微积分在经济中的应用

刘书田 编著

$$C=\int_0^Q (MC)\,dQ+C_0$$

内 容 简 介

本书包括两大部分：微积分知识在经济中的应用；微积分的经济应用问题的解题思路和方法。在应用方面，深入浅出详尽地阐明了各类经济函数的特点，论述了经济模型、增长率、弹性、边际等概念；从多方面阐述了经济现象中的极值问题和微积分学的应用，在解题方法方面，作者打破同类参考书的成规，以经济应用问题归类，分析总结了微积分解题的基本思路，一般方法和规律。对难题加强了解题技巧的引导，对易产生错误的问题则以"注意事项"提示了可能出现差错的原因。

本书可供财经院校师生，电大经济类学员及经济管理人员使用。

微积分在经济中的应用

刘书田　编著

责任编辑　朱华

☆

湖南大学出版社出版发行

（长沙岳麓山）

湖南省新华书店经销　　湘潭大学印刷厂印刷

☆

787×1092　32开　10.375印张　233千字

1988年8月第1版　　1988年8月第1次印刷

印数：00001—14000册

ISBN7-314-00254-1/O：14

定价：2.90元

编 者 的 话

本书为财经院校学生编写，也适合电大、职大、业大、函大的学生阅读。

本书通过例题讲述，归纳、总结了微积分经济应用问题解题的思路、方法和应注意的事项；详细阐明了微积分的一些基本概念的经济意义和微积分知识在经济领域的广泛应用。

由于水平有限，书中定有不足之处，请读者批评指正。

1987年

目　　录

一　经济中常见的一些函数

为了便于理解和掌握微积分学内容在经济学现象中的解释和应用，这里对经济中常见的一些函数略加说明。

（一）需求与供给

1　需求函数

从经济现象看，消费者对某种商品的购买量除与该商品的价格有直接关系外，还与消费者的收入、嗜好、其它商品的价格、季节等因素有关。如果我们舍弃别的因素，只考虑需求与价格之间的关系，那么，消费者在一定的价格条件下对某商品的需要称为需求，这就是消费者愿意购买而且有支付能力，如果仅愿意购买而没有支付能力，这只是欲望而不是需求。

需求价格是指消费者对一定量的商品所愿支付的价格。

从数学上看，不仅假设需求与价格之间存在着关系，而且假设二者之间存在着某种确定的相依关系，并视价格P为自变量，需求Q为因变量，这就是一元函数中的需求函数，记作$Q=\varphi(P)$

其中P取非负数。需求函数的图形称为需求曲线。

一般说来，需求随价格上涨而减少，或随价格下降而增加。因此，通常假设需求函数是单调减少的，需求曲线是单

调下降的（图 1 ）。有如下两种特殊情况：需求曲线垂直于 P 轴（图 2 ）和需求曲线平行于 P 轴（图 3 ）。前一种情况是只要价格确定，需求数量可以是任意的；后一种情况是无论价格如何变化，需求保持不变。

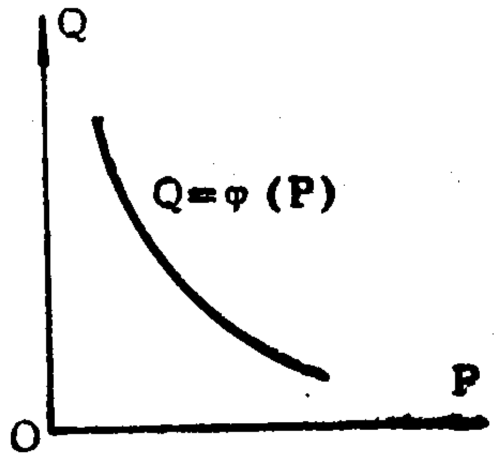

图 1

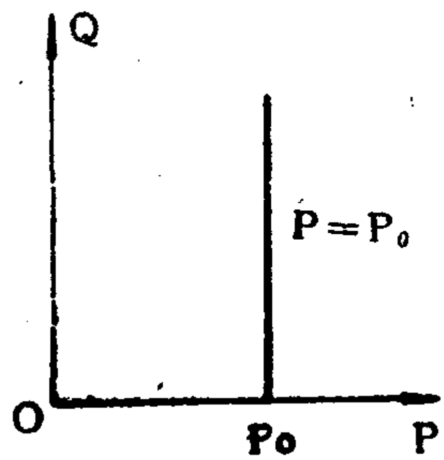

图 2

经常采用的需求函数有下面几种形式：

(1) 线性函数 $Q=a-bP$

其中 $a>0$，$b>0$ 是常数（图 4 ）。

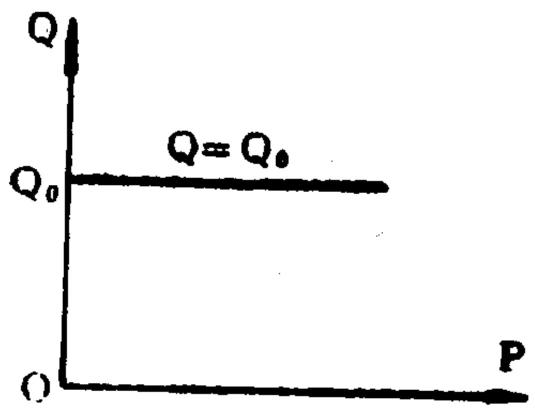

图 3

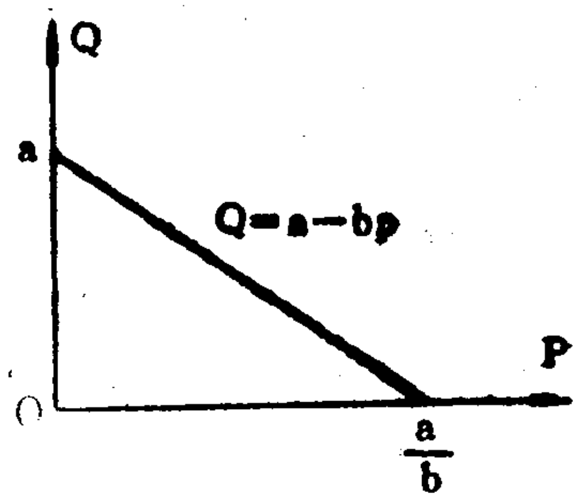

图 4

$b>0$ 表示：P 每增加（或减少）一个单位，Q 将减少

（或增加）b 个单位。当价格 $P=0$ 时，$Q=a$，这可理解为最大需求量；当 $Q=0$ 时，$P=\frac{a}{b}$，这可理解为最高售价。

（2）二次函数　　$Q=a-bP-cP^2$

其中 $a>0$，$b\geqslant 0$，$c>0$ 为常数（图5）。

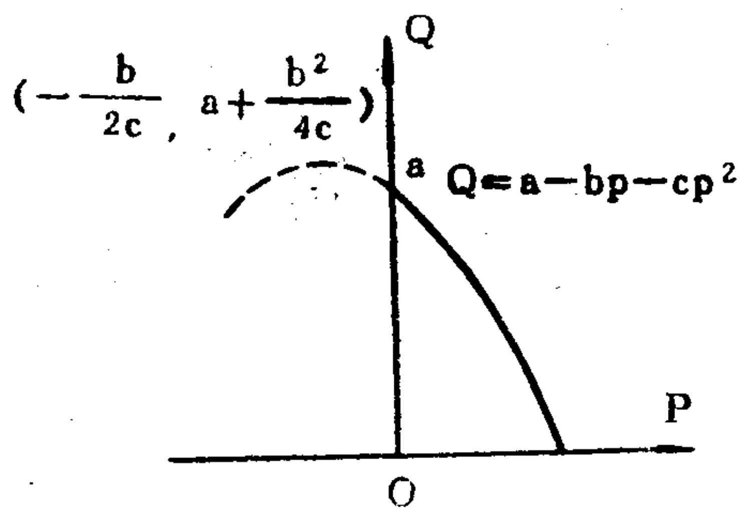

图 5

由 $a>0$，$b\geqslant 0$，可使抛物线的顶点在第二象限或 Q 轴的正方向上；又 $c>0$，抛物线开口向下，从而使抛物线在第一象限部分是单调下降曲线。

当 $b=0$ 时，需求函量为

$$Q=a-cP^2$$

（3）指数函数

$$Q=Ae^{-bP}$$

其中 $A>0$，$b>0$ 是常数（图6）。

当 $P=0$ 时，$Q=A$，A 可理解为最大需求量。

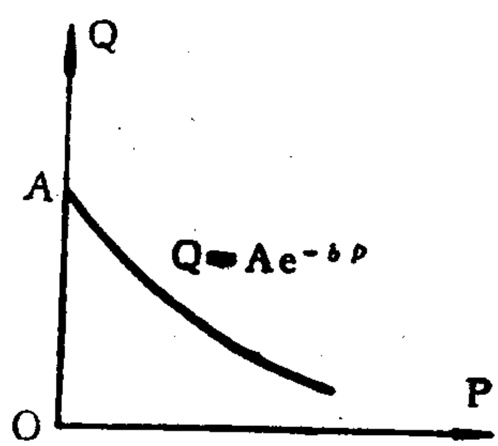

图 6

(4) 幂函数 $Q=AP^{-\alpha}$

其中 $A>0$，$\alpha>0$ 是常数（参看图 1）。这显然是单调减函数。

需求函数 $Q=\varphi(P)$ 的反函数 $P=\varphi^{-1}(Q)$，通常也称为需求函数；有时，也称为价格函数。

2 供给函数

供给是指在某一时期内，生产者在一定价格条件下，愿意并可能出售的产品。

供给价格是指生产者为提供一定量商品所愿意接受的价格。一般说来，供给随价格上涨而增加，或随价格下降而减少。这是因为，价格提高，生产者愿意出售产品。

假设供给与价格之间存在函数关系，视价格 P 为自变量，供给 Q 为因变量，便有供给函数 $Q=f(P)$

其中 P 取非负数。

供给函数的图形称为供给曲线，通常假设供给函数是单调增加的（图 7）。供给曲线与 P 轴的交点若是 $(P_0, 0)$，则应有 $P_0>0$，在经济学上应理解为，只有当价格超过 P_0 时，生产者才开始提供产品。供给曲线有两种特殊情况：其一是

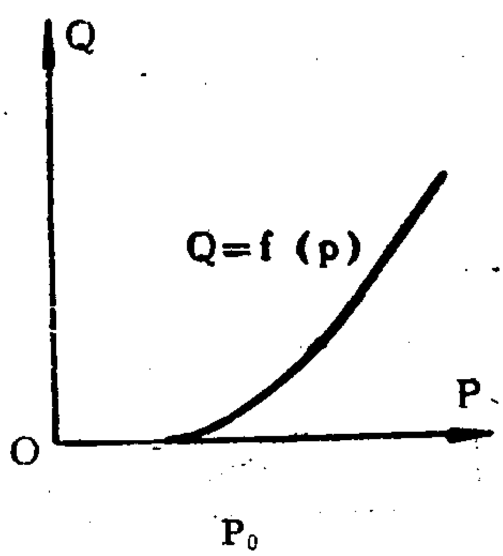

图 7

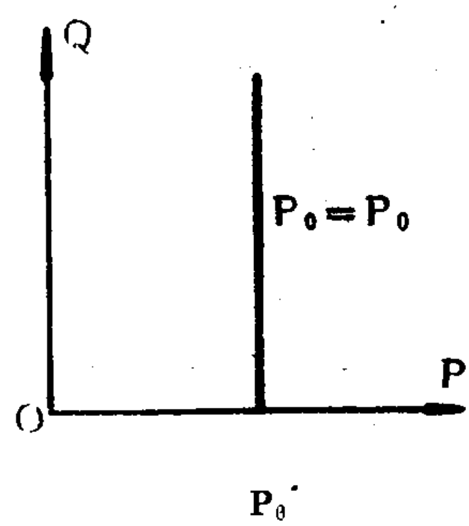

图 8

垂直于P轴，这时，只要价格确定，供给者可以无限地提供产品（图 8）；其二是平行于P轴，这时，无论价格如何变动，供给量都不变（图 9）。

常见的供给函数有如下形式：

(1) 线性函数　　$Q=-c+dP$

其中$c>0$，$d>0$是常数（图10）。

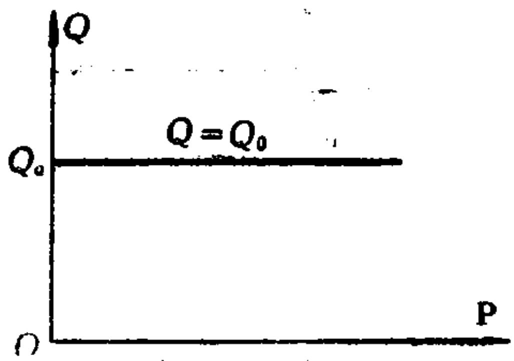

图 9

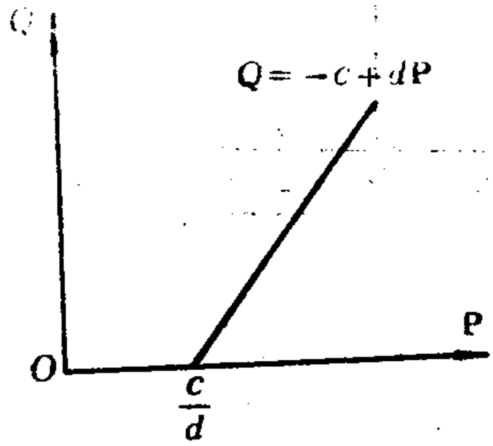

图 10

$d>0$表示供给随价格上涨而增加，P每增加（或减少）一个单位，Q将增加（或减少）d个单位。由图10知，只有当$P\geqslant\frac{c}{d}$时，才有$Q\geqslant 0$，即当价格超过$\frac{c}{d}$时，才有供给。

(2) 二次函数　　$Q=-a+bP+cP^2$

其中$a>0$，$b\geqslant 0$，$c>0$是常数（图11）。

$a>0$，$b\geqslant 0$可使抛物线的顶点在第三象限或在Q轴的负方向下；又$c>0$，抛物线开口向上，从而当$P\geqslant 0$时，$Q=-a+bP+cP^2$是单调增函数。由图11易知，只有当$P>\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2c}$时才有供给。

（3）幂函数　　$Q=AP^{\alpha}-B$

其中$A>0$，$B>0$，$\alpha>0$是常数（图12）。

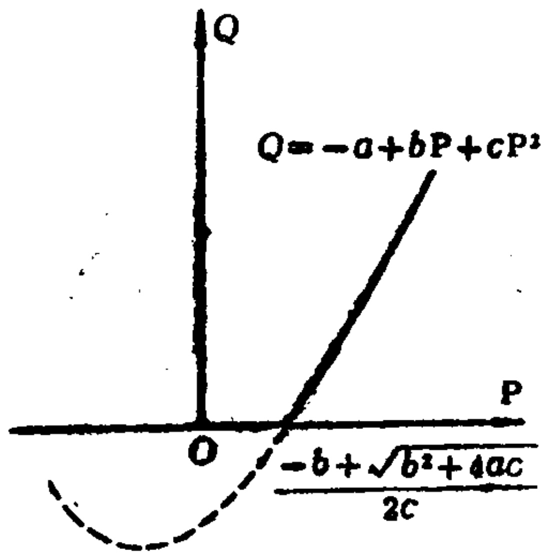

图 11

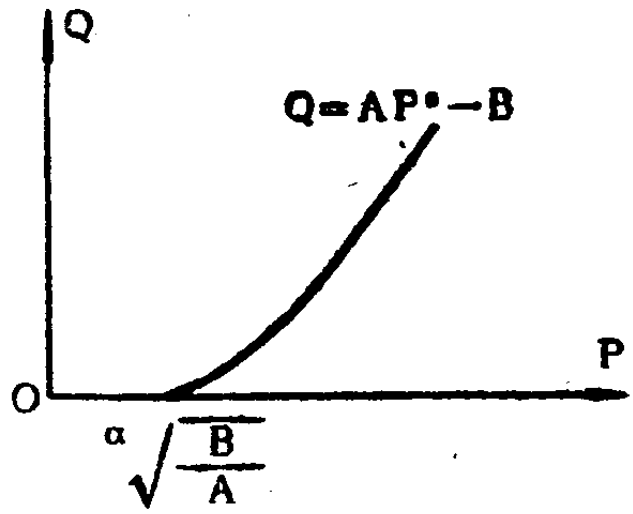

图 12

容易看出，当$\alpha=1$时，这就是线性供给函数，当$\alpha=2$时，这是二次供给函数。只有当$P>\sqrt[\alpha]{\frac{B}{A}}$时，才有供给。

（4）指数函数　　$Q=Ae^{KP}-B$

为使供给曲线具有如图13的形状，请读者自行讨论常数A，B，K所应满足的条件。

3　局部市场均衡

均衡是指经济现象中变动着的各种力量处于一种暂时稳定状态。既然是暂时稳定状态，均衡并不表明不会再变动。

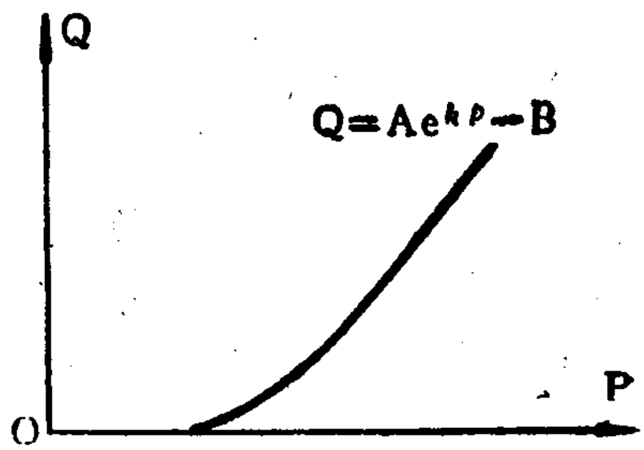

图 13

均衡是在一定条件之下达到的，条件变了，均衡就不存在了。经济现象总是处在一种均衡的破坏和另一种均衡的建立的过程中。从动态的观点看，均衡是短暂的，是一个不间断的过程。

局部市场均衡是讨论独立市场、单个商品的价格与供求关系变化的一种方法。它假定在其它条件不变时，一种商品的价格只取决于它本身的供求情况。

前面提到，消费者对一定量商品所愿支出的价格称需求价格，生产者为提供一定量商品所愿意接受的价格称供给价格。某种商品，当需求价格和供给价格相一致时的价格称均衡价格。即当市场的需求量与供给量一致时，这时，商品的数量是均衡数量，商品的价格是均衡价格。假设需求曲线与供给曲线的交点为（$\overline{P}$，$\overline{Q}$），则$\overline{P}$是均衡价格，$\overline{Q}$是均衡数量（图14）。

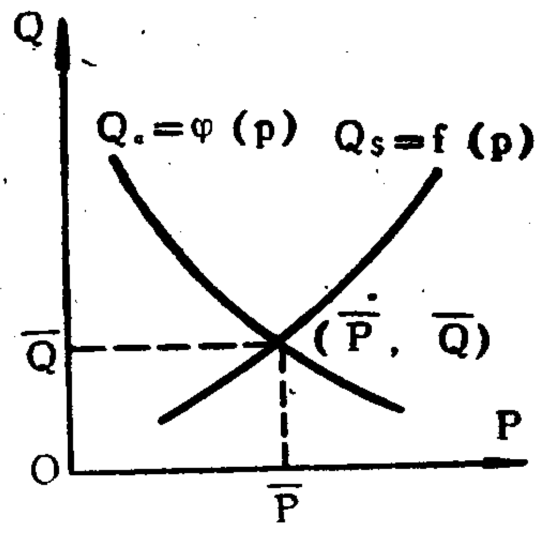

图 14

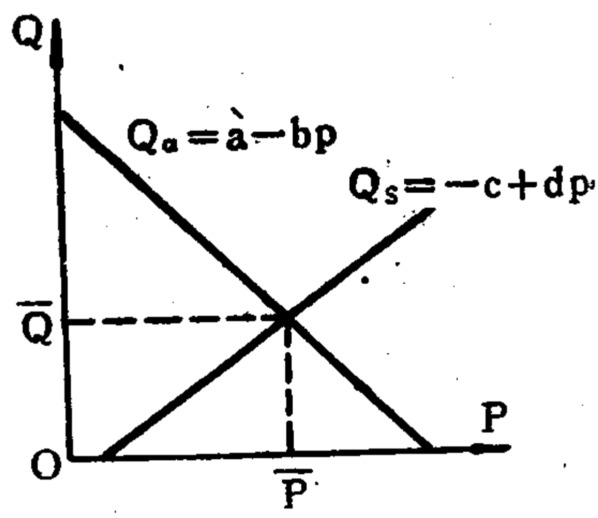

图 15

例如，线性局部市场均衡模型可写成

$$Q_d = Q_s$$

$$Q_d = a - bP \quad (a>0,\ b>0)$$

$$Q_s = -c + dP \quad (c>0,\ d>0)$$

这里 Q_d 是需求数量，Q_s 是供给数量（图 15）。

解这个方程组，可得到均衡价格 $\overline{P}$ 和均衡数量 $\overline{Q}$

$$\overline{P} = \frac{a+c}{b+d} \qquad \overline{Q} = \frac{ad-bc}{b+d}$$

由于要求 $\overline{Q}>0$，因 $b+d>0$，应要求 $ad-bc>0$。这样，常数 a，b，c，d 除了前面的限制外，还应限制 $ad>bc$。

如果称 $Q_d - Q_s$ 为超额需求，那么当超额需求为零时，市场就达到均衡。

（二）成　本

这里要讲的是总成本，平均成本和边际成本。

1　总成本函数

总成本是指生产特定产量所需要的成本总额。它包括两部分：固定成本和可变成本。

固定成本是在一定范围内不随产量变动而变动的费用，如厂房费用、机器折旧费用，一般管理费用、管理人员的工资等。可变成本是随产量变动而变动的费用，如原材料，燃料和动力费用，生产工人的工资等。

若视产量为 Q，总成本为 C，则 C 与 Q 之间的函数关系为总成本函数　$C = C(Q)$

或记成　$C = C_0 + F(Q)$

其中 $C_0 \geqslant 0$ 是固定成本，$F(Q)$ 是可变成本，总成本函数的图形称为总成本曲线（图16）。

一般情况下，总成本函数有下面的性质：

（1）总成本函数是单调增加的。这是因为当产量增加时，成本总额必然随之增加。

（2）没有商品产出时，总成本的值非负；$C|_{Q=0}=C(0)\geqslant 0$。这很显然，因为不生产时，也要支出固定成本，因此可将$C(0)$理解为固定成本：$C(0)=C_0$。

（3）产量达到一定限度后，若再增加产量总成本的增加率，将随着产量Q的增加而增加。

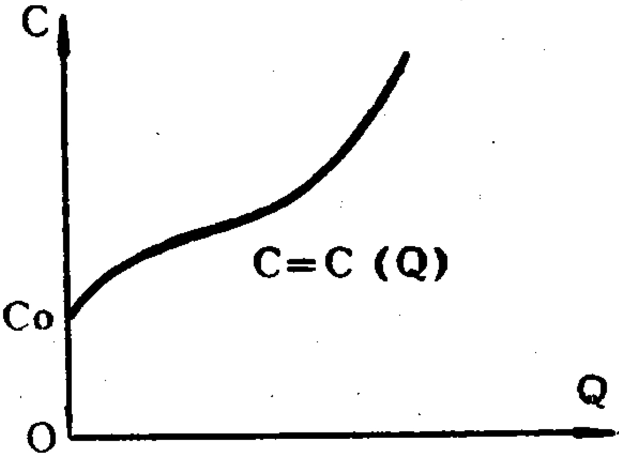

图 16

2 平均成本函数

平均成本是平均每个单位产品的成本：

$$\text{平均成本}=\frac{\text{总成本}}{\text{产量}}=\frac{\text{固定成本}+\text{可变成本}}{\text{产量}}$$

即平均成本函数（记作AC）：

$$AC=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{C_0+F(Q)}{Q}$$

由上式知，平均成本又分为平均固定成本和平均可变成本。由于固定成本不随产量变化而变化，所以平均固定成本在一定限度内必然随产量增加而减少。由于可变成本是随产量变化而变化，因而平均可变成本将随

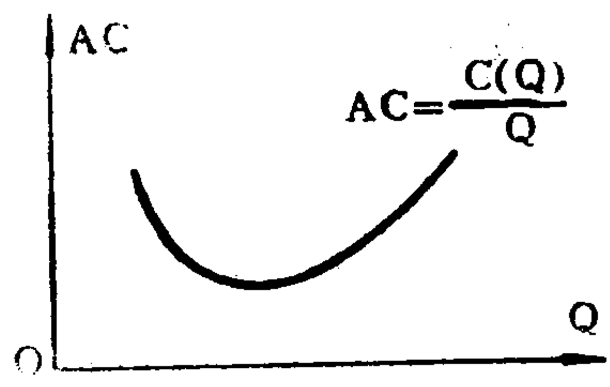

图 17

产量变化而变化。但变化的趋势要根据生产的具体情况而定。产量增加后，最初阶段，平均可变成本可能减少，但产量增加到某一限度后，平均可变成本将会逐渐增加（图17）（在经济学中这称为边际收益递减规律）。这就导致总成本的增加率随着产量的增加而增加。

3 边际成本

在经济学中，边际成本是指生产最后增加的那个单位产品所用的成本。或者说，边际成本就是每增加或减少一个单位产品而使总成本改变的数值，边际成本记作 MC。

$$边际成本=\frac{总成本的改变量}{产量的改变量}=\frac{C(Q_2)-C(Q_1)}{Q_2-Q_1}$$

下列函可数作为成本函数

（1）线性总成本函数（图18）

$C=aQ+b$

其中常数 $a>0$，$b\geqslant 0$。b 显然是固定成本，而 a 是每单位产品的可变成本，这里也可理解为边际成本。

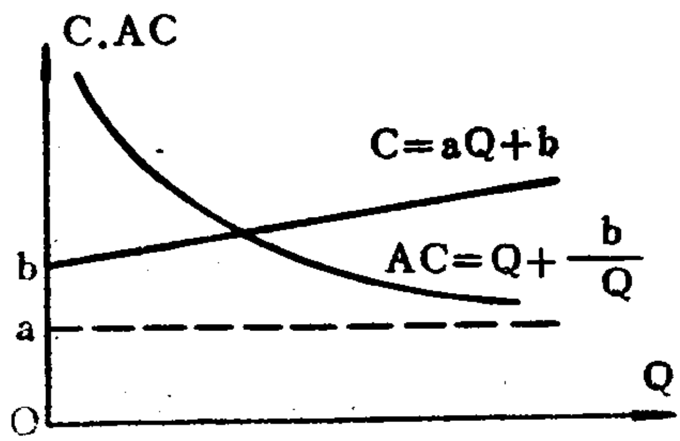

图 18

平均成本函数（图18）

$$AC=a+\frac{b}{Q}$$

（2）二次总成本函数（图19）

$$C=aQ^2+bQ+c$$

其中 $a>0$，$b\geqslant 0$，$c\geqslant 0$。这样的抛物线，顶点在纵轴

的左侧或原点，从而在第一象限是单调增加的，且固定成本非负，C是固定成本。

平均成本函数

$$AC = aQ + b + \frac{C}{Q}$$

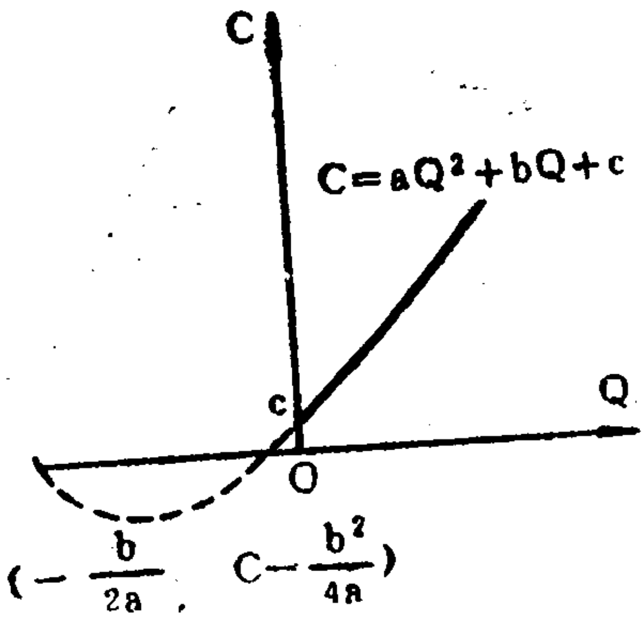

图 19

(3) 三次总成本函数（图20）

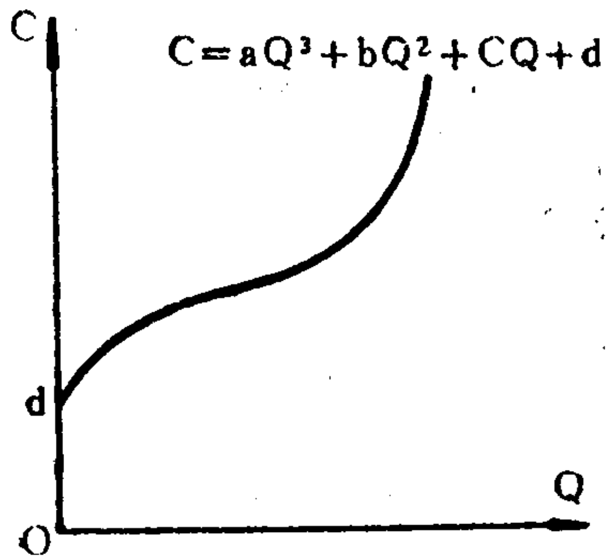

图 20

$$C = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d \quad \text{(注)}$$

其中 $a>0$，$b<0$，$c>0$，$d\geqslant 0$，$b^2<3ac$。

平均成本函数

$$AC = aQ^2 + bQ + c + \frac{d}{Q}$$

（三） 收 益

收益是指生产者出售商品的收入。收益又分为总收益、平均收益和边际收益。

总收益是指将产品出售后所得到的全部收入。平均收益是指生产者出售一定量的商品时，每单位商品所得的平均收入，即平均每单位商品的售价。边际收益是指生产者每多出售单位商品而使总收益增加的数值，也就是最后单位商品的售价。

$$\text{总收益} = \text{平均收益} \times \text{产量} = \text{单位商品售价} \times \text{产量}$$

$$\text{平均收益} = \frac{\text{出售商品的全部收入}}{\text{产量}} = \text{单位商品的售价}$$

$$\text{边际收益} = \frac{\text{总收益的改变量}}{\text{产量的改变量}}$$

下面我们来看总收益函数。

若以产量Q为自变量，总收益R为因变量，则R与Q之间的函数可记作

$$R = R(Q)$$

Q取非负数，且$R|_{Q=0} = R(0) = 0$，即未出售商品时，总

注 a、b、c、d 的约束条件请参看本书第八部分“极值应用问题”。

收益的值为0。

1． 价格不变条件下的总收益函数：

如果不论产量如何增加，商品都以不变的既定价格 p 出售，则总收益函数是（图21）

$$R=P\cdot Q$$

显然，这种情况，单位产品的售价 p 不仅等于平均收益，而且等于边际收益。即

平均收益　　$AR=P$

边际收益　　$MR=P$

2． 价格递减条件下的总收益函数：

如果随着产量增加，单位商品的售价随之降低，这时，需求函数 $Q=\varphi(P)$ 是单调减函数；它的反函数是价格函数 $P=\varphi^{-1}(Q)$，也将是单调减函数。这种情况下的总收益函数（图22）是

$$R=R(Q)=P\cdot Q=\varphi^{-1}(Q)\cdot Q$$

易知，在价格递减条件下，单位商品的售价只等于平均收益，而不等于边际收益。即只有

$$AR=P=\varphi^{-1}(Q)$$

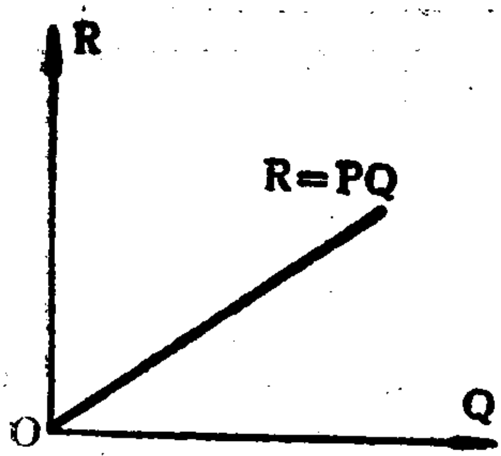

图 21

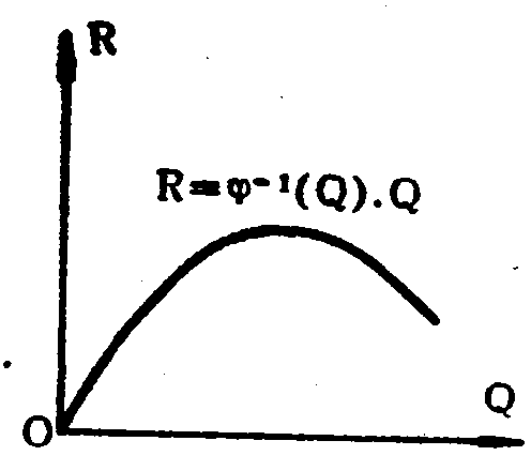

图 22