

The Universe and the Teacup
The Mathematics of Truth and Beauty

数学与头脑 相遇的地方

● By K.C.Cole
● 丘宏义 译



長 春 出 版 社
贝塔斯曼亚洲出版公司



The Universe and the Teacup
The Mathematics of Truth and Beauty

数学与头脑 相遇的地方

● By K.C.Cole
● 丘宏义 译



长春出版社
贝塔斯曼亚洲出版公司



图书在版编目(CIP)数据

数学与头脑相遇的地方/(美)柯尔(K. C. Cole)著;丘宏义
译. —长春:长春出版社,2002.3

ISBN 7-80664-330-3

I.数... II.①科...②丘... III.数学-普及读物
IV.01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第010901号

责任编辑:羽佳 封面设计:大熊 夏季风

长春出版社出版

(长春市建设街43号)

(邮编130061 电话8569938)

长春市正泰印务公司制版

长春第二新华印刷有限责任公司印刷

全国新华书店经销

880毫米×1230毫米 32开本 8.625印张 179千字

2002年4月第1版 2002年4月第1次印刷

印数:1-10 000册 定价:19.50元



导读 数学和人生问题及哲学

丘宏义

数学已经走进了尘世中的社会学、伦理学、哲学及其他的领域。

人之初，性本善？人之初，性本恶？数学能否解决这问题？

“我最恨数学了，都是数字。”这是一句常听到的话。可是从来没有人说过：“我最恨钱了，都是数字。”有这么一个人的话，可以给他或她一个芝诺奖或墨子奖，奖品是一个代替衣著的木桶及一个面包袋^①。

数字不是坏东西，端看它在哪里出现。如果在老师发下的习题中有数字，而且很多，那么——哼的怨声就出来了。如果是在钞票或支票上，数字则愈多愈好（假定没有通货膨胀）。

^① 译注：芝诺（Zeno）是希腊哲学家，创坚忍主义者，穿一木桶，身外长物为一个装面包的布袋。战国时代的墨子是类似芝诺的人物，也创类似坚忍主义的哲学。

可是每个人都逃不出数字的“魔”掌（这个“魔”是魔力的魔）。你几岁？今天是什么日子？老板给我的薪水有多少？做这一笔生意，可以赚多少钱？连印我写的这篇序的天下远见出版公司，也要按斤两计算这序有若干字。要竞选的人一定要去问，民意调查给我百分之几？财政部要问，税收若干，支出若干，有否赤字？用信用卡的朋友最好要注意一下帐单上的数字。

这些都是冰山浮出水面的一小点而已。数学用到数字，可是它的范畴远在数字之外。本书第十四章提到的、被誉为本世纪最杰出的抽象代数学家的诺塞，她对计算一点都不感到兴趣，而且她和这些平平凡凡的计算隔阂之远，使得人们把她研究的数学称为“数学神学”（为数学而数学的数学）。她只对广泛的一般性真理，如不变性、守恒律等之间的逻辑关系有兴趣。如果有人向我说，她不能把她的支票帐户的收支加起来看看损益若干，我一点不会感到奇怪。就像要抽象大画家毕加索去画街头人像一样地不行。（其实毕加索的古典画艺高极了。）

数学为什么令人反感？

人为什么对自己创出的、人的文化中屈指可数的几个精华之一的数学，这么起反感？本书给出几位专家的原因。一个原因是，人脑是在穴居时、渔猎社会中演化发展出来的。生活里最重要的是安全及食物。人类进步到了有了农业，开始把剩余的东西拿去交易时，才开始有数字的观念。原始生活很简单，十根手指再加上十根脚趾大约就够用了。只有一些古怪的人才会去想到更大

的数目，这些大数目是在手指和脚趾的数目以外的。难怪大数目是违反我们天性的。到了现在，数字已经成为社会中心骨干的一部分了，可是我们的基因演化得太慢，赶不上。也许这就是许多人不喜欢数字的原因。

可是，人类最不行的远不是数字，而是区别大数字的观念。如本书所说，“人对大数目不在行”这个习性也许也来自演化过程。请想一下，我们居住的自然环境真的可以说是非常不良的。以光为例，白天的日光比晚上无月时的星光，强度相差了百万数量级以上的倍数。声音呢？与在森林中行猎时必须听辨出的、猎物在落叶上走动时发出的飕飕声相比，雷声的强度要大上百万数量级的倍数。而我们非但能在白天看到东西，而且可以只依赖星光走路^①。我们能听到雷声，也能听到极细微的飕飕声——对穴居、渔猎的人来说，听不到就要饿肚子了，或变成猛兽的餐食。

没有一台照相机能照出这么广阔光度的景色，没有一个麦克风能听录到这么广阔范畴的声音。可是我们几乎每一个人都能看到或听到。这些利器都长在我们身上，多方便，而且不费分文（如果不算父母养育的精力）。

我们之有这个能看到或听到极强和极弱的光或声的能力，乃因我们感官的反应是对数型的，即讯号（光或声）强十倍，我们只觉得强一倍而已。白天的日光和夜晚的星光对我们的感官来说，只差十来倍而已。刚发明电话的时候，贝尔（Alexander. G. Bell, 1847 - 1922）先生大感吃惊，因为仪表上示出的声音强度大了十倍，他

^① 译注：现今必须到没有灯火的地方，如玉山上，才能看到没有月亮的晚上的星光能把景色照得有多亮。

只觉得大一倍而已。于是贝尔先生后来发明了现在通用的声音响度的贝尔标度，每一“贝尔”的差为十倍。后来把贝尔再分十，成为分贝。

记得有这么一个笑话，说纽约林肯中心的音乐厅刚造好的时候，音响的效果不良，在某频率区吸收太强。工程师做的测量是音响效果差了十个分贝（一贝尔）。有一位林肯中心建造委员会的委员（想来不是科学家）建议一个快速的弥补方法：增加演奏家的数目。于是工程师作一计算，乐队中本来有十来位提琴家，如果要增加十分贝的音响，就必须把这十来位提琴家的数目增加到一百余位了。

感官的这种对外界讯号的对数式（或指数式、幂数式）反应，对我们及其他动物非常奇妙而合用，帮助我们与其他生物在地球上的“不良环境”中生存及演化。可是，唉，有一利必有一弊。如本书第二章所说的，就因为如此，我们对大数目的感受实在不行。举例来说，每个人都有钱不够用的感觉，可是如果给你十倍的钱，毫无疑问的，你更能支配应用——你要一件新衣、一辆新车，搬去一幢更理想的屋子等等。可是给了一百倍，就有点不知所措了——吃的方面花的有限（吃太多会变胖，就要减肥，更糟），在住的上面能花的也有限，去买游艇等花的钱也有限，正当旅游玩乐用的也有限（色情场所及赌场例外）。原因很简单，每一个人每天除了睡觉以外，只有十来小时的时间去享受，时间不够。给了一千倍，就干脆放在银行算了。

大数字的迷思

在 20 世纪 60 年代，一位经济学家巴金生（C. N. Parkinson, 1909 - 1993）写一本叫做《巴金生定律》的讽刺书，就提到这一点。书中写一家英国大公司要投很大的资金（60 年代的亿级美元）去造一座核能发电厂，可是只花了五分钟时间去讨论。没有一个人知道一亿元到底是什么，能做多少事。可是在讨论去造一座员工停自行车的车库时，只需要花上数千元，就讨论了三小时之久，因为每个人都知道数千元的意义，知道如何去花。巴金生定律之一就是，钱数愈大，花在讨论怎样去使用的时间愈少。

我们对复利的计算很清楚，叫“以利滚利”。可是我们对与自己生死交关的类似问题（以人滚人）却如无睹。我们人类最严重的未来问题就是人口问题，一切其他问题如环境污染，都随人口问题而来。如果台北的人口少了三倍，变成 100 万上下，街上交通就不会拥挤，空气会好得很多。可是如果再加一倍，就不堪设想了。

本书中以细菌的增殖为例。每隔一分钟菌口加倍。到它们住的可乐瓶已有 $1/4$ 满的时候，只需再过两分钟，众细菌的数目就要多到无立足之地了（如果这些细菌有足的话）。可是，细菌中的政客向细菌群众拍拍胸脯保证，没有菌（人）烟的空地还很多，尽管去生下一代可爱的细菌好了。可以想像到，如果细菌有宗教的话，它们的宗教领袖可能借用细菌先知留下的圣言，说节育菌口是违反天命的，也许还会拍拍胸脯说，细菌的上帝一

定不会让虔诚的细菌子民受苦难的。

现在世界上每年人口增殖率为 1.8%，在 40 年内就要增一倍到 100 亿人。细菌的一代是一分钟，每一代菌口增一倍。我们人类大约 25 年为一代，人口增殖率是每 1.6 代增一倍。因此，我们人类比书中说的细菌好不了多少。（是否人类的政客及宗教领袖也像假想中细菌的领袖一样，拍拍胸脯保证呢？）按照这增殖率，到公元 5000 年左右，人的总质量将超过地球的质量。当然远在这个时间以前，自然界自会有“修理”人类的方法。显而易见的，最好自己克制，不要让自然界来“修理”我们。

几个误用统计的例子

不谈这个未来可能发生的人类悲剧了。谈谈统计，统计是数学界最伟大的发明之一，整个保险业就建在统计学上，整个国家的经济也以统计为基础。可是统计数字也是说谎话的最佳工具之一。本书提到好几个误用统计的问题，其中一个是在美国最敏感的黑人、白人智力差别的问题，就是愚智问题。在中国，种族不太成问题，因为第一，现代的中国没有种族问题，所谓的蛮族（异族人）和汉人已经混到不知谁是谁了。第二，历史上的敌人，而且是死敌，屠杀汉人的死敌，如五胡、金人、辽人、蒙古人、满人等，都早已和汉人大批通婚，已经到了几乎无法追溯祖先是哪族人的程度。

可是在美国，因为历史上的歧视^①，几乎一直都有人

^① 译注：美国在开国后制造出不少遗留至今的黑人问题，如不许黑人（大都是奴隶）结婚，只许乱交，甚至于把真正热恋中的黑人伴侣硬生生拆散。黑人死后安葬的墓地上，也不许立标有名字的墓碑。许多这类强加在黑人身上的恶习，到现在还有很大的后遗症。

去研究黑人、白人之间的智力差别问题。按本书及引用到的各作者的说法，这些研究都毫无科学上的价值。首先，要问：黑人的定义是什么？几乎所有美国的黑人都有些白人的血统。但是在美国，一旦染上了一点一滴黑人的血统，这人就立即被分类成黑人。是否黑人的种族真是这么差，差到只要一碰，就如神话中的点金术一样，立刻变愚呢？

如果黑人真有这么厉害，那么从基因一定可以看出来^①。可是所有的基因研究都无法把黑人的基因和白人的基因明确区别出来，因此仍无法给黑白种族下定义。而且，如本书所指出的，这种拿一个团体和另一个团体比较的统计方法很容易犯错，原因是，一个团体中个别成员的差异远大于团体与团体间的差异。

进一步说，如果接受上述不正确的关于黑人种族的定义，黑人智商钟形曲线的高峰点的确比白人的要小10%~15%（亚裔人的智商钟形曲线显然比白人的又要高10%左右）。可是如本书作者指出的，即使按这个钟形曲线，还有百万又百万的黑人的智商比百万又百万的白人的智商高。那该怎么说？

本书指出，所有关于种族智商的统计都没有考虑到后天的教育因素。我举下例：在美国的亚裔中，以中国人居多。而中国文化有重视学术的传统，一般家庭宁可自己省吃俭用，也要把子女教好。又补习、又买电脑、又去找好学区去居住。如有余钱，又学钢琴、小提琴等

^① 译注：如果黑人的基因真是如此的强，那么应当把黑人的基因做特别的研究，把天才的基因（包括不少黑人天才的基因），用改变基因的技术（gene alteration），把感染到黑人基因就成为黑人的这种过程，变成增进人类智力的方法。

益智的技艺。再有多余的钱，还把子女送去最好的私立学校。而黑人受经济压迫，买不起电脑，生育子女太多，环境中犯罪的人太多，没有尊崇学术的传统。这些都是决定智商的后天重要因素，可是在这些统计中都没有考虑进去。

这仅是本书所说的，统计数字错误应用的例子之一而已。

诚如英国 19 世纪的名宰相狄斯瑞立（Benjamin Disraeli, 1804 - 1881）所说的，“有谎话，极端恶毒的谎话，及统计数字。”法国革命时代的女杰罗兰夫人（Jeanne Roland, 1754 - 1793）被革命党送上断头台之前，说：“哦，自由，多少罪恶假汝之名而行。”我们也可以说：“哦，伟大的统计数字啊！能假借你说出多么美妙而令人置信的谎话呀！”

量变引发质变

还有一个是数学领域以前还没有触及的问题，可是现在才开始。这就是量与质的问题。目前数学的应用大多是处理量的问题。我们用了电脑去处理很多的数据。可是，是不是量与质的关系？这个关系往往是数学看不出的（至少现在还不行）。100 元和 10 万元之间，除了多买些东西之外，还有什么其他不同的特性？可是在物理中，已有不少量把质改变的例子。100 磅煤炭和一吨煤炭之间，除了数量之外，就没有什么区别。可是用来做核反应炉燃料或核弹原料的铀²³⁵或钚就不行了。这二者有一个叫做临界质量的数值，如果辐射铀或钚的数量不够

多，就不能起链式反应（连锁反应）：核反应不能进行，核弹不能爆炸。一定要有足够的量，才能在质方面有很大的变化。

这种临界质量的观念也可以应用在科学研究上。为什么早期台湾的物理及天文研究不够水准？难道那些研究人员真的水准不够吗？可是一等到人数够了，超过某不知数量的“临界质量”，研究的链式反应就出现了。世界上各高等学府对这一点很明了。一座大学中的研究人员一定要多到某个程度，研究才会有成果。这就是中国人常讲到的学术风气。非一人唱独角戏可提倡的。

这就是本书中说的“多带来不同”。从数学及物理立场来看，就是非线性问题。普通的问题都是线性的，即一块钱可以买一块钱的东西，两块钱买两块钱的东西。这是线性问题，果与因成直线比例。可是如果钱多到可以把制造东西的工厂买下来，就到了非线性的领域——果与因不成比例。就这方面说来，在社会学领域的研究工作才刚开始而已。也许这种才在起步的非线性因果关系，将是这个新世纪最重要的社会学工具之一。

本书还讲了一个令人惊奇、还无法了解的社会学实例。纽约城的犯罪率本来是全球最高的。每一个去纽约的人都受到警告，要小心。可是，突然间，犯罪率急降，从美国的第一把交椅降到第 136。是否贼和强盗都关进监牢中去呢？监牢中的人数并未激增。可是犯罪率急降却是事实。有社会学家建议，也许这和水变成冰的相变（phasetransition）很类似：从 1°C 到 -1°C 之间，温度只减了两度，可是水却结成冰了。如果开始时，水的温度是 30° ；把它放在冰箱中，耗了不少电，让它的温度降了

29度，使水温为 1°C ，可是什么也没有发生。然后，把水温再降两度。奇迹发生了，水结成冰。

是否犯罪率也是如此？左抓贼，右捕强盗，愈抓愈捕愈多。可是，捕抓了一大阵子后，贼和强盗突然都不见了。是什么原因？绝不是强盗和贼都抓光了。也许准强盗或贼都不敢去犯案了，也许觉得找事赚钱还容易些，也许……谁知道？社会学家把这现象称为“转捩点”。可是到现在还没有人能了解为何如此。（这类非线性问题很难了解。水结成冰的物理原理在十数年前才发现，发现者还得到了诺贝尔奖。）很显然，转捩点是一个非线性问题。如果我们了解造成转折点的原因，也许很多社会问题都能迎刃而解。

数学在政治上的功用

数学在政治上的功用远在民意测验之上。一般人认为自由选举是民主的第一步。可是这一步不见得能带来民主，更不见得能带来经济繁荣。在西方殖民帝国退出非洲时，几乎在这些殖民地中都举行过“自由选举”。现在呢？没有一个非洲国家是实行民主政治的。这当然有许多的因素，可是就证明了自由选举不见得能带来民主，带来的却是一个个中了“选举”乐透奖的独裁者。还有，有不同去“做”选举的方式，各地方的政客都自有一套。本书第九章谈到一个民主投票选择去看哪一场电影的例子。美国用得最普遍的是杰锐蝶螟法（gerrymander，见第九章第128页注释②），即把选区划成不规则形状，把拥护敌对党的选民分散，使拥护本党的选民在选区中能得到

到最多票。

一般人认为最公平的选举是以多数票当选。可是美国开国元勋杰克逊（见第九章）把这种选举称为“多数统治暴政”。有一个美国人不大提的实例：1776年美国独立宣言开宗明义说道：“人生而平等。”可是这个建在“平等原则”的国家中的大多数人——白人（当然有不少抱不平的白人，可是他们是少数中的少数），却以多数统治暴政的方式，一致同意歧视黑人，而且还立法把这种歧视合法化。要在80余年后打了一场到现在还在伤心的内战，才把黑人解放。还要等到20世纪60年代（几乎200年后），才有马丁路德·金恩奋起领导黑人去争民权，而到20世纪90年代末期，黑人、白人才几乎平等。

多数票当选造成悲剧的例子，最甚者是智利在20世纪70年代的选举（见第九章第127页注释①），而多数票也不见得代表民意。（民意也不见得是正确的，西方有一句谚语：“100万个法国人可能都是错的。”以上说的，白人立法歧视黑人就是一个例子。）一个极端的假想例子是，如果某个国家有100万人，在选总统时，999 998人都选自己为总统或弃权，有两票另选某人，这人就以三票的多数当选为100万人的总统①。

① 译注：笔者要讲一个自己遭遇到的趣事。似星体（又译为类星体）是在20世纪60年代发现的。于1963年，我在美国物理学会的官方杂志《今日物理》（*Physics Today*）上面写了一篇报告发现过程的文章，发明了似星体“quasar”这词。一时很轰动，大家（尤其记者及科普作家）都采用，因为易说，又与众不同。可是有几位在似星体的发现中做了很大贡献的科学家感到不平，因为我没有在这领域工作过。1964年在第二次世界会议（德州相对论天文物理学会议）中，有四百余位天文学家参加。在大会将结束之际，有人建议表决。有七人举手赞成，三人反对，其他四百余人弃权。主席便宣布以“多数票”通过，把“quasar”做为似星体的官方名称。

诚实、合作是最佳策略

本书提出了数学在选举方式的研究。数学家有不少解决这种“多数统治暴政”的问题。可是看来似乎还要等一阵子，这些方法才能付诸实用。

在所有本书谈到的问题中，我认为最令人鼓舞的是第十一章《和蔼体贴的数学原理》。为什么呢？我认为在这方面的研究解决了一个中国学术界争执了 2000 余年的“性善，性恶”问题。读者也许要问：性善和性恶与数学怎样扯上关系的？这关系来自“对局论”，英文是“game theory”。其实应当可以说这是中国人最先发明（或实用）的理论（见第十一章第 152 页注释①）。现代对局论中最有名的问题是“囚犯的进退两难选择问题”。问题可以作如下的抽象化：如果甲乙两人都不互相欺骗，大家都得益。如果甲欺骗了乙，乙就受害，甲方得益。反之亦然。如果双方都欺骗，大家都不得得益。举个实例：你去店中时，看见没有人，就把东西偷走，店就损失。如果店把货换了包，你付了钱，买到的是一包稻草，你就受了损失，店赚了钱。如果你偷了店方的货，而货是假的（如包装精美的稻草），你们双方都不得得益。可是如果你付钱，店把真货给了你，双方都得益。这个问题有种种的变化形式，详情请见第十一章。

看上去是很简单的问题，可是一在社会上应用，就变成很复杂的问题。因为，不是仅做一次交易。要连续不断地做下去，什么是最好的策略？在数学上，这也不是很简单的问题。我想在售物的店和顾客的这个例子中，

读者都知道来自经验的解答了。百货公司把店面装饰得非常诱人，货真价实，老少无欺。顾客一进来，售货员就满脸笑容地欢迎。顾客买了东西，照价付帐，皆大欢喜。百货公司能一直开下去，顾客诚实地付钱，买到的货物是称心的，双方都得益。（其实中国古代的商人早就知道了。谚语说“和气生财”。）

如果百货公司不诚实，把劣货充数，态度恶劣。第一次这么做，公司得益，顾客损失。上了当，下回顾客不来了。不久公司没有生意，关门大吉。长期之后，大家受害。

如果顾客不诚实，偷了东西，顾客得益，可是百货公司受了损失。日久之后，公司亏损太多而关门，顾客就少了一个可以买东西的地方，大家都受害。

数学上得到的解答是：基本上要诚实。第一次的时候，都须诚心待对方。可是如果对方行骗，你就得反击。对方诚实，你就诚实。这样的“对局”是长期必胜的策略。再以百货公司为例，百货公司把店面装饰得非常诱人……货真价实，顾客不喜欢可以退货退钱。可是，如果顾客不诚实，抓到后就送警处理，毫不通融……换句话说，就是本书第十一章的结论：对待人就像你要人家怎样对待你，要不然，有你看！

其实这些都是孔子说过的道理。他说：“己所不欲，勿施于人。”有人问他：“以德报怨，如何？”孔子的回答是：“以德报怨，何以报德？以德报德，以直报怨。”以直报怨的意思就是以公平的手段（法律）对付不公平的事（见第十一章末尾的译者附记）。几年前去世的科学家兼科普作家卡尔·萨根（Carl Sagan, 1934 - 1996）在他的

书《亿万又亿万》里说，基督教圣经的金律（即一味容忍）不可行，而银律（即孔子说的己所不欲……以直报怨……这几句话）则是最可行的，而且有数学的证明。

不变不能应万变

“以直报怨”也是外交上最成功的手段；最糟的是持不变的原则。自罗马帝国灭亡后，欧洲一直在争战中，许多国家变成世仇。可是，两个世纪前德国的铁血宰相俾斯麦^①认为，不应当把敌友的区别看得过分分明。他说过：“国家没有永远的敌人，也没有永远的朋友。”换句话说，你以朋友待我，我就待你为朋友；你以敌人待我，我就待你为敌人。美国和中国（大陆）的关系就是如此。在朝鲜战争时期，你待我为敌人，我待你为敌人，敌对的情况持续了20余年之久。可是，美国的一个不足道的运动，乒乓球队去了中国，中国待之以上宾之礼。美国立即还报，下一次去的就是尼克松总统。以后的发展都是历史旧话了。

这也是为什么人们要合作的原因。在渔猎时代，要猎到大猎物，非要合作不行。不合作就打不到猎物，就要饿死。绝不是我们想像中“适者生存”的那种狗咬狗的自相残杀精神。种族对种族，的确是要竞争。可是种族的成员中，如果只要竞争，没有合作或互助，就消灭

^① 译注：俾斯麦（Otto Von Bismarck, 1815 - 1898），现代德国的第一位宰相（1871 - 1890）。是一位有争论性的人物，可是既有刚毅又有魄力，精谋略，重法治，把当时很弱的德国变成强国。现在各国都有的社会安全保险制度（social security）就是他创立的。俾斯麦为人有争论性的原因之一是，他把德国的利益看得太重，有时不惜挑拨其他国家作战，使德国从中获取渔利。