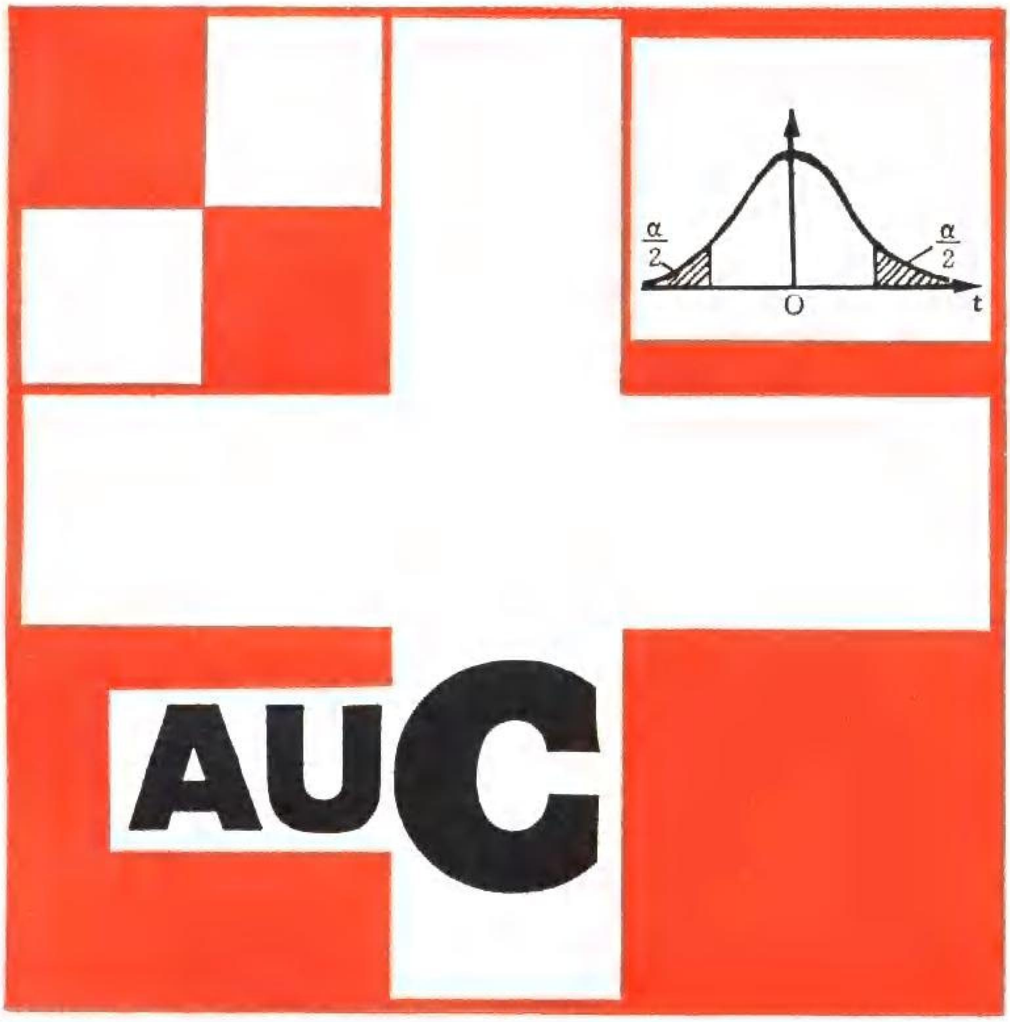
虞孝珍　郭怀兰　主编

医用高等数学



中国医药科技出版社

登记证号：（京）075 号
责任编辑：董晔
封面设计：凯旋

医用高等数学
虞孝珍 郭怀兰 主编
*
中国医药科技出版社 出版
（北京西直门外北礼士路甲 38 号）
山东轻工业学院印刷厂 印刷
新华书店北京发行所 发行
*
开本 787×1092mm1/16 22.125 印张
字数 510 千字 印数 1—8500
1995 年 3 月第 1 版 1995 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 7－5067－1358－6/G・0074
定价：16.40 元

主　编　虞孝珍　郭怀兰

副主编　张定一　阮鸿祚　王培承

刘晓飞　周凤君　张志尧

郑乃法　王爱英　吕　同

编委、编者（以姓氏笔划为序）

王爱英　王培承　吕　同

许加凤　孙秋梅　阮鸿祚

刘晓飞　杨东方　张志尧

张定一　郑乃法　周凤君

郭怀兰　虞孝珍

前　言

20世纪以来，随着科学技术的迅速发展，医学科学和医疗实践得到了空前迅速而巨大的发展。为了适应医学发展的需要，根据卫生部关于高等医药院校五年制医学专业教学计划中规定的“高等数学”课程的教学要求，武警医学院、天津医科大学、镇江医学院、潍坊医学院、新乡医学院、泰山医学院和山东医科大学七所院校，总结自己十余年数学教材建设的经验，合作编写了《医用高等数学》一书，以供医学院校各专业本科生用。由于该书各章内容具有相对独立性，可根据教学需要进行取舍，故本书又可作为医学硕士研究生、专科生用教材，也可供医药人员学习和参考。

《医用高等数学》一书共分八章。编选了函数与极限、一元函数微积分、常微分方程和拉氏变换、多元函数微积分简介、概率论、数理统计初步和线性代数基础等部分内容，各章配有习题、书后附有习题答案和附表。全书注意联系医药学实际，力图体现“医药应用”特色；虽不苛求理论推导，但仍保持了数学内容的完整性和系统性，重视加强对基本知识、基础理论和基本技能的训练，力求使医学生学习和掌握必要的高等数学知识，提高运用数学方法解决医用物理学、化学和医学中实际问题的能力，为今后的医学实践和科研工作提供必要的数学知识。

本书在编写过程中，得到了山东省教委和山东医科大学教务处的大力支持和帮助，山东医科大学王家政老师为全书精心绘制了图形。在此谨向他们表示衷心感谢。由于我们水平所限，书中缺点错误在所难免，诚恳地希望广大读者批评指正。

编　者

1994年秋　于济南

目　录

第一章　函数与极限

高等数学研究的主要对象是函数，极限是研究函数的重要概念和方法．因此，函数与极限是高等数学的基础．本章将在初等数学中函数知识的基础上进行复习和补充并系统化．

第一节　函　　数

一、函数概念

在实际问题中，经常遇到各种各样的量，如长度、重量、温度、时间、速度等等．在某些条件下，保持同一确定数值的量叫做**常量**，能取不同数值的量叫做**变量**．例如，在一定容积的培养基中成批培养细胞，在培养过程中，容积是常量，而细胞的数目和培养基中的营养物质是变量，一个量是常量还是变量，应根据具体情况作具体分析．例如，一个人在整个成长过程中，身高是一个变量，但在某天甚至某月中身高变化很微小，所以就可以把在某天或某月的身高看作常量．

在某个变化过程中，通常有两个或两个以上的变量，这些变量往往是相互联系、相互制约的，我们来看以下几例．

例1　设自由落体运动中，路程S与时间t之间的相依关系是：$S=\frac{1}{2}gt^2$，其中g是重力加速度，对于给定的时间t_0，按此关系就有确定的值$S_0=\frac{1}{2}gt_0^2$与之对应．

例2　某气象台用自动记录仪，记录了某一天气温T随时间t的变化曲线(图1—1)．从图上可得在一天中任意一个时刻t_1的气温T_1，如$t=3$时(早晨3点钟)$T=12$℃；$t=13.5$时，$T=22$℃，显然，下午一点半时气温最高．

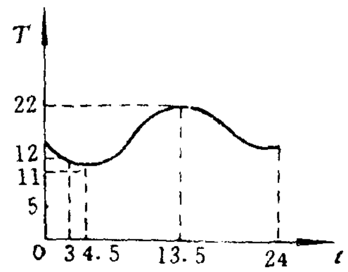


图1—1

例3　测量某河流的一个横断面上水的深度y(米)．如图1—2所示，从左岸开始，每隔3米测量一次，得到从左岸开始计算的水平距离x与水深y之间关系如下表：

x(米)	0	3	6	9	12	15	18
y(米)	0	0.8	1.2	2.1	3	1.9	0

上述各例都是通过一定的规律反映了两个变量之间的依赖关系，即当一个变量的值在某一范围内确定之后，另一变量按照一定的对应关系也随之而确定．这种变量之间的依赖关系，称之为函数关系．

定义 设在某一变化过程中有两个变量x和y,D是一个给定的数集,如果对于每个数$x\in D$,变量y按照某种规律总有确定的数值(一个或多个)与之对应,则称y是x的**函数**(function). 记作

$$y=f(x)$$

x叫做**自变量**(independent variable),y又叫做**因变量**(dependent variable). 自变量x的取值范围叫做函数的**定义域**(domain of defintion),当x取遍D中各数时与之对应的y值构成的数集R叫做函数的**值域**(*range*).

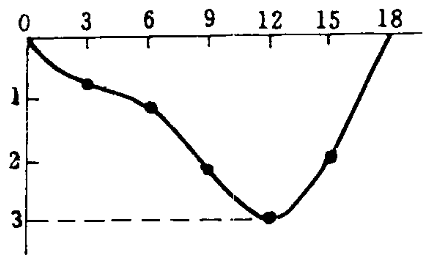


图1—2

如果对于自变量的一个值x有唯一的y值与之对应,则称y是x的**单值函数**;若对于一个x值有多个y值与之对应,则称y是x的**多值函数**. 如例1、2、3中的函数均为单值函数,而$y=\pm\sqrt{x^2+1}$为多值函数.

当自变量取函数$f(x)$定义域中某一定值x_0时,函数$f(x)$的对应值$f(x_0)$叫作函数$y=f(x)$当$x=x_0$时的函数值,记为$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$.

函数关系即自变量与因变量的对应规律,用f、F、g、φ等字母表示,这时函数记作$y=f(x)$、$y=F(x)$、$y=g(x)$、$y=\varphi(x)$等等.

变量之间构成函数关系的两个要素是函数的定义域和对应规律,与自变量和因变量取什么字母无关.

例4 求下列函数的定义域

(1)$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+4}$;　(2)$y=\arcsin\dfrac{3x-1}{5}$

解 (1)函数的定义域可由如下不等式组的解确定

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+4\geqslant 0\end{cases}\quad 解之,得\begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\geqslant -4\end{cases}$$

即函数的定义域为$[-4,-1)$,$(-1,1)$及$(1,+\infty)$;

(2)由反正弦函数的定义域可得$-1\leqslant\dfrac{3x-1}{5}\leqslant 1$解之可得函数的定义域为$[-\dfrac{4}{3},-2]$.

例5 已知函数$f(x)=\sqrt{x^2+1}$,求$f(2)$及$f(x+1)$.

解 $f(2)=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$;

$$f(x+1)=\sqrt{(x+1)^2+1}=\sqrt{x^2+2x+2}.$$

函数的表示法正如例1—例3所示,可以用解析表达式、图象或表格表示,故通常有公式法、图示法和表格法三种函数表示法. 这三种方法各有千秋,图示法形象直观,表格法便于查找函数值. 公式法简明准确且便于理论分析,在高等数学中,多采用公式法表示函数.

用公式法表示函数时,有时需要在自变量不同的取值范围中用不同的表达式来表示一个函数,这就是**分段函数**(piecewise function).

例6 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

它是定义在$(-\infty,+\infty)$内的一个函数，是分段函数，其图象如图1—3所示，由两段曲线组成.

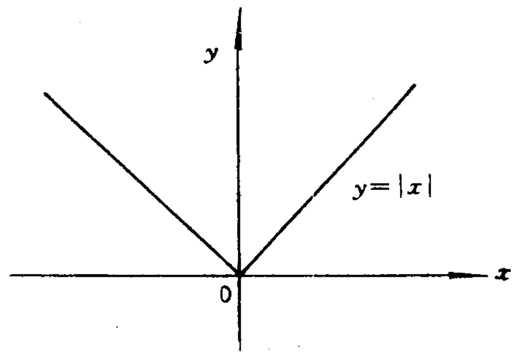


图1—3

例7 据某项生理学实验数据，血液中胰岛素浓度$C(t)$（单位/毫升）与时间t（分钟）的关系可表为

$$C(t) = \begin{cases} t(10-t), & 0 \leqslant t \leqslant 5; \\ 25e^{-k(t-5)}, & t > 5 \end{cases}$$

其中$k>0$为常数，无理数$e\approx2.71828$. 该函数也是分段函数.

在求分段函数值时，需将自变量的值代入它所在区间的解析式计算. 如$t=5$时，$C(5)=5(10-5)=25$，当$t=7$时，$C(7)=25e^{-k(7-5)}=25e^{-2k}$.

在一个变化过程中构成函数关系的两个变量是自变量还是因变量是相对的，例如圆的 面积与半径，面积A可看作是半径r的函数：$A=\pi r^2$. 也可以把半径r看作面积A的函数：$r=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$. 这两个函数同样表示园半径与园面积这两个变量之间的关系，只是自变量和因变量取得不同. 如果我们把$A=\pi r^2$叫做直接函数，那末$r=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$就称为函数$A=\pi r^2$的反函数(inverse function).

一般地，假设y是x的函数$y=f(x)$，则由函数$y=f(x)$所确定的函数$x=\varphi(y)$叫做函数$f(x)$的**反函数**，而$y=f(x)$叫做**直接函数**. 由于习惯上常用x表示自变量，所以$y=\varphi(x)$也叫做$y=f(x)$的反函数. 或记$y=f^{-1}(x)$为$y=f(x)$的反函数.

例8 求$y=\dfrac{1}{4}x^2$的反函数，并在同一直角坐标系中作出它们的图形.

解 由$y=\dfrac{1}{4}x^2$解出x，得$x=\pm2\sqrt{y}$，所以$y=\dfrac{1}{4}x^2$的反函数是$y=\pm2\sqrt{x}$. 图象如图1—4所示.

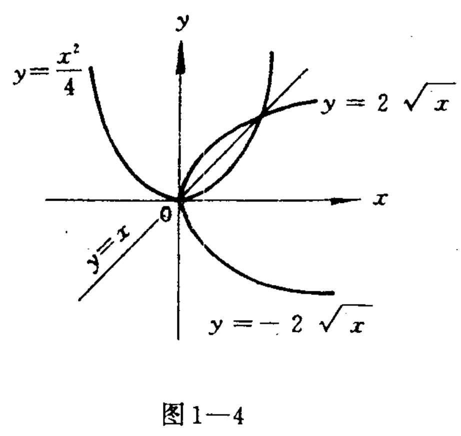


图1—4

由图1—4可看出，直接函数$y=\dfrac{1}{4}x^2$的图形与其反函数$y=\pm2\sqrt{x}$的图形是关于直线$y=x$对称的，这一结论具有普遍意义，事实上，我们利用几何知识容易证得：反函数$y=\varphi(x)$的图形与直接函数$y=f(x)$的图形对称于直线$y=x$.

我们知道对数函数$y=\log_a x\,(a>0,a\neq1)$与指数函数$y=a^x$互为反函数，它们的图形关于直线$y=x$对称.

特别地，以常数e为底的对数函数

$$y = \log_e x$$

叫做自然对数函数，简记为

$$y = \ln x.$$

自然对数函数与指数函数 $y=e^x$ 互为反函数，其图形如图1—5所示．

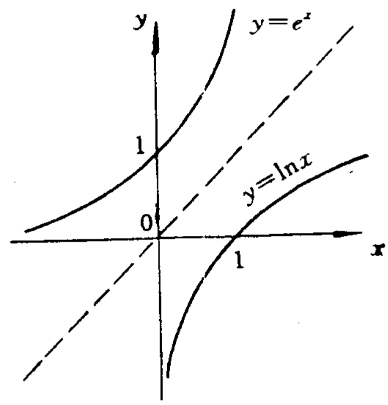


图1—5

用公式法表示函数关系，可以有不同的形式，通常表示为 $y=f(x)$ 的形式，其中 $f(x)$ 的表达式中不含变量 y，这种形式的函数称为显函数，有时，变量 x 与 y 之间的函数关系是由方程 $F(x,y)=0$ 来确定的．这种由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数关系，称为隐函数．

有些隐函数可以表示成显函数的形式．例如由 $2x-3y+1=0$ 解出 y，得显函数 $y=\dfrac{2x+1}{3}$，而有些隐函数，不易或不可能表成显函数，如由方程 $y-x-\varepsilon\sin y=0$（ε 为常数，$0<\varepsilon<1$）所确定的函数则无法表示成显函数．

二、函数的几种特性

1．有界性

如果存在某个正数 M，对于函数 $f(x)$ 的定义域内的一切 x 值，有不等式 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，就称 $f(x)$ 是**有界函数**．

例如对于 $(-\infty,+\infty)$ 内的一切 x，因 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 是有界函数．而 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ 便是无界函数．有时需要在函数定义域的某部分区间上讨论函数的有界性，例如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 或 $[-5,-2]$ 内有界，而在 $(0,1)$ 内无界等．

2．单调性

如果对于某区间内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时总有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 在该区间内是**单调增加**（或**单调减少**）的．它的图形是一条沿 x 轴正向上升（或下降）的曲线．单调增加函数或单调减少函数统称为**单调函数**，且称该区间为单调区间．例如 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的；而在 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调函数．如图1—6所示．

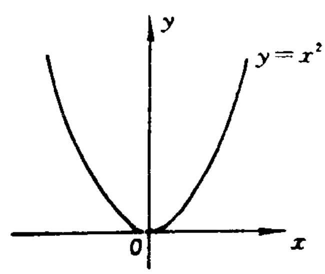


图1—6

3．奇偶性

如果函数 $y=f(x)$ 对于定义域内的一切 x 都满足 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是**偶函数**；如果满足 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是**奇函数**．例如，函数 $y=x^2$ 与 $y=\cos x$ 为偶函数；$y=x^3$ 与 $y=\sin x$ 为奇函数．函数 $y=\cos x+x$ 既不是奇函数也不偶函数，可称作非奇非偶函数．根据奇函数和偶函数的定义可知，奇函数或偶函数的定义域都必须对称于原点．

例9 判断 $y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$ 的奇偶性．

解 设$f(x)=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$

因为
$$f(-x)=\frac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=\frac{1+a^x}{1-a^x}=-\frac{a^x+1}{a^x-1}=-f(x)$$
所以由奇函数的定义知$y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$为奇函数.

4. 周期性

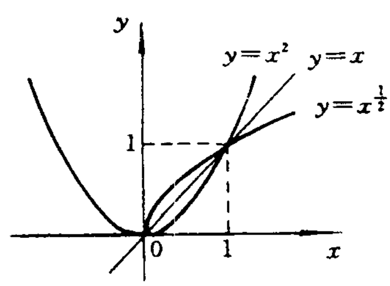
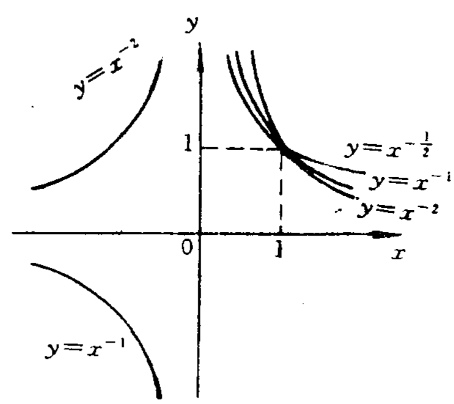
对于函数$y=f(x)$，如果存在一个非零常数T，使得关系式
$$f(x+T)=f(x)$$
对于定义域内的任何x值都成立，则称$f(x)$为**周期函数**(periodic function). 使上述关系式成立的最小正数T，称为该函数$f(x)$的**周期**. 例如，$y=\sin x$与$y=\mathrm{tg}x$都是周期函数，其周期分别是2π与π.

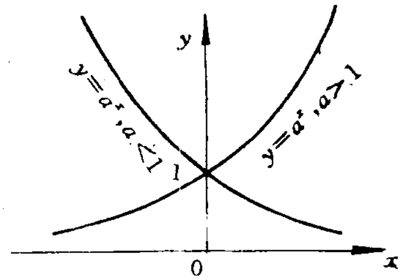
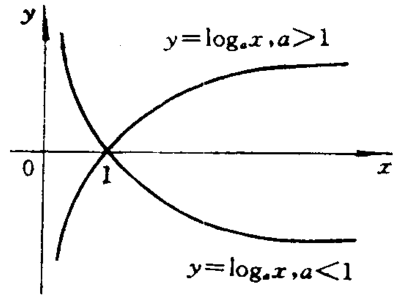
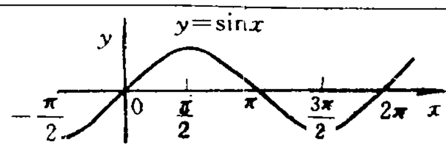
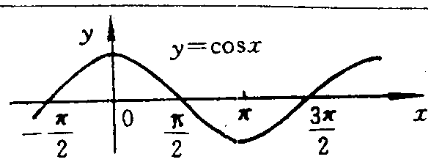
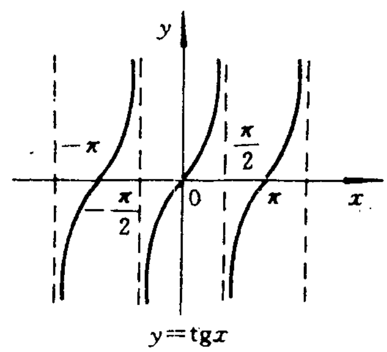
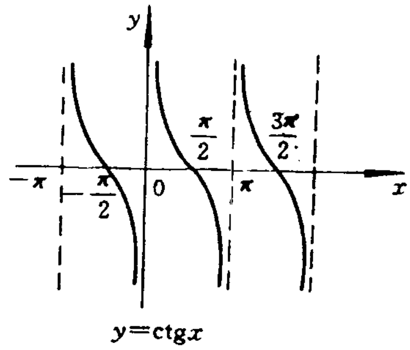
三、初等函数

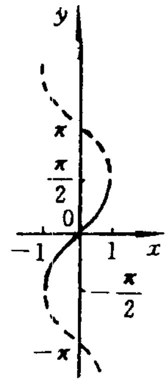
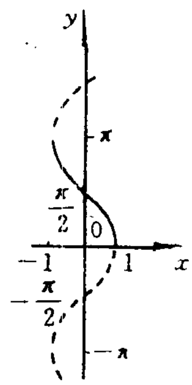
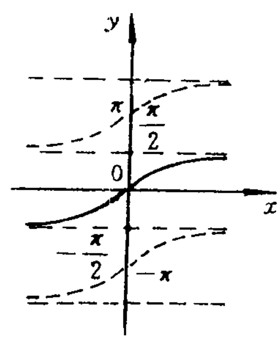
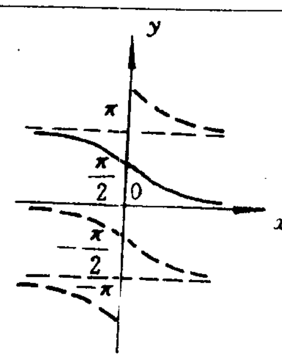
1. 基本初等函数

通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数(fundamental elementary function). 为使用方便，将五种基本初等函数列表如下：

基本初等函数表

名称与表达式		定义域	值域	图形
幂函数 $y=x^\mu$	μ次抛物线 ($\mu>0$)	公共定义域 $[0,+\infty)$	公共值域 $[0,+\infty)$	
	μ次双曲线 ($\mu<0$)	公共定义域 $(0,+\infty)$	公共值域 $(0,+\infty)$	

名称与表达式	定义域	值　域	图　　形
指数函数 $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	
正弦函数 $y=\sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	
余弦函数 $y=\cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	
正切函数 $y=\mathrm{tg}x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ k 为整数	$(-\infty, +\infty)$	
余切函数 $y=\mathrm{ctg}x$	$x\neq k\pi$ k 为整数	$(-\infty, +\infty)$	

名称与表达式	定义域	值　域	图　　形
反正弦函数 $y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	 $y=\arcsin x$
反余弦函数 $y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	 $y=\arccos x$
反正切函数 $y=\mathrm{arctg}x$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	 $y=\mathrm{arctg}x$
反余切函数 $y=\mathrm{arcctg}x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$	 $y=\mathrm{arcctg}x$

2. 复合函数

我们通常将五种基本初等函数和有理函数(即多项式和有理分式)作为构成复杂函数的基础．如函数$y=\sin u$与$u=x^3$构成y关于x的函数$y=\sin x^3$，或者说函数$y=\sin x^3$是由函数$y=\sin u$与$u=x^3$复合而成的．由于函数多是由若干个函数复合成的，为此给出如下定义．

定义 设y是u的函数$y=f(u)$，u是x的函数$u=\varphi(x)$，对于x在$u=\varphi(x)$的定义域或其一部分上取值时所对应的u值，$y=f(u)$有定义，则称y是x的**复合函数**，记作$y=f[\varphi(x)]$，其中u称作**中间变量**．

例10 试求由下列函数复合而成的函数．

(1)$y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$

(2)$y=u^2$，$u=\ln v$，$v=x^2+1$

解 (1)$y=\sqrt{u}$与$u=1-x^2$的复合函数是$y=\sqrt{1-x^2}$.

(2)$y=u^2$，$u=\ln v$与$v=x^2+1$的复合函数是$y=\ln^2(1+x^2)$.

例11 试剖析下列复合函数．

(1)$y=e^{\arcsin x}$

(2)$y=\sqrt[3]{\lg\sin(x^2+1)}$

解 (1)复合函数$y=e^{\arcsin x}$是由$y=e^u$与$u=\arcsin x$复合而成．

(2)复合函数$y=\sqrt[3]{\lg\sin(x^2+1)}$是由$y=\sqrt[3]{u}$，$u=\lg v$，$v=\sin w$，$w=x^2+1$复合而成．

函数的复合，不仅限于两个函数，有些是由两个以上的函数经过多次复合而成．在剖析复合函数时，剖析到函数的四则运算为止即可．还需指出，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的．例如，$y=\arcsin u$，$u=3+x^2$就不能复合成一个复合函数，因为对于$u=3+x^2$的定义域$(-\infty,+\infty)$内任一x值所对应的u值(都大于或等于3)，函数$y=\arcsin u$都没有意义．

3. 初等函数

定义 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次函数复合步骤构成且仅用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**(elementary function).

例如$y=\sqrt{1-x^2}$、$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$及$y=\ln x+\dfrac{1}{x^2}+(e^{\sin\sqrt{x}}-1)$等都是初等函数．

分段函数就其整体而言，多数是非初等函数，而绝对值函数(例6)却是初等函数，因为$y=|x|$实质上就是初等函数$y=\sqrt{x^2}$.

今后我们所讨论的函数多数是初等函数．

第二节 函数的极限

一、极限的概念

为了深入研究函数，需研究函数极限的概念，即研究在自变量的某个变化过程中，对应函数值的变化趋势．由于自变量的变化过程通常有两种，一种是自变量x无限趋近于

某个有限值x_0，记作$x\to x_0$，另一种是自变量x的绝对值$|x|$无限增大，记为$x\to\infty$. 现就这两种情况给出函数极限的定义.

定义1 设函数$f(x)$在x_0附近有定义(在x_0处可以没有定义). 如果当x以任何方式趋近于x_0时，函数$f(x)$无限地趋近于定数A，则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \qquad (x\to x_0)$$

例如我们可得$\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$，$\sin x\to 1 \quad (x\to\frac{\pi}{2})$.

由定义1知，任何常量都以自身为极限；当$x\to x_0$时，若$f(x)\to A$，则$|f(x)-A|\to 0$；在考察极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$时，我们关心的是函数$f(x)$在$x_0$附近的变化趋势，而不是$f(x)$在$x_0$这一孤立点的情况，因此，极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$是否存在，与$f(x)$在$x_0$是否有定义及其函数值无关.

例如函数$f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}$，在$x=0$没有定义，但极限$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}$存在，并且$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$. 事实上，这是因为$|\sin\frac{1}{x}|\leqslant 1$，从而$|x\cdot\sin\frac{1}{x}|\leqslant|x|$，所以当$x\to 0$时，$x\cdot\sin\frac{1}{x}\to 0$ (图1—7).

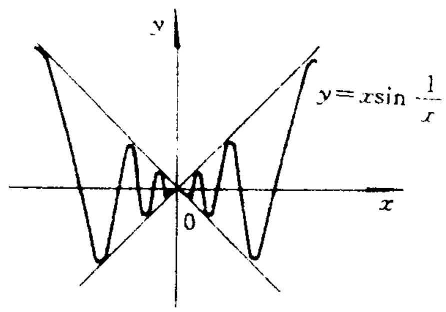


图1—7

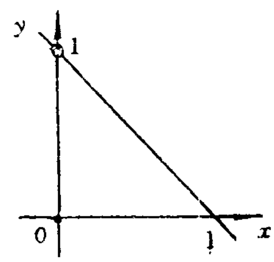


图1—8

又如，分段函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$$

其图象是“挖掉”了点(0,1)的直线$y=1-x$，再加上一点(0,0)，因为当$x\neq 0$时，$f(x)=1-x$，所以

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(1-x)=1$$

极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在，但不等于$f(x)$在点$x=0$的值($f(0)=0$)，如图1—8所示. 如果只考虑x从x_0的一侧趋近于x_0，就得到如下左极限与右极限的概念，左极限和右极限统称为单侧极限.

定义2 如果x从x_0的右侧(即大于x_0的方向)趋近于x_0时，$f(x)$趋近于定数A，就说函数$f(x)$以A为**右极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A，或 f(x_0+0)=A.$$

类似地可以定义左极限

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A, \text{或} f(x_0 - 0) = A.$$

根据定义1、2可推出

函数$f(x)$当$x \to x_0$时极限存在的充要条件是左极限及右极限同时存在且相等．即：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A.$$

例1 对于函数(如图1—9所示)

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & -1 \leqslant x < 0; \\ \sqrt{1 - x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

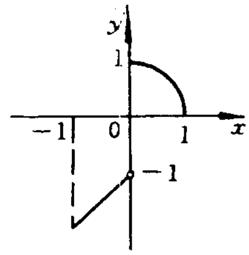


图1—9

有$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0}(x-1) = -1$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \sqrt{1 - x^2} = 1.$$

因为左极限和右极限不相等，所以$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$不存在．

例2 求$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0; \\ ax+b, & x > 0 \end{cases}$ 当$x \to 0$时的极限．

解 因为

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (ax + b) = b,$$

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} e^x = e^0 = 1.$$

所以，当$b=1$时，$f(0+0)=f(0-0)=1$，$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

当$b \neq 1$时，由于$f(0+0) \neq f(0-0)$，故$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$不存在．

定义3 设函数$f(x)$对于任意大的x都有定义．如果当x无限增大时，函数$f(x)$无限趋近于定数A．就称当x趋向正无穷大时，函数$f(x)$以A为**极限**．记作

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \quad (x \to +\infty)$$

类似地，有

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \quad (x \to -\infty)$$

如果函数$f(x)$当$x \to +\infty$和$x \to -\infty$时都以定数A为极限，就称$f(x)$当$x \to \infty$时以定数A为极限．记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \quad (x \to \infty)$$

例如，由定义3可得：$\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x$不存在．$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$，$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5}{x} = 0$.

二、无穷小量与无穷大量

无穷小量和无穷大量是理论研究和实际问题中比较重要的两种变量．

1．无穷小量

定义 若函数$f(x)$当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时极限为零，则称函数$f(x)$当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时为**无穷小量**，简称无穷小(infinitesimal)．记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad (\text{或} \lim_{x \to \infty} f(x) = 0)$$

例如，当 $x\to 0$ 时，函数 $x^2, 3x, x\sin\frac{1}{x}$ 都是无穷小；当 $x\to+\infty$ 时 e^{-x} 也是无穷小.

显然，无穷小是绝对值"无限变小"的变量. 数零以外的任何"很小的常数"都不是无穷小.

利用极限和无穷小定义不难证得：当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时函数 $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷小.

无穷小量具有如下性质：

(1)有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

(2)有界变量与无穷小量之积是无穷小量.

由于无穷小量和常数都是有界变量，故有

(3)有限个无穷小量之积仍是无穷小量.

(4)常数与无穷小量的积是无穷小量.

为了比较两个无穷小趋于零的快慢速度，需要对两个无穷小量的比进行讨论. 设 α、β 是在自变量的同一个变化过程中的无穷小量. 而 $\lim\frac{\beta}{\alpha}$ 也是这个变化过程中的极限. 于是有

定义 设 α、β 是在自变量的同一变化过程中的两个无穷小量.

(1)如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，就称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；也可称 α 是比 β 更低阶的无穷小.

(2)如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$，就称 β 与 α 是同阶无穷小.

(3)如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，就称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

例如，由于当 $x\to 0$ 时，$\frac{3x^2}{x}\to 0$，所以称 $3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小；因为 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6$，所以称 x^2-9 是 $(x-3)$ 的同阶无穷小；以后还会遇到 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，于是可得 $\sin x\sim x\,(x\to 0)$，即 $\sin x$ 与 x 是等价无穷小.

2. 无穷大量

定义 如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为**无穷大量**，简称无穷大(infinity). 记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\quad（或\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty）$$

例如，当 $x\to 1$ 时 $\frac{1}{x-1}$ 为无穷大，$x\to\infty$ 时 e^{x^2} 为无穷大.

必须注意：无穷大量(∞)不是常量，不可把很大很大的数说成是无穷大，当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时函数 $f(x)$ 为无穷大，按通常意义来说，其极限是不存在的，但为了叙述和书写方便，我们也说"函数的极限是无穷大". 并记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\quad（或\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty）$$

3. 无穷大量与无穷小量的关系