现代工程数学手册

HANDBOOK OF MODERN MATHE-
MATICS IN SCIENCE AND
ENGINEERING

第V卷

華中理工大學出版社

现代工程数学手册

（Ⅴ）

现代工程数学手册编委会　编

责任编辑：李立鹏　龙纯曼

＊

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

＊

开本：850×1168　1/32　印张：43.75　插页 4　字数：1026 000

1990年8月第1版　1990年8月第1次印刷

印数：1—2 500

ISBN 7-5609-0270-7/O·36

定价：22.30元

《现代工程数学手册》
编辑委员会

前　言

现代工程规模愈益宏大，技术愈益复杂，要求有科学的决策和计划，精确的分析和计算。因此，数学在现代工程科学的各个领域中正日益发挥着越来越重要的作用。另一方面，工程科学的发展，又对数学不断提出新的课题，促使一些新的数学分支的出现和发展。

为了适应社会主义“四化”建设的需要，促进工程学科更有效地运用数学。一九七九年，根据汪胡桢同志的倡议，水利电力部领导决定组织编写《现代工程数学手册》。经过各方面的共同努力，本书终于和读者见面了！我们希望本书能向读者较系统地介绍现代数学的一些理论与方法，也希望它能在工程科学技术人员和数学工作者之间起到一定的桥梁作用。

本书涉及的数学分支较多，全书近百篇，分为五卷陆续出版：

第Ⅰ卷是基础部分，包括初等数学、微积分和在工程实践中广为应用的一些数学分支，如微分方程、复变函数、特殊函数和线性代数等。

第Ⅱ卷介绍近代数学的一些基本内容，如群论、拓扑、泛函分析、广义函数和偏微分方程的近代理论；介绍了数值计算的各种数学方法，如数值分析、数值代数、有限差分法、有限元法等。

第Ⅲ卷介绍现代数学的若干分支，如凸分析、图论、外微分、模糊数学和数理逻辑等。

第Ⅳ卷介绍概率论、数理统计等随机性数学的有关分支及其应用。

第V卷介绍规划论、控制论、信息论及经济数学等现代应用数学的有关分支。

本书的取材侧重于数学理论和方法在工程和科学中的应用，其中许多是工程技术人员和其他应用科学工作者所迫切需要的。本书编写体裁力求适应上述读者的要求，对于某些重要的数学定理和公式给予必要的推导或证明，并辅以适当的例题说明其应用，使读者在使用本书时，既能查到公式和方法，又能学到一些理论，以便于加深理解和灵活运用。本书也可供其他领域的读者参考。

本书的编撰得到全国数学界和工程技术界许多专家学者的支持和帮助，特别是老一辈的数学家、工程学家参加了本书的编、审、校工作和进行指导，对提高本书的质量、保持特色作出了贡献。

本书的编辑出版工作得以顺利进行，是与水利电力部、华中工学院以及许多高等院校和科研单位的支持和帮助分不开的。

对于本书的缺点或错误，敬请广大读者给予批评指正。

《现代工程数学手册》编辑委员会

一九八五年元月

《现代工程数学手册》

第Ⅴ卷

目　录

第七十九篇　优选法与统筹法……………………………………（ 1 ）

第 八 十 篇　线性规划……………………………………………（ 51 ）

第八十一篇　非线性规划…………………………………………（119）

第八十二篇　几何规划……………………………………………（189）

第八十三篇　不可微规划…………………………………………（243）

第八十四篇　动态规划……………………………………………（303）

第八十五篇　整数规划……………………………………………（375）

第八十六篇　多目标规划…………………………………………（413）

第八十七篇　网络规划……………………………………………（471）

第八十八篇　对策论………………………………………………（535）

第八十九篇　线性系统控制理论…………………………………（605）

第 九 十 篇　最优控制理论………………………………………（671）

第九十一篇　卡尔曼滤波…………………………………………（743）

第九十二篇　系统辨识……………………………………………（813）

第九十三篇　信息论………………………………………………（869）

第九十四篇　协同学………………………………………………（961）

第九十五篇　编码理论……………………………………………（983）

第九十六篇　投入产出分析………………………………………（1053）

第九十七篇　计量经济……………………………………………（1081）

第九十八篇　数理经济……………………………………………（1133）

第九十九篇　大系统理论…………………………………………（1201）

数学符号……………………………………………………(1293)
外国人名汉译对照表…………………………………………(1305)
索引……………………………………………………………(1326)
后记……………………………………………………………(1391)

《现代工程数学手册》第Ⅴ卷

第七十九篇

优选法与统筹法

编　者：华罗庚　李之杰　陈德泉

校阅者：计　雷　徐新红

目　录

第1章　简单而常用的优选方法…………………（3）

1.1　什么是优选法？……（3）

1.2　单因素的0.618法…（3）

1.3　抓主要矛盾…………（4）

1.4　双因素………………（5）

1.5　处理特殊性问题的几个方法…………………（6）

第2章　黄金分割法和分数法……………………（13）

2.1　来回调试法…………（14）

2.2　黄金分割法最优性证明……………………（16）

2.3　有限点的问题——分数法…………………（18）

第3章　抛物线法…………（21）

3.1　第一种方法…………（21）

3.2　误差估计……………（23）

3.3　第二种方法…………（25）

第4章　渐近陡升法与抛物体法…………………（27）

4.1　渐近陡升法…………（27）

4.2　抛物体法……………（28）

第5章　统筹法的基本内容…（30）

5.1　统筹图与主要矛盾线……………………………（30）

5.2　平行作业与交叉作业……………………………（33）

5.3　时差…………………（35）

第6章　统筹图的分析………（37）

6.1　统筹图的矩阵表示及有关计算………………（37）

6.2　单一有限资源的安排方法…………………（39）

6.3　化非肯定型为肯定型……………………………（48）

参考书目………………………（50）

第1章 简单而常用的优选方法

1.1 什么是优选法？

优选法是选择最优方案的方法，不但用它能找到最优方案，而且试验次数要尽可能的少。在生产过程中，往往存在若干因素，它们在数量上的变化，直接影响到这一过程的结果。例如怎样选取合适的配方，合适的制作过程，使产品的质量最好，使成本最低。已有的仪器怎样调试使其性能最好等。把所有的可能性都作了试验找出最好结果，这种办法称作穷举法。假定一个一平方公里的池塘，底部不是忽高忽低，而是只有一处最深。比方说每隔一公尺测量一次，就要测1000×1000个点，若用优选法中的一种方法则只要测130个点就可找到最深点。

在下面的介绍中，我们假定最好的方案或者说最好的“点”只有一个，更确切地说，假定目标函数是单峰的。这在实际中也是合理的。因为在生产过程中绝大多数都是在接近于“好点”处进行的。

1.2 单因素的0.618法

假定已知需加一种化学元素来改善某种金属的性能，并且还知道加这种元素的量在1000克到2000克之间。为了较快地找到最优方案，可用以下的**“折迭纸条法”**。

用一个有刻度的纸条表示1000～2000克，在纸条长度的0.618的地方划一条线，在这条线所指示的刻度做一次试验，即加入1618克做一次试验。然后把纸条对中迭起，在前一条线对应的地方再划一条线，即1382克处，再做一次试验.例如图1.2-1所

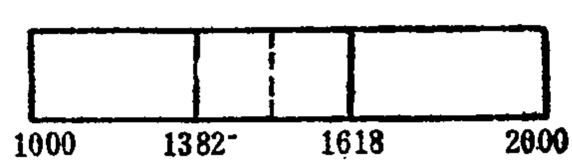

图1.2-1

示。两次试验结果进行比较，如果 1382 克加入量所得结果好 一些，在1618处把纸条的右边一段剪去，如图1.2-2和图1.2-3：

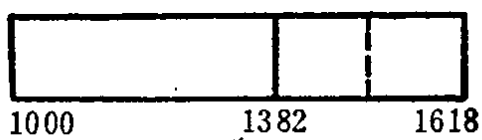

图1.2-2

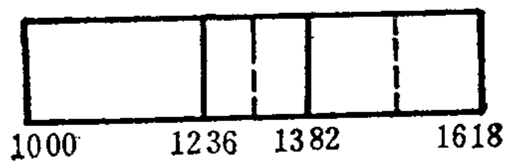

图1.2-3

（如果1618克比较好，则在1382克处剪掉左边一段）。再依中对折，又可划出一条线在1236克处：

依1236克做试验，再和1382克的结果比较。如果 仍 然 是1382克好，则在1236克处剪掉左边，再依中对折找出新的试验点是1472克…。从第二次试验起每做一次试验剪去一段，留下的纸条的长度是上次长度的0.618倍。

若用“大”表示试验范围的大头，“小”表示试验范围的小头，“中”表示中间已做试验点的数值，则计算公式是：

第一个试验点：(大－小)×0.618＋小。

第二个试验点，第三个试验点，…：大＋小－中。

1.3　抓主要矛盾

事物是复杂的，是由各方面的因素决定的，因此必须考虑多因素的问题。优选法固然比穷举法更适合于处理多因素的问题，但抓主要矛盾是关键。例如，配一种酸洗液，用于去掉金属的氧化皮，已知用硝酸和氢氟酸两种，共配500毫升。硝酸加多少？氢氟酸加多少？水多少？什么温度？多长时间？搅拌的速度和时间再考虑进去共有七个因素。如果每个因素分10个等级，用穷举法要做10^7次试验，用优选法七个因素也要做相当多的试验次数。首先应分析一下什么是主要因素。一共500毫升，硝酸、氢氟酸和水各多少定了。所以，在这里水就不是独立因素了。配好后用在常温情况下做试验，温度这个因素也不考虑。酸洗的时间是一种

指标，而不是因素。搅拌速度和时间也可不考虑。所以，只有两个因素：硝酸和氢氟酸的加入量，于是可以用两个因素的优选法来安排试验。

1.4 双因素

假如有两个因素，一个是含量，在1000克到2000克之间。另一个是温度，在5000℃到6000℃之间。处理的办法是用图1.4-1表示试验范围。例如在固定了1500克的情况下，找最好的温度，

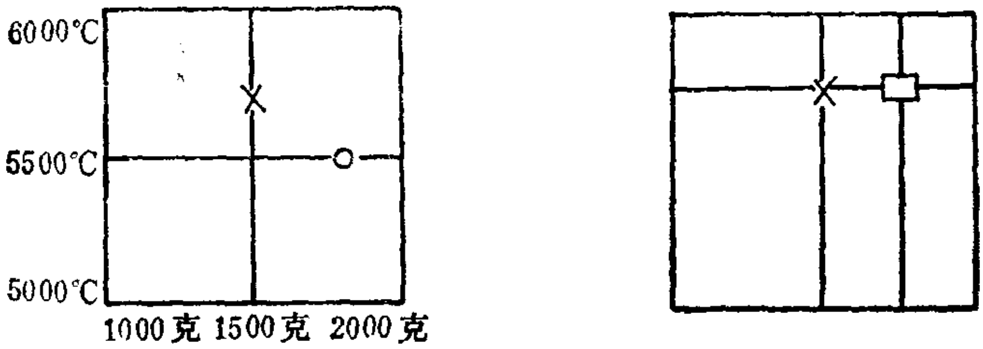

图1.4-1

用0.618法找到了好点在“×”处。再在5500度的情况下找到合适的点在“○”处。比较这两点的试验结果，如果“×”处的结果比“○”处的好，则去掉下半部分（如果“○”处结果好，则去掉左半部分）。再在余下的部分用上述的办法进行。或者在找到好点“×”处后，就在通过“×”的横线上用0.618法找到好点，例如这个好点在“□”处，接下去再在通过“□”处的竖线上作试验找更好的点。这样两个因素，固定一个找另一个因素的好点，交替进行。例如，对于前面提到的配酸洗液的问题，根据资料和经验拟定硝酸加入量在0～250毫升内变化，氢氟酸在0～25毫升内变化。第一步固定氢氟酸的加入量为0～25毫升的中点13毫升，对硝酸加入量进行优选。用0.618法进行四次试验找到好点在165毫升处。第二步固定硝酸165毫升用0.618法找氢氟酸最好的加入量，结果发现在25毫升时酸洗效果最好，这说明0～25

毫升的优选范围不一定恰当。放宽试验范围到25～50毫升，再进行优选，到第九次试验找到氢氟酸的最佳加入量为33毫升。至此，共试验十四次便找到了满足生产需要的配方。这个例子说明用优选法不仅能够多快好省地找到最优方案，而且可以纠正根据经验初步确定的范围不当的错误。

1.5　处理特殊性问题的几个方法

（1）对分法

生产某一产品需要某种贵重金属，已知采用16％的添加量生产出来的产品质量合格。在8％处做试验，如果仍合乎要求，去掉右边一半（如不合格则去掉左边一半）。接下去在4％处做试验，如果量少不合要求，去掉左边一半。再在4～8％的中点6％处做试验，…照这样对分的办法安排试验点就称作**对分法**。如图1.5-1所示。

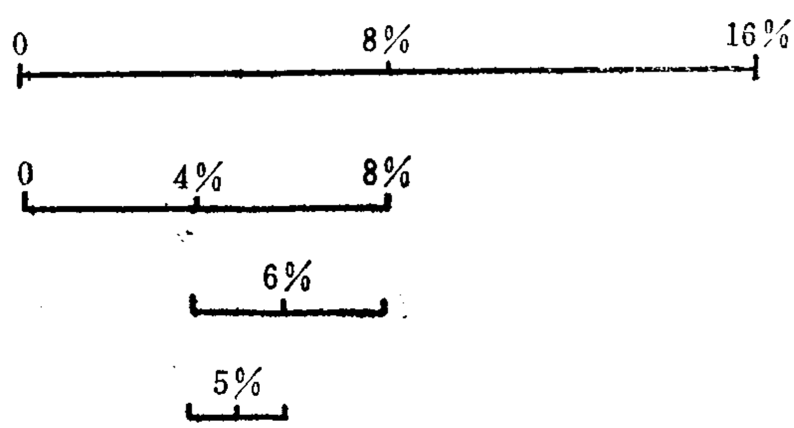

图1.5-1

（2）分数法

0.618是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的三位近似小数表示，在一些情况下不用近似小数而用其近似分数表示：

$$\frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \frac{34}{55},\ \frac{55}{89},\ \frac{89}{144},\ \cdots.$$

如果可做9次试验，第一个试验点在试验范围的$\frac{55}{89}$处，而后对折在其对应点上做第二个试验等，如果可做10次试验，第一次试验点在试验范围的$\frac{89}{144}$处做，以后各次均依中对折，在对应点上做试验。或者已知可做试验的点都是已知的且不一定都是均匀分布在试验范围内，可根据试验点的多少取第一次试验点在$\frac{5}{8}$，$\frac{8}{13}$，$\frac{13}{21}$，…处。

（3）平行线法

如果两个因素中，一个是温度另一个是时间，则炉温难调，时间易守。据此可先把温度固定在试验范围的0.618处，对时间用0.618法或对分法找到好点“○”处，再把温度调到0.382处，固定下来找时间，假定在“×”处最好。对比之后，“○”处比“×”处好，则划去下面的部分，如图1.5-2所示。然后对温度

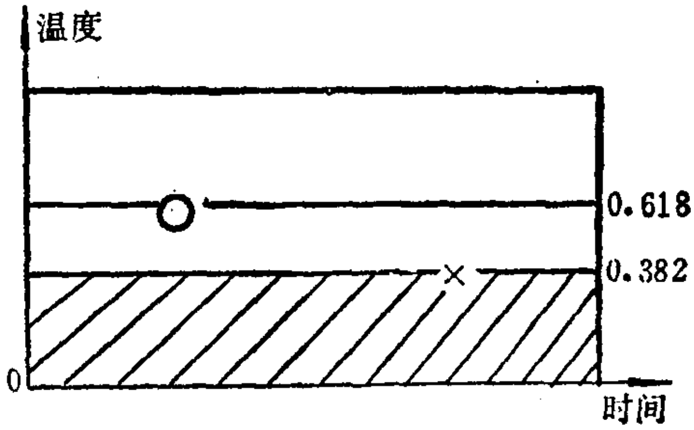

图1.5-2

用对折法找出温度试验范围余下部分的与0.618处对应的温度，将其固定下来优选时间这个因素。依此作下去直找到满意的方案，此法称为**平行线法**。

（4）陡度法

例如在图1.5-3中，A点做试验得到数据是a、B处做试验得

到的数据是b，如果$a>b$，则

$$\frac{(a-b)}{(A,B\text{间的距离})}$$

称为由B上升到A的陡度。

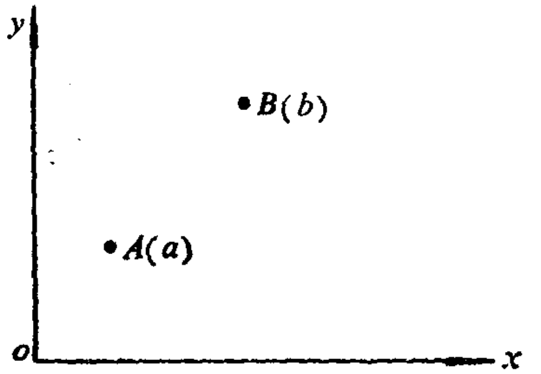

图1.5-3

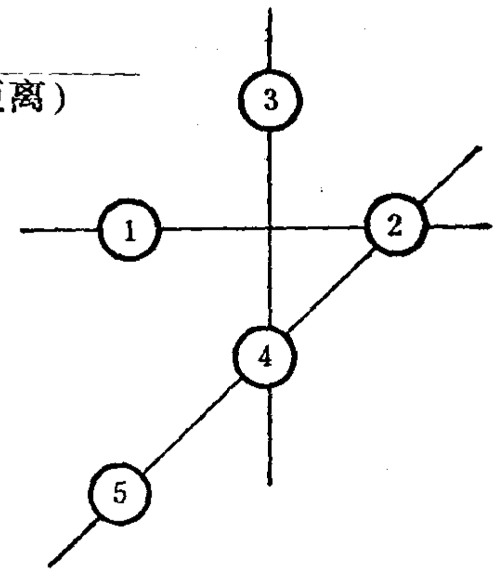

图1.5-4

在某化工厂曾遇到过一个双因素的问题，在横线上做了两个试验（①，②）之后，立刻转到竖线上去又做了两个试验（③，④）。结果是④点的试验结果特别好，②点的试验结果特别差。这样就不再在横线和竖线上作试验了，在②与④两点的连线上做试验，结果⑤点更好。如图1.5-4所示。这就是陡度法。总起来讲，可以计算①到④，②到④，③到④的陡度，看哪个陡度最大，就向那个方向爬上去。

（5）瞎子爬山法

瞎子在山上某点，想要爬到山顶，他看不见，但他可从立足处用明杖向前试一试，觉得高些，就向前走一步，如果前面不高，向左一试，不高就试后面，觉得后面高就往后退一步，如果后面不高就试右边，即哪边高就往哪边走一步。如果四边都不高就原地不动。这个方法在实际中还是常用的，特别是在大生产中和不易跳跃调整的情况下有用。如果爬了三点（在不同的方向）还可结合陡度法一起使用。

（6）抛物线法

在有了三个试验点x_1，x_2和x_3及相应的试验结果Y_1，Y_2和Y_3后，可用下式

$$x_0=\frac{1}{2}(Y_1(x_2^2-x_3^2)+Y_2(x_3^2-x_1^2)+Y_3(x_1^2-x_2^2))$$
$$/(Y_1(x_2-x_3)+Y_2(x_3-x_1)+Y_3(x_1-x_2))$$

计算出x_0，并在此处做试验。我们还可在做试验前算出近似值

$$Y_0=Y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+Y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$
$$+Y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

预估下次试验结果。

（7）翻筋斗法

以两个因素为例，从一个等边三角形ABC出发、在顶点各做一个试验，若C点好，则作C点的对顶的同样大小的等边三角形CDE，在D、E处做试验，如果D点好，则作D点的对顶且大小相同的等边三角形。如果F、G两点都没有D点好，则取FD及GD的中点F'和G'做试验，选其中的好点依上述方法作对顶同样大小的等边三角形。如图1.5-5所示。如果一分再分都没有D

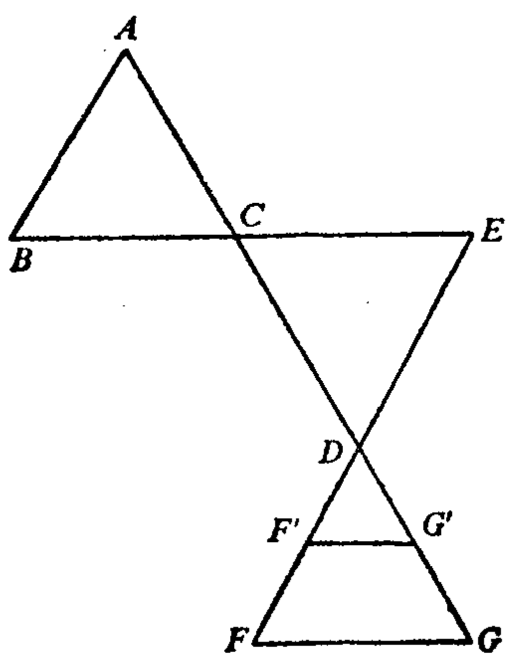

图1.5-5

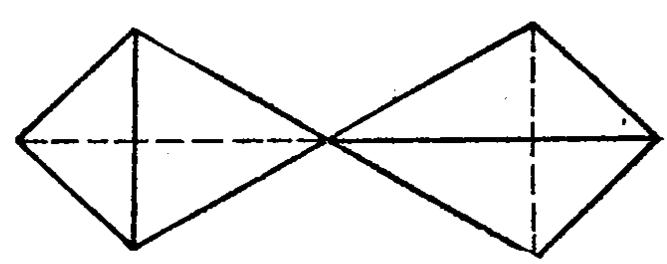

图1.5-6

点好，则一般说来D点就是最好点。

三个因素可以用正四面体在四个顶点做试验，依最好点翻过去得出相对应的顶点，如图1.5-6所示。

（8）最速上升法

例如在A、B、C三点做了试验，结果A好，B次之，C差，在空间坐标中表示这一结果就是A'，B'和C'三点，于是可对通过A'、B'、C'三点的平面求其最陡上升的方向，如图1.5-7所示。

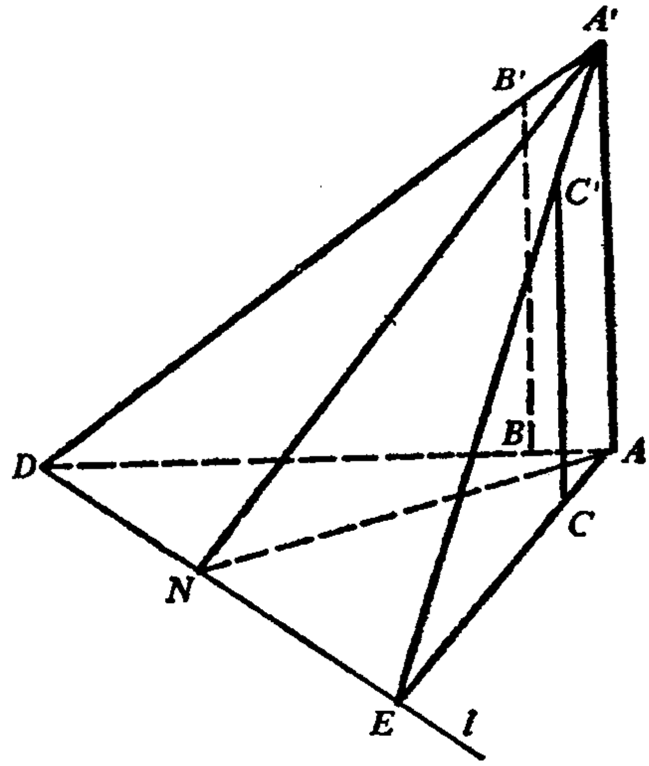

图1.5 7

假定这个平面和A、B、C所在平面相交于直线l，则过A垂直于l的方向$\overrightarrow{NA}$是最陡的方向.实际上这是二个变数情形下的最速上升法。三个因素如果要找$E=f(x,y,z)$的最大值，假定在(x_1,y_1,z_1)、(x_2,y_2,z_2)、(x_3,y_3,z_3)、(x_4,y_4,z_4)处做了试验，结果得到E_1、E_2、E_3、E_4，其中E_4最大。

令
$$E=ax+by+cz+d \tag{1.5-1}$$
是通过上述四点的超平面，即从
$$E_i=ax_i+by_i+cz_i+d \qquad (i=1,2,3,4) \tag{1.5-2}$$
解出a、b、c、d，由(1.5-2)式推出
$$\begin{cases} E_1-E_4=a(x_1-x_4)+b(y_1-y_4)+c(z_1-z_4); \\ E_2-E_4=a(x_2-x_4)+b(y_2-y_4)+c(z_2-z_4); \\ E_3-E_4=a(x_3-x_4)+b(y_3-y_4)+c(z_3-z_4). \end{cases} \tag{1.5-3}$$
由(1.5-3)式解出a、b、c代入(1.5-1)式得到
$$E-E_4=a(x-x_4)+b(y-y_4)+c(z-z_4). \tag{1.5-4}$$