某校的全体学生构成一个集合;②全体自然数构成一个集合;③全国的汽车市场构成一个集合;④一批产品构成一个集合,等等.

一般地,所谓集合,是指在一定范围内,具有某种确切含义的若干事物的全体.组成集合的事物称为集合的**元素**.例如,上面所举的四例都是集合的例子.但是,象“优秀作品”,“大个子”等就不能构成集合,因为“优秀作品”和“大个子”都没有确切的含义.

通常用大写的拉丁字母  $A, B, C, \dots$  等表示集合,用小写的拉丁字母  $a, b, c, \dots$  等表示集合的元素.若  $a$  是集合  $A$  的元素,就称  $a$  属于集合  $A$ ,记为  $a \in A$ ;若  $a$  不是集合  $A$  的元素,就称  $a$  不属于集合  $A$ ,记为  $a \notin A$ .

由有限个元素构成的集合称为**有限集**;由无限多个元素构成的集合称为**无限集**.如上面的例子中,①、③、④都是有限集,而②是无限集.

特别,我们把不含任何元素的集合称为**空集**,用  $\varnothing$  表示.通常我们所讨论的问题都是在一定的范围内进行的,这个范围称为**论域**.论域中全体事物构成的集合称为**全集**,用  $U$  表示.

集合的表示方法通常有两种:

第一种是列举法.即把一个集合的所有元素逐一列举出来,放在一个花括号内.例如

$$A = \{a, b, c, \dots, z\}, \quad B = \{0, 1, 2, \dots, 9\}, \quad C = \{\text{深圳, 珠海, 汕头, 厦门, 海南, 浦东}\}$$

就分别表示由全体英文字母构成的集合;从 0 到 9 十个数字构成的集合和由中国的经济特区构成的集合.但对于无限集,列举法就行不通了.

第二种表示方法是描述法(也称特征法).即把集合的一切元素所具有的共同特征描述出来,用记号  $\{x|x \text{ 具有 } \times \times \text{ 特征}\}$  表示.例如

$$D = \{x|x \text{ 为中央电大的学生}\}, \quad E = \{x|x \text{ 为天津华联商场的职员}\},$$

$$F = \{x|x^2 - 3x + 2 = 0\}, \quad N = \{x|x \text{ 为自然数}\}$$

即  $D$  表示中央电大的学生的集合; $E$  是天津华联商场中职员集合; $F$  是二次方程  $x^2 - 3x + 2 = 0$  的根的集合; $N$  是自然数的集合.

注意：一个集合中的元素彼此是不同的，即在同一个集合中不能重复出现同一元素。例如， $\{2, 3, 3\}$  只能表示为  $\{2, 3\}$ 。此外，由于集合是把具有相同性质的若干事物看作一个整体来研究的，因此，一集合与其各元素出现的顺序无关，如  $\{2, 3, 4\}$ ， $\{2, 4, 3\}$  和  $\{4, 3, 2\}$  等都表示同一个集合。

在集合中子集的概念是重要的。

定义 1.1 如果集合  $A$  的每个元素都是集合  $B$  的元素，则称  $A$  是  $B$  的子集，或称  $B$  包含  $A$ ，记作  $A \subseteq B$ 。若  $A$  是  $B$  的子集，但  $B$  中至少有一个元素不是  $A$  的元素，则称  $A$  是  $B$  的真子集，记作  $A \subset B$ 。

注意： $\in$  是元素对集合的关系，而  $\subset$  是集合对集合的关系，两者不能混淆。

例 1 自然数集合  $N$  是整数集合  $Z$  的真子集，即  $N \subset Z$ 。

又若  $A = \{2, 3, 5\}$ ， $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，则  $A$  是  $B$  的真子集，即  $A \subset B$ 。

由定义可见，每个集合都可看作是其自身的子集，而真子集异于自己的子集。而空集  $\emptyset$  可被看作是所有集合的子集。

定义 1.2 如果两个集合  $A$  与  $B$  满足  $A \subseteq B$ ，且  $B \subseteq A$ ，则称  $A$  等于  $B$ ，记作  $A = B$ 。

可见两个集合相等当且仅当这两个集合有完全相同的元素。

例 2 设  $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ， $B$  是方程  $x^2 - 3x + 2 = 0$  的根所成之集，因为这方程的根是 1 和 2，所以有  $A = B$ 。

## 二、集合的运算与性质

从任意两个集合出发，可以定义  $A$  与  $B$  的一些运算。

定义 1.3 设有集合  $A$  与  $B$ ，由  $A$  和  $B$  的所有元素构成的集合，称为  $A$  与  $B$  的并集，记作  $A \cup B$ ，即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

注意： $A$  与  $B$  中相同的元素在并集中只出现一次。

例 3 若  $A = \{0, 1, 3, 5\}$ ， $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，则  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。

定义 1.4 设有集合  $A$  与  $B$ ，由  $A$  和  $B$  的所有公共元素构成的集合，称为  $A$  与  $B$  的交集，记作  $A \cap B$ ，即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

例 4 对上例中的集合  $A, B$ ，有  $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ ，又若  $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ， $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ，则  $A \cap B = \emptyset$ 。

定义 1.5 设有集合  $A$  与  $B$ ，由属于  $A$  而不属于  $B$  的所有元素构成的集合，称为  $A$  与  $B$  的差集，记作  $A - B$ 。即

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

特别，当  $B \subset A$  时，记  $A - B = \bar{B}$  或  $B^c$ ，称为  $B$  (关于  $A$ ) 的余集。

例 5 若  $A = \{x | x \text{ 为自然数}\}$ ， $B = \{x | x = 2n \text{ 为偶数}\}$ ，则  $A - B = \{x | x = 2n - 1\}$  为奇数了，这里  $A - B = \bar{B}$ 。

又若  $A = \{0, 2, 4\}$ ， $B = \{0, 4, 6, 8\}$ ，则  $A - B = \{2\}$ 。

集合之间的  $\cup$ 、 $\cap$ 、 $-$  这三种运算关系，可以利用直观的图形 (称为文氏图) 来表示 (如图 1-1 所示)：