

北京大学清华大学固体力学丛书

GTLX

固体力学 非线性有限元 引论

殷有泉 著

北京大学出版社
清华大学出版社

内 容 简 介

本书重点介绍了与固体力学非线性问题直接有关的数值计算方法、力学概念和有限元表述等方面的知识。全书共分六章，系统地阐述了非线性代数方程组的数值解法及材料非线性问题和几何非线性问题的基本理论；对固体力学非线性问题的本构方程及大变形下应力和应变的度量等难点做了较为透彻的讲解；并介绍了非线性有限元方法在实际中的某些应用。

本书可作为高等院校力学专业和其它工程科学的研究生、高年级大学生的教材，也可供应用数学专业及地质力学、岩土工程等专业的师生及有关工程技术人员参考。

北京大学清华大学固体力学丛书

固体力学非线性有限元引论

殷有泉 著

责任编辑：李怀玺

北京大学出版社 清华大学出版社出版

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

850×1168毫米 32开本 8印张 200千字

1987年7月第一版 1987年7月第一次印刷

印数：00001—5,600册

统一书号：13209·178 定价：1.65元

前 言

在六十年代，有限元方法在工程应用和数学理论方面在国内和国外都开始了奠基性的工作，受到了普遍的重视。迄今为止，有限元方法有了极大的发展，这表现在大量的文献及各种专用、通用程序的出现和多次有关国际会议的召开。对于固体力学和结构力学来说，非线性问题的有限元分析日臻成熟，目前从国外引进了一些大型的通用程序供工程界使用。然而，掌握非线性有限元方法和原理，使用大型通用程序解算问题，以及读懂期刊上的文献资料，需要人们在数值方法、力学理论和有限元方面具备比以往更深入和广泛的基础知识，这些内容又难于在大学本科的教学计划中全面安排。作者先后在北京大学、中国科学院研究生院为研究生讲授了相应的课程，本书就是由这些课程的讲义改写而成的。

本书的读者最好要具备大学的弹性力学和线性问题有限元方面的基础知识。本书的重点在于介绍与固体力学非线性问题直接有关的数值计算方法、力学概念和有限元表述等方面的知识。全书共分六章。第一章介绍非线性代数方程组的数值解法，无论是材料非线性问题还是几何非线性问题，经过有限元离散，都归结为求解一组非线性代数方程，这方面的知识对读者来说是不可缺少的。第二章和第三章介绍材料非线性问题。第四章和第五章介绍几何非线性问题。这种安排的目的是使学习的难点分散。作者认为，在材料非线性问题的有限元方法中，主要难点是非线性的本构方程，而在几何非线性问题的有限元方法中，主要难点是大变形条件下的应力和应变以及它们的速率的度量。这两个难点分别在第二章和第四章解决。具备了方程组的数值解法、本构方

程、大变形下应力和应变的度量等三方面基础知识之后，掌握非线性有限元方法和原理大概不会有太多困难了。仅对材料非线性问题感兴趣的读者可以完全不看第四、五两章。最后在第六章介绍非线性有限元方法在实际中的某些应用。从宇航、反应堆设计，到机械和岩土工程，非线性有限元都有广泛的应用。由于篇幅所限，很难涉及到所有方面，仅着重介绍一些新开拓的领域和作者所在单位的一些工作。更广泛的应用实例可在许多期刊文献和其它专著中找到。关于梁、板、壳等结构力学问题以及非线性的动力学问题本书完全没有涉及。结构力学和动力学的线性分析的各种有限元表述容易在许多教科书中找到。掌握了本书的基础内容，结构力学的非线性有限元方法也不难掌握。我们期望，读者掌握了本书内容之后，将有助于他们进一步去阅读有关的非线性问题的书刊，并增强使用通用程序解决实际问题的能力。

本书可作为力学专业和其它工程科学的研究生、高年级大学生的45—60学时的相应课程的教材，也可作为广大工程科学的科技人员自学非线性有限元的参考书。

浙江大学丁浩江教授详细地审阅了原稿，并提出不少改进意见，作者的老师王仁教授对本书的出版给予了热情的鼓励和支持，在此表示谢意。

殷有泉

1985年元月于北京大学力学系

目 录

第一章 非线性代数方程组的数值解法	(1)
1.1 直接迭代法	(2)
1.2 牛顿法和修正的牛顿法	(4)
1.3 拟牛顿法	(8)
1.4 增量方法	(16)
参考文献	(22)
第二章 固体力学小变形问题的基本方程	(23)
2.1 小变形情况的几何关系、平衡条件和弹性介质的 本构方程	(23)
2.2 弹塑性介质	(31)
2.3 粘弹性和粘塑性介质	(52)
参考文献	(64)
第三章 材料非线性问题的有限单元法	(65)
3.1 线性弹性问题的有限单元法概述	(65)
3.2 等参数单元	(75)
3.3 非线性弹性问题的有限单元法	(86)
3.4 弹塑性问题的有限单元法	(97)
3.5 粘塑性问题和蠕变问题的有限单元法	(105)
3.6 非线性有限元分析中使用的某些特殊单元	(110)
参考文献	(121)
第四章 固体力学大变形问题的基本方程	(122)
4.1 物体运动和变形的物质描述, 变形梯度	(122)
4.2 格林应变和阿耳曼西应变	(127)
4.3 物体运动和变形的空间描述, 变形率	(134)
4.4 欧拉应力, 拉格朗日应力和克希荷夫应力	(141)
4.5 大变形情况的平衡方程和虚功方程	(149)

4.6 大变形情况的本构关系	(154)
参 考 文 献	(159)
第五章 大变形问题的有限单元法	(160)
5.1 用物质描述方法表述的弹性大变形问题	(160)
5.2 大变形增量问题的 T. L. 方法和 U. L. 方法	(172)
5.3 大变形问题的空间描述方法	(194)
参 考 文 献	(202)
第六章 非线性问题有限单元法的某些应用	(203)
6.1 金属构件的弹塑性有限元分析	(203)
6.2 岩体工程问题的非线性有限元分析	(214)
6.3 断层地震和岩石褶皱的有限元模拟	(223)
参 考 文 献	(239)
名词索引	(241)

第一章 非线性代数方程组的数值解法

不论是材料非线性问题还是几何非线性问题，经过有限元离散之后，它们都归结为求解一个非线性代数方程组

[illegible]

其中 $a_1, \dots, a_N$ 是未知量, $\psi_1, \dots, \psi_N$ 是 $a_1, \dots, a_N$ 的非线性函数。如果引用矢量记号

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_N]^t,$$

$$\mathbf{\Psi} = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N]^t,$$

(t 表示转置)上述方程组可以简单地用一个矢量方程

$$\Psi(a) = 0$$

表示。为了讨论方便，有时我们将这个矢量方程改写为如下形式

$$\Psi(a) \equiv P(a) - R \equiv K(a)a - R = 0.$$

这里 $\mathbf{P}(\mathbf{a})$ 是未知矢量 $\mathbf{a}$ 的一个矢量函数, $\mathbf{K}(\mathbf{a})$ 是一个 $N \times N$ 的矩阵, 矩阵的元素 k_{ij} 是矢量 $\mathbf{a}$ 的函数, 而 $\mathbf{R}$ 是一个已知矢量。在全量问题的有限元的位移表述中, $\mathbf{a}$ 代表未知的节点位移矢量, $\mathbf{P}(\mathbf{a})$ 是内力的等效节点力矢量, $\mathbf{R}$ 是载荷的等效节点力矢量, 而矢量方程 $\Psi(\mathbf{a}) = 0$ 表示关于节点的平衡方程, 其中每一个分量方程对应于一个自由度的平衡。对于增量问题, 我们将 $\mathbf{a}$ 理解为位移增量矢量, 将 $\mathbf{R}$ 理解为增量载荷矢量, 所作的讨论不变。

我们知道，一个线性的代数方程组

$$K^0 \alpha - R = 0$$

(其中 K^0 是 $N \times N$ 的常数矩阵) 可以用各种直接方法毫无困难地求解, 但对非线性方程组 $\Psi(\alpha) = 0$ 则不行。一般来说, 不能期望求得它们的严格解, 通常采用各种数值方法, 用一系列线性方程组的解去逼近所讨论的非线性方程组的解。在这一章将简单介绍有限元分析中常见的各种求解非线性方程组的数值方法。

1.1 直接迭代法

求解非线性方程组的一个最简单的方法是直接迭代法。从下述形式的方程出发

$$K\alpha - R = 0, \quad (1.1.1)$$

其中

$$K = K(\alpha),$$

如果设某个初始近似解为 $\alpha = \alpha^0$, 那么一个近似的矩阵 K 可以得到

$$K^0 = K(\alpha^0),$$

由(1.1.1)可以得到一个改进的近似解

$$\alpha^1 = (K^0)^{-1}R,$$

其中上标“-1”表示矩阵的逆。重复这样的过程, 从第 n 次近似解求第 $n+1$ 次近似解的公式是

$$\begin{cases} K^* = K(\alpha^*), \\ \alpha^{*+1} = (K^*)^{-1}R. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

直到“偏差”

$$\Delta \alpha^* = \alpha^{*+1} - \alpha^* \quad (1.1.3)$$

变得充分小时, 终止迭代。我们说, 这时收敛到问题(1.1.1)的解。为了度量偏差 $\Delta \alpha$ 的大小和判断是否收敛, 可以使用各种各样的范数定义和收敛准则。例如, 范数的定义可取

$$\|\Delta \alpha\| = \max a_i \quad (1.1.4)$$

或

$$\|\Delta \mathbf{a}\| = ((\Delta \mathbf{a})' \Delta \mathbf{a})^{1/2}. \quad (1.1.5)$$

收敛准则可取为

$$\|\Delta \mathbf{a}^*\| \leq \alpha \|\mathbf{a}^*\|, \quad (1.1.6)$$

(α 是事前指定的一个很小的数) 当满足(1.1.6)式时 认为达到收敛, 终止迭代。我们还会注意到, 在迭代方程的每一步, 得到的近似解一般不会严格满足(1.1.1)式(除非收敛发生), 即

$$\Psi(\mathbf{a}^*) = K(\mathbf{a}^*)\mathbf{a}^* - \mathbf{R} \neq 0.$$

因此, 上式也可作为对平衡偏离的一种度量(称为失衡力), 收敛准则可相应地采用

$$\|\Psi(\mathbf{a}^*)\| \leq \beta \|\mathbf{R}\| \quad (1.1.7)$$

(β 是事前指定的一个很小的数)。

对于一个单变量问题的非线性方程, 直接迭代法的计算过程如图1.1所示。这时矢量 $\mathbf{a}$ 和矩阵 K 分别退化为一个标量未知数和它的标量函数。为方便起见, 我们在图上给出的是 $P(a)$ ($= K(a) \cdot a$) 和 a 之间的关系而不是 $K(a)$ 和 a 之间的关系。 $K(a)$ 就是过曲线上点 $(a, P(a))$ 与原点的割线的斜率。图 1.1(a) 和 (b) 分

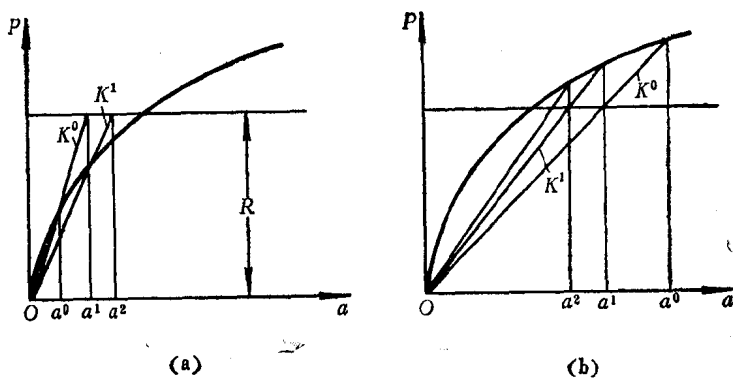


图 1.1

别给出了低于和高于真实解的初始近似解 a^0 的迭代过程。从 a^0 出发，由 P - a 曲线直接给出 K 的对应值 K^0 ，然后从 (1.1.2) 解出 a^1 。从 P - a 曲线确定对应于 a^1 的 K 值 K^1 ，然后求出 a^2 。这个循环过程直到 a^{n+1} 和 a^n 充分接近时为止。这时收敛到真实解。对单变量情况，这种迭代过程是收敛的，但对多自由度情况，由于未知量通过矩阵 K 的元素互相耦合，在迭代过程中可能出现不稳定现象。

1.2 牛顿法和修正的牛顿法

数值求解非线性方程组

$$\Psi(\alpha) = P(\alpha) - R = 0 \quad (1.2.1)$$

的一个最著名的方法是牛顿-芮弗逊 (Newton-Raphson) 方法，简称牛顿法。下面我们来介绍这种方法。

现在设 $\alpha = \alpha^n$ 是方程 (1.2.1) 的第 n 次近似解。一般地，这时

$$\Psi^n \equiv \Psi(\alpha^n) = P(\alpha^n) - R \neq 0. \quad (1.2.2)$$

我们想求方程组 (1.2.1) 的更好的近似解，设修正值为 $\Delta\alpha^n$ ，这个新的近似解为

$$\alpha = \alpha^{n+1} = \alpha^n + \Delta\alpha^n. \quad (1.2.3)$$

将 (1.2.3) 代入 (1.2.1) 并在 $\alpha = \alpha^n$ 附近将 $\Psi(\alpha^n + \Delta\alpha^n)$ 泰勒 (Taylor) 展开，每个分量方程为

$$\begin{aligned} \Psi_i(a_1^{n+1}, \dots, a_N^{n+1}) &\equiv \Psi_i^n + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial a_j} \right)^n \Delta a_j + \dots, \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

引用雅可比 (Jacobi) 矩阵

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}}\right)^t \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial a_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial a_N} \end{bmatrix} [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N] \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \cdot \Psi^t, \quad (1.2.4)$$

上式可用矩阵形式写为

$$\Psi^{n+1} = \Psi^n + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}}\right)^n \Delta \mathbf{a}^n + \dots,$$

其中

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}}\right)^n = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}}\right)_{\mathbf{a} = \mathbf{a}^n}.$$

在上面展开式中仅取到线性项，并引入记号

$$K_T^n = K_T(\mathbf{a}^n) \equiv \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}}\right)^n,$$

得

$$0 = \Psi(\mathbf{a}^n + \Delta \mathbf{a}^n) \approx \Psi^n + K_T^n \Delta \mathbf{a}^n,$$

从而解出修正量 $\Delta \mathbf{a}^n$ 为

$$\Delta \mathbf{a}^n = -(K_T^n)^{-1} \Psi^n = (K_T^n)^{-1} (\mathbf{R} - \mathbf{P}^n). \quad (1.2.5)$$

上式的最后一个等号利用了(1.2.2)式，并且 $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}(\mathbf{a}^n)$ 。由于确定 $\Delta \mathbf{a}^n$ 仅使用了泰勒展开式的线性项，按(1.2.5)和(1.2.3)得到的新的解 $\mathbf{a}^{n+1}$ 仍是一个近似解，然而是一个改进了的近似解。这样，牛顿法的迭代公式为

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{a}^n = -(K_T^n)^{-1} \Psi^n = (K_T^n)^{-1} (\mathbf{R} - \mathbf{P}^n), \\ K_T^n = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}}\right)^n = \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{a}}\right)^n, \\ \mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n + \Delta \mathbf{a}^n. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

关于牛顿法(以及后面讨论的各种迭代法方案)的收敛准则问题的讨论，与前面的直接迭代法完全相同，不再赘述。

一个单变量的非线性问题，用牛顿法求解的过程如图1.2所示，其中(a)和(b)分别对应于低于和高于真解的初始近似值的情况。这时， $K_T(a)$ 是 P - a 曲线上过点 $(a, P(a))$ 的切线斜率。假设了初始近似解 a^0 之后，就可根据 P - a 曲线确定它所对应的

$$K_T^0 = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial a} \right)^0 = \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right)^0,$$

然后求出 a^0 的修正值 Δa^0 ，这样就得到了新的近似值 $a^1 = a^0 + \Delta a^0$ 。反复这样做，直到 Δa^* 或 Ψ^* 充分小时，计算过程终止。

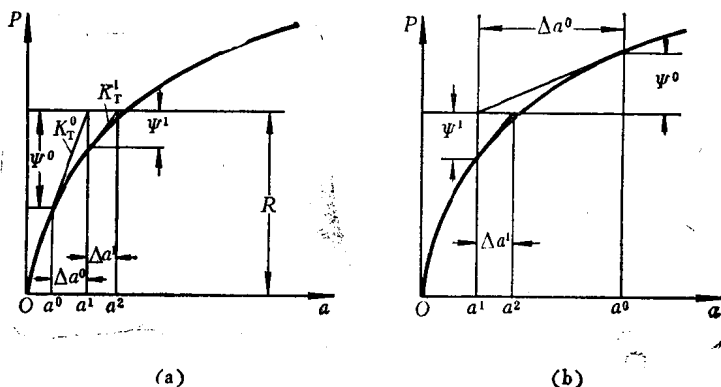


图 1.2

牛顿法的收敛性是好的。在某些非线性问题(例如，理想塑性和软化塑性问题)中使用牛顿法，在迭代过程中的

$$K_T = \frac{\partial \Psi}{\partial a}$$

可能是奇异的或病态的，于是对 K_T 求逆会出现困难。为了克服这一点，我们可以引进一个阻尼因子 μ^* ，以使矩阵 $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial a} \right)^* + \mu^* I$ 成为非奇异的或者使它的病态性减弱(这里的 I 是 $N \times N$ 阶的单位矩阵)。这时在牛顿法中用下式代替(1.2.5)式

$$\Delta a^* = - (K_T^* + \mu^* I)^{-1} \Psi^*. \quad (1.2.7)$$

μ^* 的作用是改变矩阵 K_T^* 的主对角元素。但是，当 μ^* 取得很大时，收敛速度将变慢。当 $\mu^* \rightarrow 0$ 时，(1.2.7) 式趋于 (1.2.5) 式，这时有最快的收敛速度。

使用直接迭代法和牛顿法求解非线性方程组时，在迭代过程的每一步都必须重新计算 K^* 或 K_T^* 并求它的逆(见(1.1.2)和(1.2.6)式)。如果在牛顿法中，在计算的每一步内，矩阵 K_T^* 均用初始近似解 α^0 计算，即用

$$K_T^0 = K_T(\alpha^0)$$

代替

$$K_T^* = K_T(\alpha^*),$$

在这种情况下，仅第一步迭代需要完全求解一个线性方程组，例如将 $K_T(\alpha^0)$ 三角分解并存储起来，而以后各步迭代中采用公式

$$\Delta \alpha^* = -(K_T^0)^{-1} \Psi(\alpha^*), \quad (1.2.8)$$

则只需按上式右端项中的 $\Psi(\alpha^*)$ 进行回代就行了。这种方法叫修正的牛顿法。

使用修正的牛顿法求解非线性方程组，虽然每一步迭代所花费的计算时间较少，但迭代过程的收敛速度降低了。对单变量问题使用修正牛顿法的计算过程如图 1.3 所示，具体的做法与前面图 1.2 介绍的牛顿法相似。

为了提高修正牛顿法的收敛速度可以采用某些过量修正技术。在按 (1.2.8) 式计算出 $\Delta \alpha^*$ 后，新的近似解矢量由下式给出

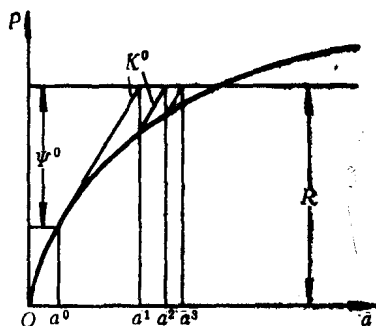


图 1.3

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + \omega^k \Delta \alpha^k, \quad (1.2.9)$$

其中 ω^k 是大于 1 的正数, 它称为过量修正因子。有人还用 一个 对角矩阵代替 ω^k 。在某些非线性有限元分析中曾经使用过这种 固定的 ω^k 值的加速方法。这还可使我们想到, 借用于一维搜索 办法可能取得更好的效果。我们这时将 $\Delta \alpha^k$ 看做 N 维空间中的 搜索方向, 我们希望在該方向上找到一个更好的近似值, 即找到 一个在 (1.2.9) 式中的最好的 ω^k 值。虽然沿着这一方向, 不能期 望求得精确解 (使 $\Psi(\alpha) = 0$ 的解), 但我们可以选择因子 ω^k (在搜 索问题中称为步长因子), 使 $\Psi(\alpha)$ 在搜索方向上的分量为零, 即

$$(\Delta \alpha^k)^T \Psi(\alpha^k + \omega^k \Delta \alpha^k) = 0. \quad (1.2.10)$$

(1.2.10) 是一个关于 ω^k 的单变量非线性方程。通常用一些比较 简单的方法来估算出 ω^k 的大小。

另外, 在实践中使用修正牛顿法时, 可以在每经过 k 次迭代 后再重新计算一个 K_T , 即在 (1.2.8) 式中将 K_T^0 改为

$$K_T^k = K_T^j = K_T(\alpha^j), \quad j = k, 2k, \dots, \quad (1.2.11)$$

这样也可达到提高收敛速度的效果。

1.3 拟牛顿法

拟牛顿法的主要思想是在每次迭代后用一简单的方式修改矩 阵 K , 既不像牛顿法那样在每一次迭代之后要完全重新计算一个 新的矩阵 K , 也不像修正牛顿法那样不改变矩阵 K 。在拟牛顿法 中, 矩阵 K 的修改首先要满足下述的拟牛顿方程

$$K^{k+1}(\alpha^{k+1} - \alpha^k) = \Psi(\alpha^{k+1}) - \Psi(\alpha^k). \quad (1.3.1)$$

在单变量情况下, 方程 (1.3.1) 中的 K^{k+1} 是差商

$$\frac{\Psi(\alpha^{k+1}) - \Psi(\alpha^k)}{\alpha^{k+1} - \alpha^k}.$$

它是导数 $(\partial\Psi/\partial\alpha)_{\alpha=\alpha^n}$ 的近似表达式。对于一般的 N 个自由度情况, (1.3.1) 式具有相似差商的性质(或称为拟牛顿性质), K^{n+1} 是雅可比矩阵 $\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}$ 的近似表达式。

其次, 我们希望 K^{n+1} 能表示为 $K^n + \Delta K^n$ 的形式,

$$K^{n+1} = K^n + \Delta K^n, \quad (1.3.2)$$

其中修正矩阵 ΔK^n 的秩为 m , $m \geq 1$ 。很明显, 我们可以选择的具体方案是很多的。经常取 $m=1$ 或 2 , 也就是, 修正矩阵通常取为 1 秩或 2 秩的。因为任何一个秩为 m 的 $N \times N$ 矩阵总可以表示为 $U^n(V^n)'$ 的形式, 其中 U^n 和 V^n 均是秩为 m 的 $N \times m$ 阶矩阵。这样, (1.3.2) 式可以表示为

$$K^{n+1} = K^n + U^n(V^n)'. \quad (1.3.3)$$

于是, 拟牛顿法的迭代公式可一般地表示为

$$\begin{cases} \alpha^{n+1} = \alpha^n + \Delta\alpha^n, \\ \Delta\alpha^n = -(K^n)^{-1}\Psi^n, \\ K^{n+1}(\alpha^{n+1} - \alpha^n) = \Psi^{n+1} - \Psi^n, \\ K^{n+1} = K^n + \Delta K^n. \end{cases} \quad (1.3.4)$$

从 (1.3.3) 式出发, 还可以建立关于 K^{-1} 的递推公式。这只要利用下面的塞尔曼-莫里逊-伍德布尔哥(Sherman-Morrison-Woodburg)公式:

$$(K + UV')^{-1} = K^{-1} - K^{-1}U(I + V'K^{-1}U)^{-1}V'K^{-1},$$

就可得到与 (1.3.4) 互逆的拟牛顿迭代算法

$$\begin{cases} \alpha^{n+1} = \alpha^n + \Delta\alpha^n, \\ \Delta\alpha^n = -(K^{-1})^n\Psi^n, \\ (K^{-1})^{n+1}(\Psi^{n+1} - \Psi^n) = \alpha^{n+1} - \alpha^n, \\ (K^{-1})^{n+1} = (K^{-1})^n + \Delta(K^{-1})^n, \end{cases} \quad (1.3.5)$$

其中 $\Delta(K^{-1})^n$ 也是秩为 m 的修正矩阵。

现在进一步讨论如何具体构造修正矩阵 ΔK^* 或 $\Delta(K^{-1})^*$ 的问题。这里我们仅讨论秩 2 算法，也就是修正矩阵 ΔK^* 或 $\Delta(K^{-1})^*$ 的秩 $m=2$ 的情况。一般地，一个 $N \times N$ 阶的秩 2 矩阵可表示为

$$UV^t = [u_1, u_2] \begin{bmatrix} v_1^t \\ v_2^t \end{bmatrix} = u_1 v_1^t + u_2 v_2^t,$$

其中 u_1, u_2, v_1 和 v_2 均是 N 维矢量。这样，秩 2 的矩阵可以分解为两个秩 1 矩阵 $u_1 v_1^t, u_2 v_2^t$ 之和。类似地， ΔK^* 和 $\Delta(K^{-1})^*$ 可以分别表示为

$$\Delta K^* = u_1^*(v_1^*)^t + u_2^*(v_2^*)^t, \quad (1.3.6)$$

$$\Delta(K^{-1})^* = w_1^*(z_1^*)^t + w_2^*(z_2^*)^t. \quad (1.3.7)$$

为了确定 ΔK^* 和 $\Delta(K^{-1})^*$ ，只需将

$$K^{*+1} = K^* + u_1^*(v_1^*)^t + u_2^*(v_2^*)^t$$

$$\text{和} \quad (K^{-1})^{*+1} = (K^{-1})^* + w_1^*(z_1^*)^t + w_2^*(z_2^*)^t$$

分别代入拟牛顿方程

$$K^{*+1} \Delta \alpha^* = \Delta \Psi^* \quad (1.3.8)$$

和

$$(K^{-1})^{*+1} \Delta \Psi^* = \Delta \alpha^*, \quad (1.3.9)$$

$$\text{其中} \quad \Delta \alpha^* \equiv \alpha^{*+1} - \alpha^*, \quad \Delta \Psi^* \equiv \Psi^{*+1} - \Psi^*.$$

为了确定 ΔK^* ，由(1.3.6)和(1.3.8)式有

$$u_1^*(v_1^*)^t \Delta \alpha^* + u_2^*(v_2^*)^t \Delta \alpha^* = \Delta \Psi^* - K^* \Delta \alpha^*.$$

若 $(v_1^*)^t \Delta \alpha^* \neq 0$ ， $(v_2^*)^t \Delta \alpha^* \neq 0$ ，此时满足(1.3.8)式的 u_1^* 和 u_2^* 可取为

$$u_1^* = \frac{\Delta \Psi^*}{(v_1^*)^t \Delta \alpha^*}, \quad u_2^* = \frac{-K^* \Delta \alpha^*}{(v_2^*)^t \Delta \alpha^*}.$$

将它们代回(1.3.6)式，即得

$$\Delta K^* = \xi_1 \Delta \Psi^* (v_1^*)^t + \xi_2 K^* \Delta \alpha^* (v_2^*)^t, \quad (1.3.10)$$

其中

$$\xi_1 = \begin{cases} \frac{1}{(v_1^*)^t \Delta \alpha^*}, & \text{当 } \Delta \alpha^* \neq 0, \\ 0, & \text{当 } \Delta \alpha^* = 0; \end{cases}$$

$$\xi_2 = \begin{cases} -\frac{1}{(v_2^*)^t \Delta \alpha^*}, & \text{当 } \Delta \alpha^* \neq 0, \\ 0, & \text{当 } \Delta \alpha^* = 0. \end{cases}$$

若 $(K^{-1})^*$ 存在, 用完全相似的方法可以得到与 (1.3.10) 互逆的修正矩阵 $\Delta(K^{-1})^*$

$$\Delta(K^{-1})^* = \eta_1 \Delta \alpha^* (z_1^*)^t + \eta_2 (K^{-1})^* \Delta \Psi^* (z_2^*)^t, \quad (1.3.11)$$

其中

$$\eta_1 = \begin{cases} \frac{1}{(z_1^*)^t \Delta \Psi^*}, & \text{当 } \Delta \Psi^* \neq 0, \\ 0, & \text{当 } \Delta \Psi^* = 0; \end{cases}$$

$$\eta_2 = \begin{cases} -\frac{1}{(z_2^*)^t \Delta \Psi^*}, & \text{当 } \Delta \Psi^* \neq 0, \\ 0, & \text{当 } \Delta \Psi^* = 0. \end{cases}$$

上面得到的修正矩阵 (1.3.10) 和 (1.3.11) 显然是满足拟牛顿方程 (1.3.8) 和 (1.3.9) 的。此外, 当 v_1^* 和 v_2^* , z_1^* 和 z_2^* 为线性无关时, 这些修正矩阵是秩 2 的。

现在我们进一步讨论 (1.3.11) 式 ((1.3.10) 式也可完全相似地讨论)。为了使它具有更普遍的意义, 考虑做如下变换

$$(\bar{z}_1^*)^t = \frac{(z_1^*)^t}{(z_1^*)^t \Delta \Psi^*}, \quad (\bar{z}_2^*)^t = \frac{(z_2^*)^t}{(z_2^*)^t \Delta \Psi^*},$$

这时显然有

$$(\bar{z}_1^*)^t \Delta \Psi^* = (\bar{z}_2^*)^t \Delta \Psi^* = 1. \quad (1.3.12)$$

于是 (1.3.11) 式为

$$\Delta(K^{-1})^* = \Delta \alpha^* (\bar{z}_1^*)^t - (K^{-1})^* \Delta \Psi^* (\bar{z}_2^*)^t. \quad (1.3.13)$$