



高等学校试用教材

信号与线性系统分析

习题集

北方交通大学 王瑞英 主编

中国铁道出版社

高等学校试用教材

信号与线性系统分析习题集

北方交通大学 王瑞英 主编

中国铁道出版社

1984年·北京

内 容 简 介

本书是1982年中国铁道出版社出版的高等学校试用教材《信号与线性系统分析》的配套书，共分六章：连续时间系统的时域分析，连续时间系统的频域分析，连续时间系统的复频域分析，离散时间系统的分析，系统模拟和稳定性分析，系统的状态空间分析。每章都是按照提要、例题和习题的顺序编排的。全书共有例题、习题一千一百多个（不包括原教材中的例题和习题）。为便于读者自学，在书末给出了每个习题的答案。

本书既可作为《信号与线性系统分析》课程的习题课教材，亦可供高等院校有关专业学生自学参考。

高等学校试用教材

信号与线性系统分析习题集

北方交通大学 王瑞英 主编

中国铁道出版社出版

责任编辑 张冲 封面设计 王毓平

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：19 字数：472 千

1984年11月 第1版 第1次印刷

印数：0001—10,000册 定价：3.55元

前 言

本书是1982年中国铁道出版社出版的高等学校试用教材《信号与线性系统分析》的配套书,既可作为习题课教材,亦可供学生自学参考。

本书将原教材中的第一章“信号与系统分析导论”部分的内容分散到有关章节,其余各章与配套书相同,故只有六章。全书中的概念、术语及符号等与原教材基本一致,内容方面略有扩展。在编排顺序上,每章前写有简明的内容提要,紧接着列出较多的例题,以便于读者自学。例题着重解题思路,因而没有列出详细的解题过程。此外,例题除加深对基本概念的理解外,还对一些解题的技巧及应注意的事项做了说明。然后给出了相当数量的习题,并对个别难度较大的习题加了提示,每个习题在书末都附有答案。本书中的例题和习题与原教材中的不重复。

本书第一章和第三章由北方交通大学周中雯执笔;第二章由上海铁道学院李学文执笔;第四章和第五章由北方交通大学王瑞英执笔;第六章由兰州铁道学院张志远执笔。此外,张志远还为其它章节提供了一些习题,李学文描绘了全书插图。全书由王瑞英主编,上海铁道学院周大纲副教授主审。

在编写过程中,北方交通大学、上海铁道学院和兰州铁道学院有关老师给予了大力支持和协助,在此深致谢意。

由于《信号与线性系统分析》是近几年才开设的课程,我们的经验不足,水平有限,所选和所编的例题、习题可能不当,所做答案亦可能有误,请读者批评指正。

编 者

1983.8.

目 录

前 言

第一章	连续时间系统的时域分析	1
	提 要	1
	例 题	8
	习 题	20
第二章	连续时间系统的频域分析	35
	提 要	35
	例 题	41
	习 题	53
第三章	连续时间系统的复频域分析	69
	提 要	69
	例 题	74
	习 题	90
第四章	离散时间系统的分析	104
	提 要	104
	例 题	112
	习 题	133
第五章	系统模拟和稳定性分析	151
	提 要	151
	例 题	158
	习 题	179
第六章	系统的状态空间分析	201
	提 要	201
	例 题	208
	习 题	231
	各章习题答案	251

第一章 连续时间系统的时域分析

提 要

(一) 连续时间信号与系统的基本概念

1. 连续时间信号的定义与分类

在电系统中, 随时间变化的电压或电流称为“电信号”, 简称为“信号”。

按信号随时间变化的性质可划分为确定信号与随机信号。其中, 确定信号按随时间变化的重复性又可划分为周期信号、非周期信号与概周期信号。此外, 按信号所具有的能量可划分为功率信号和能量信号。

2. 连续时间系统的定义与分类

电系统(简称“系统”)是电信号通过的全部线路和设备, 是对特定信号产生预定职能作用的整体。

满足线性特性(即均匀性和叠加性)的系统称为“线性系统”。线性特性可表示为

若 $f_1(t) \xrightarrow{(\text{引起})} y_1(t)$, $f_2(t) \xrightarrow{(\text{引起})} y_2(t)$, 则

$$K[f_1(t) + f_2(t)] \xrightarrow{(\text{引起})} K[y_1(t) + y_2(t)]$$

若一个系统内部的参数是不随时间变化的, 则称为“非时变系统”。系统的非时变特性可表示为

若 $f(t) \xrightarrow{(\text{引起})} y(t)$, 则

$$f(t - t_0) \xrightarrow{(\text{引起})} y(t - t_0)$$

我们所分析的连续时间系统为线性、非时变、集中参数、动态的系统。描述这类系统的数学模型是线性、常系数微分方程。

(二) 连续时间信号的时域分析

1. 基本信号的时域特性

(1) 复指数信号

$$f(t) = K e^{st} \quad -\infty < t < \infty$$

式中 s ——复指数, 其值为

$$s = \sigma + j\omega$$

其中 σ ——复数 s 的实部,

ω ——复数 s 的虚部。

复指数信号概括了直流信号、指数信号、正弦信号和余弦信号, 即

$$f(t) = K e^{s't} \Rightarrow \begin{cases} \text{当 } s = 0 \text{ 时} & f(t) = K \text{ (直流信号)} \\ \text{(即 } \sigma = 0, \omega = 0 \text{ 时)} & \\ \text{当 } s = \text{实数时} & f(t) = K e^{\sigma t} \text{ (指数信号)} \\ \text{(即 } \sigma \neq 0, \omega = 0 \text{ 时)} & \\ \text{当 } s = \text{虚数时} & f(t) = K \cos \omega t + j K \sin \omega t \\ \text{(即 } \sigma = 0, \omega \neq 0 \text{ 时)} & \text{(正弦信号与余弦信号)} \\ \text{当 } s = \text{复数时} & f(t) = K e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \omega \sin t) \\ \text{(即 } \sigma \neq 0, \omega \neq 0 \text{ 时)} & \text{(振幅变化的正、余弦信号)} \end{cases}$$

(2) 单位阶跃信号

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

(3) 单位冲激信号

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

(4) 单位冲激偶信号

$$\delta'(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt} \delta(t), & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

2. 信号的分解

(1) 信号分解为直流分量 f_D 与交流分量 $f_A(t)$

$$f(t) = f_D + f_A(t)$$

(2) 信号分解为偶分量与奇分量

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

$$\text{式中 偶分量 } f_e(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)]$$

$$\text{奇分量 } f_o(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]$$

(3) 信号分解为阶跃序列

$$f(t) = \int_{-\infty}^t f'(\tau) u(t-\tau) d\tau \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f'(k\Delta\tau) u(t-k\Delta\tau) \Delta\tau$$

(4) 信号分解为冲激序列

$$f(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta\tau) \delta(t-k\Delta\tau) \Delta\tau$$

(5) 信号分解为正弦信号的叠加

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

(6) 信号分解为复指数信号叠加

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

此外, 用一系列直线段所表示的信号还可分解为斜坡信号与阶跃信号的叠加。

3. 信号的时域变换

(1) 叠加: 两信号逐点相加构成另一信号 $\phi(t) = f_1(t) + f_2(t)$ 。

(2) 翻转: 信号 $f(t)$ 用 $-t$ 置换 t 构成另一信号 $\phi(t) = f(-t)$ 。对于冲激信号可有 $\delta(t) = \delta(-t)$ 。

(3) 平移: 信号 $f(t)$ 沿 t 轴左移 t_0 构成 $\phi(t) = f(t+t_0)$, $t_0 > 0$; 信号 $f(t)$ 沿 t 轴右移 t_0 构成 $\phi(t) = f(t-t_0)$, $t_0 > 0$; 翻转信号 $f(-t)$ 左移 t_0 为 $\phi(t) = f(-t-t_0)$, $t_0 > 0$; 翻转信号 $f(-t)$ 右移 t_0 为 $\phi(t) = f(-t+t_0)$, $t_0 > 0$ 。

(4) 展缩: 改变信号 $f(t)$ 的时间尺度构成另一信号 $\phi(t) = f(Kt)$ 。对于冲激信号有 $\delta(Kt) = \frac{1}{K} \delta(t)$ 。

(5) 相乘: 两信号逐点相乘构成另一信号 $\phi(t) = f_1(t) f_2(t)$ 。

(6) 微分: 信号的变化率构成另一信号 $\phi(t) = \frac{d}{dt} f(t)$ 。

(7) 积分: 信号随时间的累加构成另一信号 $\phi(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ 。

(三) 连续时间系统的时域分析

系统的时域分析就是在时间域内分析输入与输出的时间特性, 也可以认为在输入激励信号已确定的情况下, 主要分析输出响应的时域特性。时域分析有经典法和卷积积分法。

1. 经典法

直接求解描述系统输入输出关系的微分方程式的方法称为“经典法”。

(1) 一阶系统

数学模型: $\frac{dy}{dt} + ay(t) = f(t), t \geq 0$

特征方程式为 $p + a = 0$, 其根 $p = -a$, 等于一阶系统时间常数 τ 的倒数。

系统的完全响应是系统对于初始状态和输入激励同时作用的响应。一阶系统完全响应的结构形式可写为

$$y(t) = y_x(t) + y_f(t) = y(0) e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

式中 $y_x(t)$ —— 等于 $y(0) e^{-at}$, 为系统的零输入响应, 是系统在输入等于零时, 由初始时储存于系统中的能量所引起的响应;

$y_f(t)$ —— 等于 $\int_0^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau$, 为系统的零状态响应, 是相应于所有初始条件都等于零时, 仅由输入所引起的响应。

求解时, $y_x(t)$ 可直接写出。 $y_f(t)$ 除可进行上述的积分运算外, 还可设 $y_f(t) = y_h(t) + y_p(t)$ 的方法求解。其中通解 $y_h(t)$ 形式与 $y_x(t)$ 相同, 仅系数不同, 要代入零状态条件 $y_f(0) = 0$ 加以确定。特解 $y_p(t)$ 仅决定于输入, 形式与输入信号相同, 通常用待定系数法加以确定。常用零状态响应特解的假定形式如表 1-1 所示。

在系统分析中, 输入信号往往是在 $t = 0$ 时加入系统, 所以零状态响应在 $t < 0$ 时应等于零, 是单边函数, 在书写时解答后面应乘以 $u(t)$; 而零输入响应起始于 $t = 0^-$, 所以相应

表 1-1

输入激励形式 $f(t)$	特解假设形式 $y_p(t)$
K_0	A
$K_0 t$	$A + Bt$
$K_0 + K_1 t + K_2 t^2$	$A + Bt + Ct^2$
$K_0 e^{-bt}$ (b 不是方程的特征根)	$A e^{-bt}$
$K_0 e^{-at}$	$A t e^{-at}$
$K_0 \sin \omega t$	$A \sin \omega t + B \cos \omega t$
$K_0 \cos \omega t$	$A \sin \omega t + B \cos \omega t$

的解答后面不乘以 $u(t)$ 。这样, 在一般情况下, 系统的完全响应可书写为

$$y(t) = y(0^-) e^{-at} + [y_h(t) + y_p(t)] u(t)$$

这种书写形式的优点是将解代入原方程, 不仅能校核 $t > 0$ 时解的正确性, 而且能核实 $t = 0$ 时解的正确性, 还能校核 $t = 0^-$ 时的初始条件。

(2) 二阶系统

数学模型:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y(t) = K f(t), \quad t \geq 0$$

特征方程式: $p^2 + a_1 p + a_2 = 0$, 其根为

$$p_1 = \frac{-a_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2}, \quad p_2 = \frac{-a_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2}$$

完全响应结构形式为 $y(t) = y_x(t) + y_f(t)$ 。零输入响应 $y_x(t)$ 的形式取决于特征方程式的判别式 $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2$ 的值。若 $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2 > 0$, 则 $y_x(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}$, 称为“过阻尼形式”; 若 $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2 = 0$, 则 $y_x(t) = (K_1 + K_2 t) e^{p_1 t}$, 称为“临界阻尼形式”; 若 $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2 < 0$, 因为 $p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm j \sqrt{a_2 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} = \sigma_d \pm j \omega_d$, 则 $y_x(t) = e^{\sigma_d t} (K_1 \cos \omega_d t - K_2 \sin \omega_d t)$, 称为“欠阻尼形式”。 $y_x(t)$ 中的 K_1 、 K_2 由初始条件 $y(0^-)$ 、 $y'(0^-)$ 确定。零状态响应 $y_f(t) = y_h(t) + y_p(t)$, 其求解方法同一阶系统。

(3) 高阶系统

数学模型:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y(t) = b_0 \frac{d^n f}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{df}{dt} + b_m f(t)$$

特征方程式: $p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n = 0$

完全响应结构形式为 $y(t) = y_x(t) + y_f(t)$ 。零输入响应 $y_x(t)$ 的形式取决于特征方程式根的性质。设 n 阶特征方程式为 $D(p) = 0$, 则

当 $D(p) = 0$ 有 n 个不相等的实根 λ_1 、 λ_2 、 $\cdots$ 、 λ_n 时,

$$y_x(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + K_n e^{\lambda_n t}$$

当 $D(p) = 0$ 有 n 阶重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$ 时,

$$y_x(t) = (K_1 + K_2 t + \cdots + K_n t^{n-1}) e^{\lambda t}$$

当 $D(p) = 0$ 有 i 对共轭复根 $\sigma_1 \pm j\omega_1, \dots, \sigma_i \pm j\omega_i$ 时,

$$y_z(t) = e^{\sigma_1 t} (K_1 \cos \omega_1 t - K_1^* \sin \omega_1 t) + \dots + e^{\sigma_i t} (K_i \cos \omega_i t - K_i^* \sin \omega_i t)$$

以上各式中的 $K_1, K_2, \dots, K_i, K_i^*$ 由初始条件 $y(0^-), y'(0^-), \dots, y^{(n)}(0^-)$ 确定。

零状态响应 $y_f(t) = y_h(t) + y_p(t)$, 确定的原则与一、二阶系统相同。

2. 系统的冲激响应与阶跃响应

(1) 系统的冲激响应

系统的冲激响应是系统在零状态条件下, 对单位冲激信号 $\delta(t)$ 的响应, 记作 $h(t)$ 。

由于冲激信号对系统的作用仅存在 $t = 0$ 瞬间。系统受冲激作用会引起能量的储存与分配, 并在 $t = 0^+$ 时以电容电压或电感电流的跃变体现出来。因此, 我们只要求得系统变量受冲激作用后 $t = 0^+$ 时刻的初值 (称为“等效初始条件”), 即可将冲激作用下的零状态响应转化为等效初始条件作用下的零输入响应来求解。这种方法称为“等效初始条件法”。

运用等效初始条件法的关键是求得等效初始条件。在一阶、二阶系统中, 可采用观察法求等效初始条件。即 $t = 0$ 时, 若 $i_C(0)$ 含有 $\delta(t)$, 则等效初始条件为

$$v_C(0^+) = -\frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i_C(0) d\tau;$$

若 $v_L(t)$ 含有 $\delta(t)$, 则等效初始条件 $i_L(0^+) = \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} v_L(0) d\tau$ 。若要进一步求 $v_C'(0^+)$ 或

$i_L'(0^+)$, 或者其它变量的等效初始条件, 须应用 $t = 0^+$ 时的等效电路来计算。在 高 阶 系 统 中, 多采用冲激平衡法求等效初始条件。这种方法是根据方程两边的奇异函数应当平衡的原则, 用待定系数法确定变量及其各阶导数所包含的奇异函数的系数, 再令 $t = 0^+$, 变量及其各阶导数中所包含的 $u(t)$ 就可提供一组 $t = 0^+$ 时的等效初始条件。

(2) 系统的阶跃响应

系统的阶跃响应是系统在零状态条件下对单位阶跃信号 $u(t)$ 的响应, 记作 $g(t)$, 通常按 $y_f(t)$ 的求解方法求解。

此外, 在线性非时变系统中, 当输入由原来的激励函数改变为它的积分 (或导数) 时, 输出也将由原来的响应函数改变为它的积分 (或导数)。

因为 $\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$, $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$, 所以

$$h(t) = \frac{d}{dt} g(t) \quad g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

3. 卷积积分法

(1) 解析法

系统对任意信号 $f(t)$ 的零状态响应可以通过这个信号与系统的冲激响应的卷积积分求得, 即

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau = f(t) * h(t)$$

在输入信号为单边函数和系统是因果系统时, 卷积积分的上、下限仅为 0 到 t 。

解析法的一般步骤为: 首先求出系统的传输算子 $H(p)$ 。若令 $p = \frac{d}{dt}$, $p^{-1} = \frac{1}{p} =$

$\int_{-\infty}^t (\quad) d\tau$, 则可将 n 阶系统的数学模型简写为

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n) y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_m) f(t)$$

则系统的传输算子 $H(p)$ 为

$$H(p) = \frac{y(t)}{f(t)} = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_m}{p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n}$$

然后根据海维赛 (Heaviside) 展开定理将传输算子 $H(p)$ 展开为部分分式之和。这种分解意味着将一个 n 阶系统分解为若干个一阶或二阶系统的叠加。海维赛展开定理要求 $H(p)$ 是算子 p 的有理真分式 (即 $n > m$)。如 $m \geq n$, 则要先做长除, 再行展开。根据 n 阶系统特征方程所具有的根, 可有以下三种情况:

当 $D(p) = 0$ 具有 n 个不等实根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 时,

$$H(p) = \frac{K_1}{p - \lambda_1} + \frac{K_2}{p - \lambda_2} + \cdots + \frac{K_n}{p - \lambda_n}$$

式中

$$K_i = \left[(p - \lambda_i) \frac{N(p)}{D(p)} \right]_{p=\lambda_i}$$

当 $D(p) = 0$ 具有 i 对共轭复根 $\sigma_1 \pm j\omega_1, \cdots, \sigma_i \pm j\omega_i$ 时,

$$H(p) = \frac{K_1}{p - (\sigma_1 + j\omega_1)} + \frac{K_1^*}{p - (\sigma_1 - j\omega_1)} + \cdots \\ + \frac{K_i}{p - (\sigma_i + j\omega_i)} + \frac{K_i^*}{p - (\sigma_i - j\omega_i)}$$

式中, K_i 与 K_i^* 的求法与不等实根情况的求法相同。

当 $D(p) = 0$ 具有 r 阶重根 λ 时,

$$H(p) = \frac{K_r}{(p - \lambda)^r} + \frac{K_{r-1}}{(p - \lambda)^{r-1}} + \cdots + \frac{K_1}{p - \lambda}$$

式中 $K_r = \left[(p - \lambda)^r \frac{N(p)}{D(p)} \right]_{p=\lambda}$

$$K_{r-1} = \left[\frac{d}{dp} (p - \lambda)^r \frac{N(p)}{D(p)} \right]_{p=\lambda}$$

$$K_{r-2} = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dp^2} (p - \lambda)^r \frac{N(p)}{D(p)} \right]_{p=\lambda}$$

.....

$$K_1 = \frac{1}{(r-1)!} \left[\frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}} (p - \lambda)^r \frac{N(p)}{D(p)} \right]_{p=\lambda}$$

将展开后的各分式所对应的冲激响应求出, 然后叠加起来, 即为系统的冲激响应。不同形式的 $H(p)$ 所对应的冲激响应如表 1—2 所示。最后, 做卷积积分运算便求出 $y_f(t) = f(t) * h(t)$ 。

卷积积分运算常用公式如表 1—3 所示。

做卷积积分运算之前, 如果先对其中一个函数进行微分, 而对另一函数进行同样阶数的积分, 其结果相同, 且运算将可能简便。

(2) 图解卷积法

若已知函数波形, 用图解卷积法计算卷积积分比较直观。两个函数卷积积分的图形分析

表 1—2

传输算子 $H(p)$	冲激响应 $h(t)$
K	$K\delta(t)$
$\frac{K}{p}$	$Ku(t)$
$\frac{K}{p-\lambda_1}$	$Ke^{\lambda_1 t}u(t)$
$\frac{C_1+jC_2}{p-(\sigma_d-j\omega_d)} + \frac{C_1-jC_2}{p-(\sigma_d+j\omega_d)}$	$2e^{\sigma_d t}(C_1\cos\omega_d t - C_2\sin\omega_d t)u(t)$
$\frac{K}{(p-\lambda)^{n+1}}$	$\frac{K}{n!}t^n e^{\lambda t}u(t)$

表 1—3

名 称	表 达 式
交 换 律	$f(t) * h(t) = h(t) * f(t)$
分 配 律	$f(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = f(t) * h_1(t) + f(t) * h_2(t)$
结 合 律	$f(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [f(t) * h_1(t)] * h_2(t)$
卷积积分的微分和积分 [$y'(t) = \frac{d}{dt}y(t)$, $y^{-1}(t) = \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau$]	$f(t) * h'(t) = f'(t) * h(t)$ $f(t) * h^{-1}(t) = f^{-1}(t) * h(t)$ $f'(t) * h^{-1}(t) = f^{-1}(t) * h'(t)$
特殊卷积	$f(t) * \delta(t) = f(t)$ $f(t) * \delta(t-t_1) = f(t-t_1)$ $f(t-t_1) * \delta(t-t_2) = f(t-t_1-t_2)$ $f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ $f(t) * \delta'(t) = \frac{d}{dt}f(t)$

是通过翻转、平移、相乘、积分四个步骤之后，得到一个仅与平移时间 t 有关的函数波形。做卷积积分时，应注意分清 t 与 τ 的含意。 τ 是积分变量，积分上、下限应取两函数波形乘积不为零的区段为上、下限； t 是积分中的参变量，积分中的平移是对 t 而言的。当 t 改变时，将引起两图形乘积不为零的区段的改变，从而引起上、下限的改变，所以在积分中，又要按 t 平移在 τ 轴的不同区段来确定积分的上、下限。

(3) 数值算法

当已知实验波形，而又难以用解析形式表示时，用数值法计算卷积积分是方便的。计算时，首先将已知信号波形和冲激响应波形划分为等高度 $\Delta\tau$ 的梯形（ $\Delta\tau$ 的大小视所要求的精度而定）。而后翻转其中一个波形，使它沿另一波形移动，每移动一个单位宽度 $\Delta\tau$ ，两波形的对应数值相乘一次，并计算一次面积（相当于积分）。每次得到的数值即为 $t = n\Delta\tau$ 时刻的卷积积分值 $y_f(n\Delta\tau)$ 。由一系列的 $y_f(n\Delta\tau)$ 的数值便可描出输出波形 $y_f(t)$ 。可应用下式计算 $y_f(n\Delta\tau)$ ：

$$y_f(n\Delta\tau) = \Delta\tau \left[\frac{f_0 h_n + h_0 f_n}{2} + f_1 h_{n-1} + \cdots + f_{n-1} h_1 \right]$$

式中 f_n 与 h_n —— $n\Delta\tau$ 时刻的输入值与冲激响应值。

例 题

1-1 试应用冲激信号与冲激偶信号的取样特性求下列表示式的函数值。

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t} \cos t \delta(t) dt \quad (2) \int_{-\infty}^{\infty} A \sin t \delta'(t) dt$$

$$(3) t^2 \delta(t) \quad (4) e^{-3t} \delta'(t)$$

解 (1) 因为 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$, 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t} \cos t \delta(t) dt = 1$$

(2) 因为 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t) dt = -f'(0)$, 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} A \sin t \delta'(t) dt = -A \frac{d}{dt} \sin t \Big|_{t=0} = -A$$

(3) 因为 $f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t)$, 所以

$$t^2 \delta(t) = 0 \cdot \delta(t) = 0$$

(4) 因为 $\delta'(t) f(t) = \delta'(t) f(0) - \delta(t) f'(0)$, 所以

$$e^{-3t} \delta'(t) = \delta'(t) [e^{-3t}]_{t=0} - \delta(t) \left[\frac{d}{dt} e^{-3t} \right]_{t=0} = \delta'(t) + 3\delta(t)$$

1-2 写出图 1-1 (a)、(b)、(c)、(d) 所示信号的数学描述式。

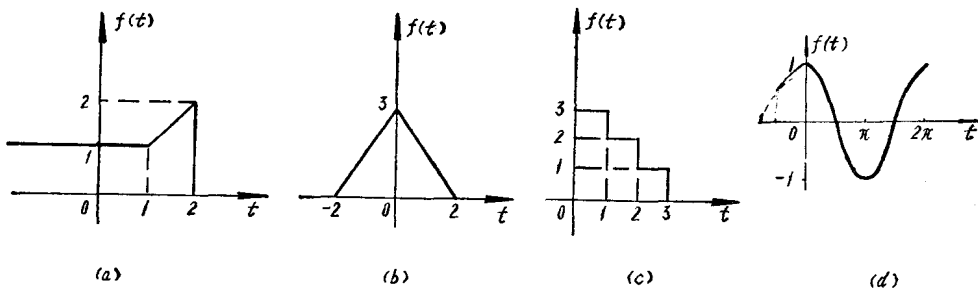


图 1-1

解 (a) $f(t) = u(-t+1) + tu(t-1)u(-t+2)$

$$(b) f(t) = \frac{3}{2} [(t+2)u(t+2) - 2tu(t) + (t-2)u(t-2)]$$

$$(c) f(t) = 3u(t) - u(t-1) - u(t-2) - u(t-3)$$

$$(d) f(t) = \cos t u(t) - \cos(t-2\pi) u(t-2\pi)$$

1-3 已知 $f(5-t)$ 的波形如图 1-2 (a) 所示, 试画出 $f(3t+6)$ 的波形。

解 首先将 $f(5-t)$ 的波形沿纵轴翻转, 得到 $f(t+5)$, 如图 1-2 (b) 所示。然后将 $f(t+5)$ 的波形沿 t 轴左移一个单位, 得到 $f(t+6)$, 如图 1-2 (c) 所示。再将 $f(t+6)$ 的波形横向压缩到原波形的 $\frac{1}{3}$, 幅度不变, 仅冲激信号的强度压缩到原信号的 $\frac{1}{3}$, 最后就得到 $f(3t+6)$, 如图 1-2 (d) 所示。

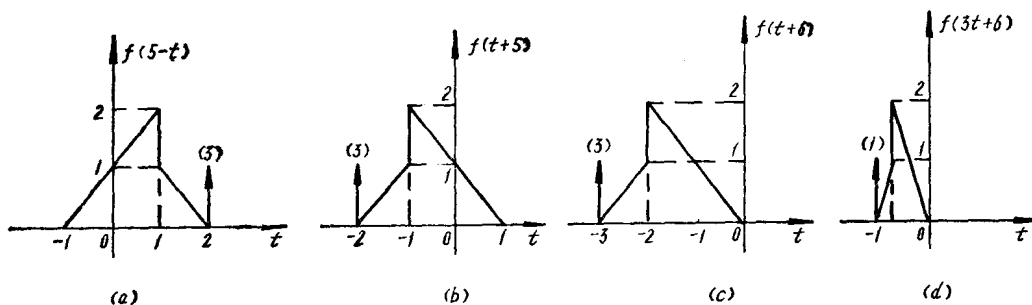


图 1-2

1-4 函数 $f\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{4}\right)$ 的波形如图 1-3(a) 所示, 试画出 $f(t)$ 的波形。

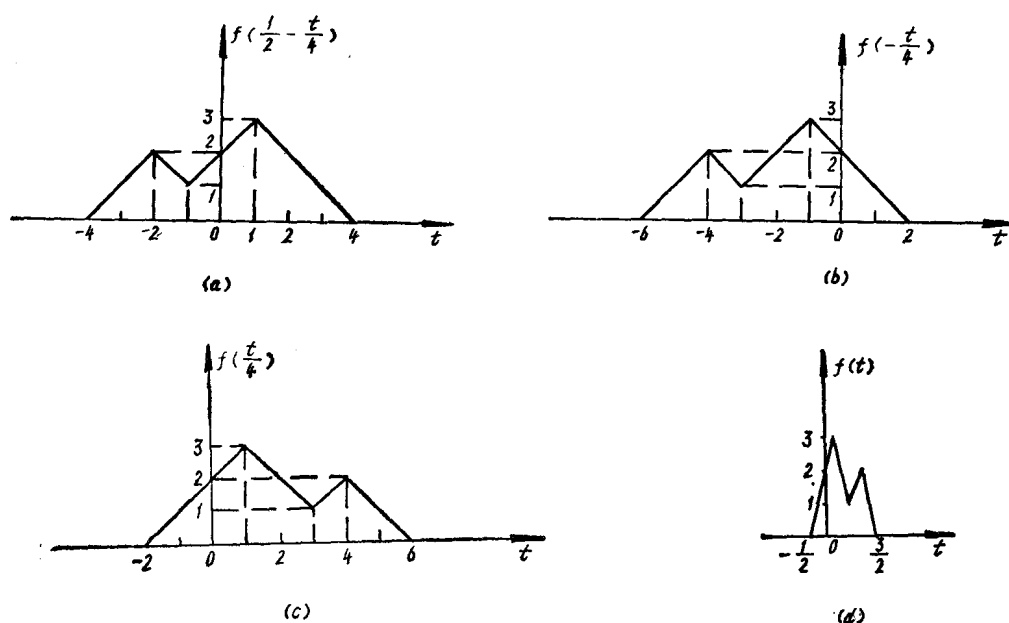


图 1-3

解 首先将 $f\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{4}\right)$ 的波形向 $-t$ 方向平移 2, 因为对 $\frac{t}{4}$ 轴平移 $\frac{1}{2}$ 相当于在 t 轴上平移 $4 \times \frac{1}{2} = 2$, 从而得到 $f\left(-\frac{t}{4}\right)$, 如图 1-3(b) 所示。然后将 $f\left(-\frac{t}{4}\right)$ 的波形沿纵轴翻转, 得到 $f\left(\frac{t}{4}\right)$, 如图 1-3(c) 所示。最后, 将 $f\left(\frac{t}{4}\right)$ 的波形横向压缩到原来的 $\frac{1}{4}$, 即得到 $f(t)$, 如图 1-3(d) 所示。

1-5 已知图 1-4 所示系统初始储能为零, 开关 K 在 $t=0$ 时打开, 试求电压 $v(t)$ 。

解 由图 1-4 写出系统的微积分方程式为

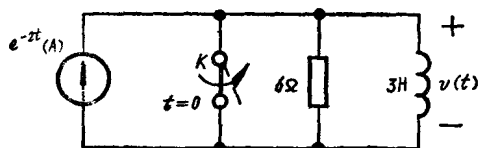


图 1-4

$$-\frac{1}{3} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau + \frac{1}{6} v(t) = e^{-2t} u(t)$$

整理后得到

$$\frac{dv}{dt} + 2v(t) = -12e^{-2t} + 6\delta(t)$$

$v(t)$ 可视为 $-12e^{-2t}$ 单独作用产生的 $v_1(t)$ 和 $6\delta(t)$ 单独作用所产生的 $v_2(t)$ 的叠加。

特征方程式为 $p + 2 = 0$, 其根 $p = -2$ 。根据经典法可知 $v_1(t) = v_h(t) + v_p(t)$ 。其中 $v_h(t)$ 与 $v_x(t)$ 形式相同, 设为 Ce^{-2t} 。由于输入信号 $-12e^{-2t}$ 中, -2 是特征方程的根, 故设 $v_p(t) = Ate^{-2t}$ 。将 $v_p(t)$ 代入微分方程式中, 可求得 $A = -12$ 。所以 $v_1(t) = Ce^{-2t} - 12te^{-2t}$, 最后, 代入零状态条件 $v_1(0) = 0$ 可确定 $C = 0$, 故

$$v_1(t) = -12te^{-2t} u(t) \quad \text{V}$$

$6\delta(t)$ 作用所产生的 $v_2(t)$ 可按等效初始条件法求解。 $v_2(0^+)$ 可由对方程 $\frac{dv_2}{dt} + 2v_2(t) = 6\delta(t)$ 两边从 0^- 到 0^+ 积分得到, 即

$$\int_{0^-}^{0^+} \frac{dv_2}{dt} dt + \int_{0^-}^{0^+} 2v_2(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} 6\delta(t) dt$$

$$v_2(0^+) = 6$$

由 $v_x(t)$ 的形式可写出

$$v_2(t) = v_2(0^+) e^{-2t} u(t) = 6e^{-2t} u(t) \quad \text{V}$$

所以

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = (6e^{-2t} - 12te^{-2t}) u(t) \quad \text{V}$$

1-6 已知图 1-5 所示电路中的开关 K 在 $t = 0$ 时闭合, 试求零状态响应 $i(t)$ 。

解 由图 1-5 可写出系统的微积分方程式为

$$3 \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau + i(t) = 10 \cos 3t u(t)$$

整理后得到 $\frac{di}{dt} + 3i(t) = -30 \sin 3t + 10\delta(t)$

由特征方程 $p + 3 = 0$ 求得根为 -3 , 故 $i_x(t)$ 的形式为 Ke^{-3t} 。

设 $i(t)$ 为 $-30 \sin 3t$ 单独作用所产生的 $i_1(t)$ 和 $10\delta(t)$ 单独作用系统所产生的 $i_2(t)$ 的叠加。而 $i_1(t)$ 为

$$i_1(t) = i_h(t) + i_p(t) = Ce^{-3t} + A \sin 3t + B \cos 3t$$

将 $i_p(t) = A \sin 3t + B \cos 3t$ 代入方程 $\frac{di}{dt} + 3i(t) = -30 \sin 3t$ 中可求出 $A = -5, B = 5$ 。

再将零状态条件 $i_1(0) = 0$ 代入 $i_1(t)$ 中可求出 $C = -5$, 所以

$$i_1(t) = (-5e^{-3t} + 5 \cos 3t - 5 \sin 3t) u(t) \quad \text{A}$$

由 $\int_{0^-}^{0^+} \frac{di_2}{dt} dt + 3 \int_{0^-}^{0^+} i_2(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} 10\delta(t) dt$ 求得 $i_2(0^+) = 10$, 所以

$$i_2(t) = 10e^{-3t} u(t) \quad \text{A}$$

最后可得

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 5(e^{-3t} + \cos 3t - \sin 3t) u(t) \quad \text{A}$$

1-7 已知图 1-6 (a) 所示系统原处稳定状态。若开关 K 在 $t = 0$ 时打开, 试求电压 $v(t)$ 。

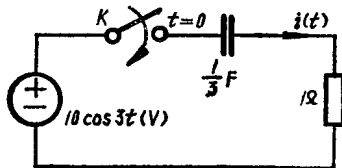


图 1-5

解 首先将图 1—6 (a) 所示系统中 AB 以左部分进行代文宁等效变换, 得到如图 1—6 (b) 所示电路。由此写出电路的微分方程式为

$$\frac{di}{dt} + i(t) = 5$$

特征方程式为 $(p + 1) = 0$, 根 $p = -1$ 。

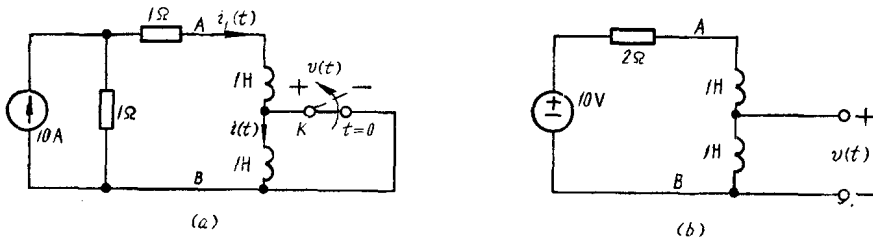


图 1—6

由于电感电流 $i(t)$ 在 $t = 0$ 时产生了跃变, 故应用磁链连续性原理确定电流在 $t = 0$ 时的跃变值 $i(0^+)$ 。因为 $L_1 i_1(0^-) + L_2 i(0^-) = L_1 i_1(0^+) + L_2 i(0^+)$, $i_1(0^-) = 5 \text{ A}$, $i(0^-) = 0$, $i_1(0^+) = i(0^+)$, 所以

$$i(0^+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_1(0^-) = 2.5 \text{ A}$$

于是得

$$i_z(t) = 2.5e^{-t}u(t) \text{ A}$$

解答后乘以 $u(t)$, 说明初值在 $t = 0$ 时跃变。

$i_f(t)$ 可设为

$$i_f(t) = i_h(t) + i_p(t) = ce^{-t} + A$$

将 $i_p(t) = A$ 代入微分方程中可求得 $A = 5$, 再代入零状态条件确定出 $C = -5$ 。所以

$$i_f(t) = (-5e^{-t} + 5)u(t) \text{ A}$$

$$i(t) = i_z(t) + i_f(t) = (-2.5e^{-t} + 5)u(t) \text{ A}$$

最后可得

$$v(t) = L_2 \frac{di}{dt} = 2.5\delta(t) + 2.5e^{-t}u(t) \text{ V}$$

1—8 已知二阶系统如图 1—7 所示, 若 $v(0) = 5 \text{ V}$, $i_L(0) = 10 \text{ A}$, 试求零输入响应 $v_x(t)$ 。

解 由图 1—7, 根据基尔霍夫电流定律可写出

$$2 \frac{dv}{dt} + 72 \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau + 24v(t) = 0$$

$$\text{整理后得} \quad \frac{d^2v}{dt^2} + 12 \frac{dv}{dt} + 36v(t) = 0$$

特征方程式为 $p^2 + 12p + 36 = 0$, 其根为 $p_{1,2} = -6$, 所以

$$v_x(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-6t}$$

其中, K_1 、 K_2 由已知初始条件确定。因为

$$v(0) = 5 \text{ V}$$

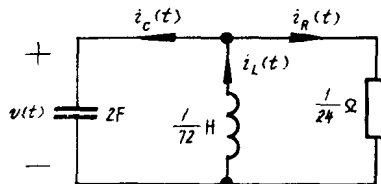


图 1—7

$$v'(0) = \frac{i_c(0)}{C} = \frac{i_L(0) - i_R(0)}{C} = \frac{10 - 5 \times 24}{2} = -55 \text{ V/s}$$

所以

$$v(0) = K_1 = 5$$

$$v'(0) = -6K_1 + K_2 = -55$$

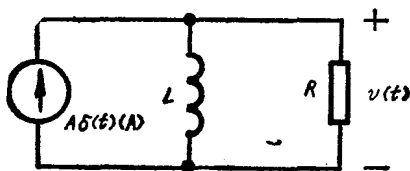
解出

$$K_1 = 5, K_2 = -25$$

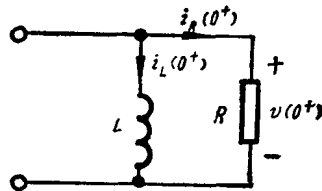
于是得

$$v_x(t) = (5 - 25t)e^{-6t} \text{ V}, \quad t \geq 0$$

1—9 试求图 1—8(a)所示一阶系统在强度为 A 的冲激信号作用下的等效初始条件 $v(0^+)$ 。



(a)



(b)

图 1—8

解 $t=0^-$, 电路处于静止状态。

$t=0$, $A\delta(t)$ 突然作用, 由于电感 L 开路, $A\delta(t)$ 全部流入电阻 R 中, 故 $v(0) = AR\delta(t) \text{ V}$ 。

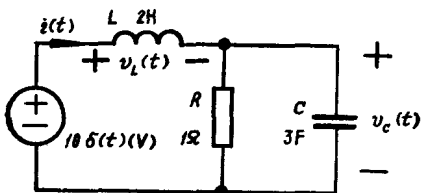
$t=0^+$, 冲激信号消失, 电流源开路, 等效电路如图 1—8(b)所示。因为

$$i_L(0^+) = \frac{1}{L} \int_0^{0^+} v(0) dt = \frac{AR}{L} \quad \text{A}$$

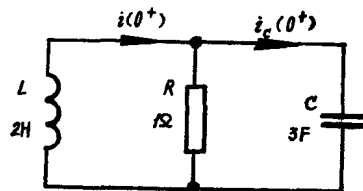
所以

$$v(0^+) = i_R(0^+) R = -i_L(0^+) R = -\frac{AR^2}{L} \quad \text{V}$$

1—10 试用等效初始条件法求解图 1—9(a)所示二阶系统在 $10\delta(t) \text{ (V)}$ 作用下的响应 $i(t)$ 。



(a)



(b)

图 1—9

解 当输入为零时, 由图 1—9(a)可写出

$$i(t) + 2 \frac{di}{dt} + 6 \frac{d^2 i}{dt^2} = 0$$

整理后得

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{3} \frac{di}{dt} + \frac{1}{6} i(t) = 0$$