吴学谋著

逼近转化论与数学中的泛系概念

APPROXIMATION TRANSFORMATION THEORY AND THE PANSTEMS CONCEPTS IN MATHEMATICS

GSDM

吴学谋著

逼近转化论
与数学中的泛系概念

APPROXIMATION TRANSFORMATION THEORY AND THE PANSTEMS CONCEPTS IN MATHEMATICS

湖南科学技术出版社

逼近转化论与数学中的泛系概念
吴学谋著
责任编辑：曾平安
封面设计：郑大正
*
湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷
*
1984年12月第1版第1次印刷
开本：850×1168毫米 1/32　印张：13.25　插页：1　字数：349,000
印数：1——3,600
统一书号：13204·106　　定价：4.70元

前　言

作者从事数学研究已经三十余年了。本书是作者在长期研究中所得到的一部分数学新成果的总结。它是用一种近乎统一的想法对数学多种专题进行分析的尝试。

逼近转化论与泛系方法论是五十年代和七十年代，在我国先后发展起来的两个横断性数学新研究课题。作者是创始人之一。在著作中，作者发表了一些不同于国际文献上的新研究成果，得到了许多新型的定理，同时亦用新观点、新方法或新形式推广、补充或发展了国际上几十种已有定评的研究。通过反复地修改、充实和提高。但愿作者的劳动化作一支歌，加入初学者的合唱，献给祖国科学的春天！

目　录

绪论

数学中的泛系概念

科学技术的发展，促进了学科的急剧分化，也促进了学科在新的基础上的辩证综合．不受传统分题的束缚，从不同的角度考虑学科的交缘或统一，日益得到了广泛的重视．现代科学技术的辩证综合倾向与整体化趋势，大大促进了许多新的综合性学科、交缘学科、横断学科、软科学的诞生与发展．

现在人们已认识到，广义的系统、转化、对称及其关系是涉及许多学科分支和事物机理的概念．它们的数学研究有希望把许多科学原理、概念和方法联系起来．这是涉及数理科学、系统科学与方法论的一种交缘或横断性的研究．这种跨学科的多面向的研究，现在就叫做泛系方法论，也叫做泛系理论或泛系分析．

事物集E及其一定的联系H(也叫泛结构，记为$H\subset J_M[E)$，M为参变集）形成的统一体 $S=(E,H)$，就是形式泛系．用它可以描述广义的系统、转化与对称．泛系或者指形式泛系，或者指广义的“系统·转化·对称”的统称，但是更主要的是作为一种研究群的标名．广义的系统与转化概念侧重事物的联系与运动．广义的对称或泛对称概念侧重的是变与相对不变、自由与约束的联系与转化．像联系运动一样，泛对称也可证明是事物中普适的概念．原型与模型、形式与内容、质与量、可能与现实、一般与特殊、抽象与具体、肯定与“否定的否定”等等，这些相当普遍的关系的某些方面都具有泛对称性．一般的系统与转化概念本身就潜含了泛对称性．事物关系中的一些基本关系有宏微、动静、局整、

形影、因果、观控、串并、模拟、生克、泛序(包括优劣与主次)、集散、异同等，它们简称为泛系关系，它们的某些形式往往可转化为泛对称．与逼近论和拓扑学有关的基本概念是远近关系，它可用泛系关系从不同角度进行模拟，因而也与泛对称的概念联系起来．另外，不同泛对称的转化可看成一种更高级形式的泛对称，叫做 N 泛对称．它是许多科学原理、规律与方法表现的共性形式．

数学是辩证的辅助工具和表现方式，是研究事物的形式与量的侧面的科学．学科间交流的活跃、不同领域材料的综合整理，向科学本身提出了许多本质上的新问题，也刺激了数学对新的基础的研究．数学也像其它学科一样，其中绝大部分内容都是在研究某些系统、转化与泛对称的内容，只不过更侧重形式与量的方面和更发挥了传统数学抽象性的特点罢了．数学与泛系理论从不同的角度、不同的剖面来分析事物，并横贯了不同的科学问题．另外，泛系理论也对数学的不同研究提出了一些新的、近乎统一的看法．

(1) 几乎现代所有的数学研究都是研究形式泛系 (E,H)，特别是H为一级或二级联系或关系，$H\subset G[E)$，或$H\subset G^2[E)$（具体定义见第九章）．更多地是研究一种泛代数系统：$H\subset W\uparrow G$，$G=\cup E\uparrow I_\lambda$，$I_\lambda$为参量集族．

(2) 大多数重要的数学概念与定理表现为泛对称，特别是 N 泛对称．例如，Nöether 型定理研究规范不变性与守恒性两类泛对称的转化；动力体系的一般理论中，主要研究的各种稳定性与周期性（两类泛对称）的转化等．拓扑学中的基本转化是连续映射与开映射，它们分别表征对开集的赋形守恒性与投影守恒性两类泛对称。几乎一切重要的拓扑学定理，都可表现为由上述两类泛对称诱导出的其它类型的泛对称．例如，开集赋形守恒导致各种分离性、紧致性、连通性、收敛性、闭性、闭包性、局部联通性、局部凸性等，都是投影守恒的．在一定条件下，也导致闭性等赋形守恒，并对自我映射保证不动点存在，等等．代数学与泛

系分析也证明了一系列的守恒性定理与N泛对称定理。而绝大多数的数学推广都表现为泛系模拟与部分保构扩展这类泛对称。

（3）泛系关系的研究与应用，涉及当代数学的所有专题。而形影关系与局整关系又是生成各种数学结构的基础的关系，特别形影关系的研究与应用，部分统一了诸如抽象代数、数理逻辑、积空间理论、Fuzzy 集论的许多问题，也涉及超复数及某些分析概念的推广。

（4）泛系理论引入了泛系变量的概念，它是一种特化的泛对称性。它既是实函数论中的可测函数；又是拓扑学中的连续映射；还是概率论中的随机变量；也是Fuzzy集论中的乏晰变量与乏晰集的一种概括。

（5）一种广义的形式化可定义为共同的影系统的建立或提取。这对数学的特点提出了一种新的解释模型。

（6）泛系理论引入的泛模拟概念代表了当代数学研究中非常广泛的一类转化。

在历史上，欧氏几何、笛卡儿解析几何、数理逻辑、集合论、Klein 的 Erlangen 提纲、Birkhoff 的格论、Bourbaki 学派的结构观、范畴论、泛函分析、代数模论、泛代数学等，都是从不同角度对数学研究进行统一或部分的统一的理论。而泛系理论则考虑了一些新的观点，同时研究了许多不专属纯数学的问题。

本书具体地研究了许多数学专题，它们都可由与泛系理论相联系的一种近乎统一的想法串联起来。

空间、代数结构、变域等都属于一般的系统；函数、算子、映射、空间的变换、性质与关系的变动等，都属于事物的转化；而逼近、误差、稳定性、连续性、有界性、一致性、逼近度与残缺度、解析性与保角性、方程、嵌入限定与扩展、协调与周期性等等，都在不同形式下含有泛对称。这些系统之间的转化，以及转化的转化和泛对称的转化，就是横贯不同专题而近乎统一的主题。按传统分题来说，本书有属于泛函分析的新的探索；有差分方程、限单元法、样条函数逼近、变分方法等数值数学的一些新

的基础研究；有解析函数与等角写象的边界性质和泛函空间的嵌入定理；有复函数构造具体转化原则的推导和高维多项式逼近的探讨；也有代数系统和泛系理论本身某些概念的介绍。

本书中，我们引入了赋半序范空间的概念。它以赋范空间及拓扑空间为特例，并兼顾两者的特点，研究了算子方程及空间转化的稳定性问题，求得了方程或空间转化的扰动误差（原收敛性，原误差，包括截断误差和舍入误差的概念）到方程解的误差（次收敛性、次误差）的定量转化关系。对方程、空间转化、算子、解等，在一定条件下都可用半序空间的元来赋范。这时，对于线性赋半序范空间的线性转化族的一致连续性与一致有界性等价，而稳定性与逆转化一致有界性等价，并且次误差与原误差是同级的。对于线性拓扑空间之间的线性转化族，建立了原收敛性、稳定性、次收敛性、逆一致有界性等泛对称的转化关系。对于差分方程及泛函方程的稳定性，以 Neйmann, Lax, Richtmyer, Mignot, Канторович, Люстерник, Мейман, Рябенький, Филиппов 的已知各种结果为特例，并把各种稳定性以及有关证明统一起来。

完全性与封闭性是两种泛对称性，Banach定理指出它们是等价的。推广于赋半序范空间线性半群不完全、不封闭的情况，新的泛对称性用残缺度与逼近度来度量，本书证明了它们是相等的。

我们还精密化了Михлин关于Галёркин方法的收敛性定理，并求出了误差估计。在相同条件下，按能量范数，Галёркин解的误差与能量最优逼近度是同级的，相当于两种泛对称度量的转化关系。对特征值也得到类似的结果，并且讨论了 $A_0^{-1}K$ 型算子的全连续性及对一些用于微分方程的条件，对一般椭圆型方程的估计比Ильин的结果好。

算子变分、互易集与互易算子、凸算子等概念的引入，使古典变分法得到了进一步的讨论。所得到的一些关系，即使在传统泛函的情况下，也是新的。且把通常二次泛函的极值定理，推广到了

凸算子。我们还引入了算子方程新型的H广义解，它与变分问题有一种自然的联系，这可看成是另一组泛对称之间的相互转化。这种转化还可以把单边变分原理概括进来。

Banach代数和赋范环可看成一种数域的推广，是一种新的超复数。在其上的非线性泛函分析，可因这种观点的引入而带来某些新的面貌。它引导到一类算子方程的解法，并在新的形式下继承了古典分析与古典函数论的某些内容。其中，环的可交换性、微分或变分的方向无关性、积分的路径无关性和某些方程的可解性，这四种泛对称有一种内在的联系。赋范环微积的进一步推广即为泛环和解析泛系逻辑。

本书的一个中心是基于MSP转化原理建立一种可叫做逼近转化分析的理论，它是一种特化的、有丰富具体内容的泛对称转化分析。P 转化原理实际上是许多（不同范数意义下的误差）转化定理、反定理（包括某种 Paley-Wiener 型定理与抽样定理）和许多嵌入定理（包括有关函数的扩展及边界性质）的有关算法的一种统一概括。例如在一定条件下，由 $\|f-p_\lambda\|$ 的已知估计即可对f所对应或等价的（可能属于另一空间的）某f_* 的 $\|f_*-Hp_\lambda\|_*$ 或$\|f_*\|_*$进行估计。H 为某种运算或算子，$\|\cdot\|_*$为另一对应范数。

基于MSP转化原理及其它具体的分析，从新探讨了多变量实函数构造、泛函空间的嵌入不等式、高维直交多项式级数、三角插补等问题。除得到许多新型的结论外，我们还可得到Никольский, Бернштейн, Тиман, Ильин, Харрик 及 Zygmund, Marcinkiewicz 等的一些定理的改进与推广。其中有一类反定理不是由连续模的形式给出的，而且三角插补还给出了应用第四转化引理的典型例子。

本书还发展了带域调和分析。包括带域解析函数的边界性质；复数域上的 Fourior 变换；解析概周期函数；整函数的逼近和用逼近论方法证明嵌入不等式等问题。基于转化概念来研究带域函数是一种新的作法， 这一工作包括得到 Besicovitch, Paley, Wiener, Wyle 和 Степанов 等的一些结果的改进与推广。

现代为计算数学及函数论的基础研究所关注的有限单元法与Spline逼近，都是一些特殊的分区多项式逼近。我们可以利用转化原理来研究高维分区多项式逼近在各种意义下的误差，同时可得到高维Taylor级数余项估计用连续模来表示的新形式。在此基础上，可解决 Walsh 和 Ahlberg 所提出的Spline误差问题，而且比预计的更确切。

本书许多结果是为了建立复函数构造的转化理论而得到的。从而研究了一系列关于解析函数和等角写像的边界性质和嵌入不等式，且得到许多新的 Марков 型定理。将这些定理可用于转化定理与反定理，而许多反定理又产生了新型的嵌入定理和函数延拓定理。书中还有一类直接定理和反定理，也是不用连续模形式给出的。另外，我们推广了一种插补方法，发展了分区有理多项式逼近与统一逼近多项式。利用边界性质的具体结果与转化原理，我们建立了 Faber 级数的误差转化分析。包括多连通集或不连通集上统一逼近在不同泛函空间中的误差估计。书中另外一些结果包括下列工作的推广与补充：Келдыш 和 Мергелян在逐段光滑区域(或曲线)和一般Jordan区域上的直接定理，及关于 Bieberbach 多项式的误差估值；Walsh，Sewell，Russell 关于误差转化，及用有界函数来逼近的工作；Смирнов，Carleman 与 Szegö 关于直交多项式级数的研究；Kellogg 与 Seidel 关于等角写像的定理；Montel，Tsuji和Loomis关于正规族和调和函数的结果；Fatou关于 Poisson 积分的定理；Babuska 的不等式；Cauchy 型积分的定理；用非多项式、非指数型函数逼近的研究；等等。

本书也部分地简括和介绍了泛系理论的概念与五十多个定理。并发展了泛系逼近的概念。本书将传统的逼近推广为泛模拟之类的广义逼近；将逼近的程度变为了某些性状或结构的相对保持，因而变成了泛对称概念的特殊形式。且逼近的转化变成了 N 泛对称的模式。在这种框架下，我们把重要的隐函数定理发展为隐泛系定理；把不动点定理发展为不动泛系定理；并研究有微结构的不动泛系。同时，发展了泛权网络分析与突变分析；推广了

Kakutaki定理、Dilworth 型定理、Bellman原理与大系统的解耦分解原理等等. 另外，由于泛系方法论在学科发展与应用中日益显得重要，我们在附录中定性地综述了泛系方法论的背景、内容与意义。

第 一 章

序结构　泛对称与转化关系

§1. 半序空间的一些基本概念

序结构或半序结构是具有自返性($x\leqslant x$)、反对称性（$x\leqslant y$, $y\leqslant x$，则$x=y$)、传递性（$x\leqslant y$，$y\leqslant z$，则$x\leqslant z$）的一种二元关系$\leqslant$。

设E为域K上的线性空间，其上定义了半序结构$\leqslant$。又设域K也是半序的，$\lambda\geqslant 0$，$\lambda\in K$有意义。若$x\to x+z$和$x\to\lambda x$是保序的，则E叫做半序线性空间。

E中的零元记为θ_E，有时也简记为O(E_ϱ的零元有时记为θ_ϱ或O_ϱ)，则E中$\geqslant\theta_E$的元形成一锥。反之，任何E中之锥也引伸出某种半序关系，这就是半序线性空间的锥序转化关系。锥是一种变域的约束，锥与序表述一种特定的泛对称。

若对于任意的x，$y\in E$，存在$z\in E$，使得$x\leqslant z$，$y\leqslant z$，并且如果$x\leqslant u$，$y\leqslant u$，$u\in E$，必然$u\geqslant z$。这时半序线性空间E就叫做有限备的，并记$z=x\vee y$或$z=\sup(x,y)$。同时，称z为x与y的结或端；并定义$x_+=x\vee 0$，$x_-=(-x)\vee 0$，$|x|=x\vee(-x)$，分别叫做x的正部、负部和绝对值。

对于有限备的半序线性空间E中任意一组元素$(x_t)_{t\in I}$（I为任意标号集)，满足关系式$u\geqslant x_t$，$t\in I$（相应地$u\leqslant x_t$)，则$u\in E$叫做（x_t）的上界（相应地叫做下界)。若（x_t）有上界，并且存在

最小的上界x^*，则x^*叫（x_t）的结或上端．类似地定义交或下端x_*，并表成

$$x^* = \bigvee_{t\in I} x_t = \sup_{t\in I} x_t, \quad x_* = \bigwedge_{t\in I} x_t = \inf_{t\in I} x_t.$$

若对任何有界的（x_t）都有上端，则E叫做备的半序线性空间。当I为可数集时，则E叫做σ备的半序线性空间。

若I为定向半序集，$(x_t)\in(\uparrow_t)$，$(x_t)\in(\downarrow_t)$分别表示（x_t）对t是升定向列和降定向列。一般地，$(f)\in(\uparrow_{(I)}, \downarrow_{(J)})$表示$(f)$对定向标号集族（$I$）中每个标号是升定向的，而对（$J$）中每一标号是降定向的。例如$(f)\in(\uparrow_{x,y}, \downarrow_z)$表示依赖于定向标号$x$，$y$，$z$的元素族（$f$）对$x$，$y$是升定向的，而对$z$是降定向的。

若$(x_t)\in(\uparrow_t)$，$\sup x_t = c$，则记$x_t\uparrow c$。类似定义$x_t\downarrow c$。

若有$\varepsilon_t\downarrow 0$，$|x_t - x_0|\leqslant\varepsilon_t$，则称（$x_t$）为（0）敛于$x_0\in E$，并记为（0）－$\lim\limits_{t\in I} x_t = x_0$或$x_t\xrightarrow{(0)} x_0$。若（0）极限存在，它必是唯一的。

E中有上下界的集也简称是（0）有界的。对于σ备的E，可像通常分析一样建立（0）上极限与下极限。而且，可证有（0）极限的充要条件是（0）上下极限相等；另一充要条件是Cauchy判别法成立：（0）— $\lim\limits_{n,m\to\infty}|x_n - x_m| = \theta_E$。

可以像传统数学分析一样，建立级数收敛和函数连续性的概念，也可以讨论在测度空间中取值于有限备或σ备的半序线性空间的抽象函数的积分。

设（ε）是有限备的半序线性空间E中某一正元素族，I为某定向序集，（x_t）为（ε）收敛于$x_0\in E$。指对任何给定的$\varepsilon\in(\varepsilon)$，存在$t_0 = t_0(\varepsilon)\in I$，当$t\geqslant t_0$时，有$|x_t - x_0|\leqslant\varepsilon$。这时记（$\varepsilon$）－$\lim x_t = x_0$或$x_t\xrightarrow{(\varepsilon)} x_0$。显然，这种形式的极限不一定是唯一的。在一定条件下，例如，$\inf(\varepsilon) = \theta_E$，则可保证唯一性。

有限备的线性半序空间E中的集合M叫做有界的(ε)。指对于任何$e\in(\varepsilon)$，存在$-a\in K$，$a>0$，$a = a(\varepsilon)$，使得对$x\in M$有$|x|<$

$\alpha\varepsilon$，且α与x无关。

若要讨论几组不同的(ε)时，我们将在(ε)周围标以适当的记号以示区别。

§2. G空间 等价定理与线性半群

2.1 设E为某一集合，F为某一有限备半序线性空间，$\rho: E^2 \to F$对称（即$\rho(x,y)=\rho(y,x)$），则三元组（E,F,ρ）或E称为G空间或半序距离空间。这时F中的(0)收敛与（ε）收敛概念以及有界概念就可引伸出E中相应的概念。例如，x_n，$y\in E$，$(0)-\lim x_n=y$，是指$(0)-\lim\rho(x_n,y)=\theta_F$。

若$\rho\geqslant 0$，则E叫G^+空间。若$\rho(x,y)=\theta_F$与$x=y$等价，则E叫G^{++}空间。

G空间是一类与一般拓扑空间一样广泛的系统，而且一般不能由后者包括。G空间有某种度量，有某种形式收敛的概念，所以便于处理一些数学问题。

设(ε)是F中某些正元的集合，四元组（E，F，ρ，(ε)）或E叫（ε）G空间。类似定义$(\varepsilon)G^+$与$(\varepsilon)G^{++}$空间。在$(\varepsilon)G$空间中，用(ε)来固定其收敛概念。

设给定两个$(\varepsilon)G$空间$(E_i, F_i, \rho_i, (\varepsilon)_i)$，其中$i=1$，$2$；$A: E_1\to E_2$。若由$(\varepsilon)_1—\lim x_n=x_\Delta$导致$(\varepsilon)_2-\lim Ax_n=Ax_\Delta$，则称$A$在$x_\Delta$处连续或为$(\varepsilon)_1(\varepsilon)_2$连续。相应可定义$(0)(\varepsilon)$连续，$(\varepsilon)(0)$连续等等。

若A把有界集变为有界集，则称A为有界或$(\varepsilon)_1(\varepsilon)_2$有界。类似地可定义其它意义的有界性。

若E为线性空间（域仍为K，与F的域同），且ρ对平移是不变的：$\rho(x,y)=\rho(x-y, \theta_E)$，则叫$G$范空间，并把$\rho(x,\theta_E)$记为$\|x\|$，把（$E$，$F$，$\rho$）记为$(E, F, \|\cdot\|)$。类似定义（$\varepsilon$）$G$范空间，等等。并相似地定义各种收敛性、有界性以及映射的连续性和有界性。例如设（E_i，F_i，$\|\cdot\|_i$，$(\varepsilon)_i$），$i=1$，2，为二$(\varepsilon)G^+$范空