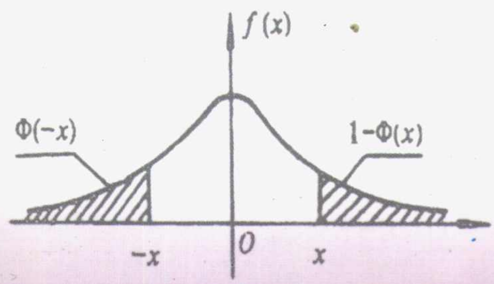
《考研数学复习全书》编写组

线性代数与概率统计复习指南

Xianxing Daishu yu Gailu Tongji Fuxi Zhinan

考研数学复习全书

2003年



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

东南大学出版社

132

考研数学复习全书

线性代数与概率统计复习指南

《考研数学复习全书》编写组

东南大学出版社

内 容 提 要

本书是根据国家教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，在对多年的研究生入学试题进行分析总结和多年的考研辅导实践的基础上编写而成的。

全书分为二篇。第一篇“线性代数”共6章；第二篇“概率统计”共8章。每章内容包括内容提要、典型例题及练习题，并附有习题答案与提示。本书是报考硕士研究生的“线性代数”与“概率统计”复习指南，内容适用于各种类型的考生，也可作为高等院校教师和学生的数学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与概率统计复习指南/《考研数学复习全书》编写组编.一南京：东南大学出版社，2000.10

(考研数学复习全书)

ISBN 7-81050-159-3

Ⅰ.线… Ⅱ.考… Ⅲ.①线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料②概率论-研究生-入学考试-自学参考资料③数理统计-研究生-入学考试-自学参考资料

Ⅳ.①O151.2②O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第51909号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号　邮编210096)

出版人：宋增民

江苏省新华书店经销　　华东有色地研所印刷厂印刷

开本：787mm×1092mm 1/16　印张：16.75　字数：418千字

2002年3月第1版第3次印刷

定价：20.00元

(凡有印装质量问题，可直接向发行科调换，电话：025-3792327)

前　　言

随着研究生招生规模的不断扩大，广大考生迫切需要一套系统的研究生考前复习指导书。为此，江苏省部分高校的一批多年参与考研数学辅导工作和考研试卷阅卷工作、具有较高学术造诣和丰富教学经验的教师联合编写了本套考研数学复习全书，包括《高等数学复习指南（理工类）》、《线性代数与概率统计复习指南》、《数学模拟试题及分析（理工类）》，以适应不同类型的考生的要求。

本套考研数学复习全书是根据国家教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，在对历年来的研究生入学考试试题进行了详细分析和总结的基础上编写而成的。全书系统性强、题型全面、突出重点、突破难点。通过对基本概念、理论和方法的归纳总结和典型例题的详细分析，使读者熟练掌握基本解题方法，注重解题思路和解题技巧，解答疑难问题，力求培养考生分析问题和解决问题的能力，提高考生的应试能力。

本套考研数学复习全书中的《线性代数与概率统计复习指南》由东南大学的曹振华老师，江苏理工大学的王学弟老师，河海大学的周继东、董祖引、印凡成老师编写，全书由曹振华、陈建华老师统稿。

在本书的编写出版过程中，得到了东南大学出版社及有关高校数学系领导和教师的大力支持，在此一并表示感谢！

编者

2000 年 9 月

修 订 前 言

本套考研数学复习全书自第一版发行后，受到了广大读者的欢迎，同时也给我们提出了宝贵的建议和要求。据此，我们对第一版作了如下修改：一是增加了 2001 年全国研究生入学考试数学试题；二是在对 2001 年全国考研数学试题分析及对 2002 年研究生入学考试数学试题预测的基础上，对例题及习题进行了调整，并增加了例题分析与总结。

本套考研数学复习全书中的《线性代数与概率统计复习指南》由东南大学的曹振华老师、南京理工大学的刘力维老师、河海大学的周继东老师和江苏理工大学的王学弟老师修订，并由曹振华、周继东老师统稿。

我们希望本书能为有志报考硕士研究生的读者提供更多的帮助，也相信本书会更受读者的欢迎。

编者

2002 年 3 月

目　　录

第1篇　线性代数

1　行列式 ………………………………………… (3)
1.1　内容提要 ………………………………………… (3)
1.1.1　n 阶行列式的概念 ………………………………………… (3)
1.1.2　行列式的性质 ………………………………………… (3)
1.1.3　行列式按行(列)的展开公式 ………………………………………… (4)
1.1.4　重要公式 ………………………………………… (4)
1.1.5　克莱姆(Cramer)法则 ………………………………………… (5)
1.2　例题精选 ………………………………………… (5)
习题1 ………………………………………… (17)
答案或提示 ………………………………………… (19)
2　矩阵及其运算 ………………………………………… (20)
2.1　内容提要 ………………………………………… (20)
2.1.1　矩阵的概念 ………………………………………… (20)
2.1.2　矩阵的运算与性质 ………………………………………… (20)
2.1.3　几类重要的矩阵 ………………………………………… (23)
2.2　例题精选 ………………………………………… (23)
习题2 ………………………………………… (36)
答案或提示 ………………………………………… (37)
3　向量组的线性相关性与矩阵的秩 ………………………………………… (38)
3.1　内容提要 ………………………………………… (38)
3.1.1　n 维向量的概念及线性相关性 ………………………………………… (38)
3.1.2　矩阵的秩与向量组的秩 ………………………………………… (39)
3.1.3　向量空间、基变换、坐标变换及过渡矩阵 ………………………………………… (40)
3.1.4　一些常用方法 ………………………………………… (41)
3.1.5　重要结论与公式 ………………………………………… (41)
3.2　例题精选 ………………………………………… (42)
习题3 ………………………………………… (52)
答案或提示 ………………………………………… (54)
4　线性方程组 ………………………………………… (55)
4.1　内容提要 ………………………………………… (55)
4.1.1　非齐次线性方程组和齐次线性方程组 ………………………………………… (55)

4.1.2 同解方程组……(55)
4.1.3 线性方程组的求解方法……(55)
4.1.4 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解的情况的判别……(56)
4.1.5 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解的情况的判别……(56)
4.1.6 齐次线性方程组与非齐次线性方程组的解之间的关系……(56)
4.1.7 齐次线性方程组、非齐次线性方程组解的性质……(57)
4.1.8 齐次线性方程组的基础解系……(57)
4.1.9 齐次线性方程组和非齐次线性方程组解的结构……(57)
4.2 例题精选……(57)
习题 4……(74)
答案或提示……(76)
5 特征值、特征向量、相似矩阵……(79)
5.1 内容提要……(79)
5.1.1 方阵的特征值与特征向量……(79)
5.1.2 特征值与特征向量的求法……(79)
5.1.3 特征值、特征向量的性质……(79)
5.1.4 相似矩阵……(79)
5.1.5 相似矩阵的性质……(80)
5.1.6 方阵可对角化的条件……(80)
5.1.7 实对称矩阵的一些性质……(80)
5.2 例题精选……(80)
习题 5……(92)
答案或提示……(94)
6 内积、欧氏空间、二次型……(97)
6.1 内容提要……(97)
6.1.1 内积……(97)
6.1.2 欧氏空间……(97)
6.1.3 标准正交基(Schmidt 正交化方法)……(97)
6.1.4 二次型……(98)
6.1.5 有关二次型的几个定理……(98)
6.1.6 矩阵的合同……(99)
6.2 例题精选……(99)
习题 6……(110)
答案或提示……(111)

第2篇 概率论与数理统计

1 随机事件及其概率……(117)
1.1 内容提要……(117)

1.1.1 随机事件 …………………………………………………………………… (117)
1.1.2 事件之间的关系及运算 …………………………………………………… (117)
1.1.3 概率的定义 ………………………………………………………………… (117)
1.1.4 概率的加法定理 …………………………………………………………… (118)
1.1.5 条件概率与事件的独立性 ………………………………………………… (119)
1.1.6 概率的乘法定理 …………………………………………………………… (119)
1.1.7 全概率公式和贝叶斯公式 ………………………………………………… (120)
1.2 例题精选 ……………………………………………………………………… (120)
习题 1 ……………………………………………………………………………… (135)
答案与提示…………………………………………………………………………… (136)
2 随机变量及其分布 ……………………………………………………………… (137)
2.1 内容提要 ……………………………………………………………………… (137)
2.1.1 随机变量的分布函数 ……………………………………………………… (137)
2.1.2 离散型随机变量 …………………………………………………………… (137)
2.1.3 连续型随机变量 …………………………………………………………… (138)
2.1.4 随机变量函数的分布 ……………………………………………………… (140)
2.2 例题精选 ……………………………………………………………………… (140)
习题 2 ……………………………………………………………………………… (161)
答案与提示…………………………………………………………………………… (163)
3 随机向量及其分布 ……………………………………………………………… (165)
3.1 内容提要 ……………………………………………………………………… (165)
3.1.1 随机向量的联合分布 ……………………………………………………… (165)
3.1.2 边缘分布 …………………………………………………………………… (167)
3.1.3 条件分布 …………………………………………………………………… (167)
3.1.4 随机变量 X,Y 的独立性 ………………………………………………… (168)
3.1.5 随机变量函数的分布 ……………………………………………………… (168)
3.2 例题精选 ……………………………………………………………………… (170)
习题 3 ……………………………………………………………………………… (198)
答案与提示…………………………………………………………………………… (199)
4 随机变量的数字特征 …………………………………………………………… (202)
4.1 内容提要 ……………………………………………………………………… (202)
4.1.1 随机变量的数学期望 ……………………………………………………… (202)
4.1.2 随机变量的方差 …………………………………………………………… (203)
4.1.3 常见分布的数学期望和方差 ……………………………………………… (203)
4.1.4 协方差与相关系数 ………………………………………………………… (204)
4.1.5 随机变量的矩 ……………………………………………………………… (205)
4.2 例题精选 ……………………………………………………………………… (205)
习题 4 ……………………………………………………………………………… (216)
答案与提示…………………………………………………………………………… (218)

5 **极限定理** …… (219)
5.1 内容提要 …… (219)
5.1.1 大数定律 …… (219)
5.1.2 中心极限定律 …… (220)
5.2 例题精选 …… (221)
习题5 …… (227)
答案与提示 …… (227)
6 **样本及抽样分布** …… (228)
6.1 内容提要 …… (228)
6.1.1 基本概念 …… (228)
6.1.2 几个常用的抽样分布 …… (228)
6.1.3 正态总体统计量的分布 …… (229)
6.2 例题精选 …… (230)
习题6 …… (234)
答案与提示 …… (235)
7 **参数估计** …… (236)
7.1 内容提要 …… (236)
7.1.1 参数的点估计法 …… (236)
7.1.2 参数的区间估计 …… (237)
7.2 例题精选 …… (238)
习题7 …… (249)
答案与提示 …… (250)
8 **假设检验** …… (252)
8.1 内容提要 …… (252)
8.1.1 假设检验的基本概念 …… (252)
8.1.2 假设检验的步骤 …… (252)
8.1.3 假设检验的2类错误 …… (252)
8.1.4 正态总体参数的假设检验 …… (252)
8.2 例题精选 …… (253)
习题8 …… (256)
答案与提示 …… (256)

第 1 篇

线 性 代 数

1　行列式

1.1　内容提要

1.1.1　n 阶行列式的概念

n 阶行列式 D 是把排成一个方块的 n^2 个数

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{matrix}
$$

按下列规则运算：

当 $n = 1$ 时，$D = a_{11}$；

当 $n \geqslant 2$ 时，$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$。

其中，$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$。而 M_{ij} 为在行列式 D 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列所余下的元素按原来的位置顺序组成的 $(n-1)$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**；A_{ij} 称为 a_{ij} 的代数余子式。n 阶行列式记为

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

注　若利用矩阵的记号，设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$，则上述 n 阶行列式可记为 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$。容易看出，n 阶行列式可看成定义在全体 n 阶方阵所构成的集合 $\boldsymbol{M}_n$ 上的一个函数 $\det:\boldsymbol{M}_n \to \boldsymbol{R}$，当 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}_n$ 时，$\det\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|$。

1.1.2　行列式的性质

1）行列式与它的转置行列式相等。

2）互换行列式的两行（列），行列式变号。

3）行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式。

4）行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零。

5）若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，则此行列式等于 2 个行列式之和。以列为例：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1j}+a'_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2j}+a'_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nj}+a'_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6）把行列式的某一行(列）的各元素乘以同一数然后加到另一行(列）对应的元素上去,行列式不变。

1.1.3 行列式按行(列）的展开公式

行列式等于它的任一行(列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad i=1,2,\cdots,n$$

或
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad j=1,2,\cdots,n$$

由该公式可推得如下重要推论:

行列式任一行(列）的元素与另一行(列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \qquad i\neq j$$

综合行列式按行(列）的展开公式与其推论,可得关于代数余子式的重要性质:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{kt}A_{kj}=D\delta_{tj}=\begin{cases}D & t=j\\ 0 & t\neq j\end{cases}$$

或
$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{sk}=D\delta_{is}=\begin{cases}D & i=s\\ 0 & i\neq s\end{cases}$$

其中
$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

1.1.4 重要公式

1）$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$, $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$, $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

其中,$\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵;$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵;上述公式是拉普拉斯(Laplace）展开式的特殊情形。

2）
$$\begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & O \\ & a_{22} & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & O\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} O & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & *\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

3）若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,则 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$。

4) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$。

5) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。

6) 范德蒙(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

其中，记号“$\prod$”表示全体同类因子的乘积。

1.1.5 克莱姆(Cramer)法则

如果线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad \cdots, \qquad x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中，$D_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 是将系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的自由项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.2 例题精选

【例 1】 填充题：

(1) 已知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 都是行列式值为 2 的三阶矩阵，则

$$D = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A} \\ \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right)^{-1} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}。$$

(2) 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$,则 $D=$ ______。

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 都是四维列向量,已知 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|=4$,$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|=1$,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$ ______。

(4) 已知 n 阶行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

则 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 k 行元素的代数余子式之和 $A_{k1}+A_{k2}+\cdots+A_{kn}=$ ______。

(5) 方程 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & x \\ 1 & 2^2 & \cdots & (n-1)^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \cdots & (n-1)^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix}=0$ 的全部根是______。

(6) 已知

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

则 $A_{12}-A_{22}+A_{32}-A_{42}=$ ______。

解 (1) 应填$\frac{27}{8}$。该题属于拉普拉斯展开式的应用,不能错误地按照二阶行列式来计算,计算过程要注意符号、数乘矩阵与数乘行列式的区别。

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A} \\ \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right)^{-1} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{3\times 3}|-\boldsymbol{A}|\cdot\left|\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\right| \\ &= -(-1)^3|\boldsymbol{A}|\cdot\left|\frac{3}{2}\boldsymbol{B}^{-1}\right| \\ &= |\boldsymbol{A}|\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot|\boldsymbol{B}^{-1}| \\ &= 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}=\frac{27}{8} \end{aligned}$$

(2) 应填 x^4。注意该行列式各行元素之和相等,故可根据行列式的性质,先把第 2,3,4 列元素加到第 1 列,提出第 1 列元素的公因子,使第 1 列元素全变为 1,进而用降阶法求解。由已知

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}x&-1&1&x-1\\x&-1&x+1&-1\\x&x-1&1&-1\\x&-1&1&-1\end{vmatrix}$$
$$=x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}$$
$$=x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\0&0&x&-x\\0&x&0&-x\\0&0&0&-x\end{vmatrix}$$
$$=x\begin{vmatrix}0&x&-x\\x&0&-x\\0&0&-x\end{vmatrix}=-x\begin{vmatrix}x&0&-x\\0&x&-x\\0&0&-x\end{vmatrix}=x^4$$

(3) 应填 40。这里必须弄清楚矩阵相加是对应元素相加，而行列式相加，只有当某一行（列）不同、其余各行（列）都相同时，才能相加。

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4|\\&=8|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|\\&=8(|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|+|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|)\\&=8(4+1)=40\end{aligned}$$

(4) 应填$\dfrac{(-1)^{n-1}n!}{k}$。若依次求每个元素的代数余子式再求和，将会很麻烦，且由于 k 的任意性往往容易出错。如果注意到由代数余子式构成的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的关系借助于分块矩阵技巧的运用，问题将较易获得解决。

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&&&\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&n-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=(n)$，于是

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}&\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{B}^{-1}&\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&\frac{1}{n}\\1&0&\cdots&0&0\\0&\frac{1}{2}&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&\frac{1}{n-1}&0\end{bmatrix}$$

而$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{n-1}n!$，$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，所以

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{k1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \cdots & A_{k2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{kn} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^{n-1}n! \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

从而可知

$$A_{k1} + A_{k2} + \cdots + A_{kn} = \frac{(-1)^{n-1}n!}{k}$$

(5) 应填$1,2,\cdots,n-1$。很明显$f(x)$所对应的行列式为一个 Vandermonde 行列式，应用行列式的性质，即可得$f(x)=0$的全部根。

将$x = 1,2,\cdots,n-1$分别代入行列式，行列式有两列元素相同，其值为零，故$1,2,\cdots,n-1$是$f(x)=0$的根。又$f(x)$为$(n-1)$次多项式，最多只有$(n-1)$个实根，所以$1,2,\cdots,n-1$即为$f(x)=0$的全部根。

(6) 应填 0。该题是求 4 个代数余子式之代数和，若求出每个代数余子式再求其代数和则比较麻烦，其实本题只要应用行列式按行(列)展开公式就可很容易得到答案。由于

$$A_{12} - A_{22} + A_{32} - A_{42} = 1 \cdot A_{12} + (-1)A_{22} + 1 \cdot A_{32} + (-1)A_{42}$$

表示第 1 列元素与第 2 列对应元素的代数余子式乘积之和，由行列式按行(列)展开法，即知其值为 0，即$A_{12} - A_{22} + A_{32} - A_{42} = 0$。

【例 2】 选择题：

(1) 设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，且$|\boldsymbol{A}| = 0$，则$\boldsymbol{A}$中(　　)。

(A) 必有一列为零

(B) 必有两列对应成比例

(C) 必有一列向量是其余各列向量的线性组合

(D) 任一列向量是其余各列向量的线性组合

(2) 设$\boldsymbol{A}$是n阶非奇异方阵，k是非零常数，则$|k\boldsymbol{A}| =$(　　)。

(A) $k|\boldsymbol{A}|$　　(B) $|k||\boldsymbol{A}|$

(C) $k^n|\boldsymbol{A}|$　　(D) $|k^n||\boldsymbol{A}|$

(3) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是$n(n \geqslant 2)$阶方阵，则必有(　　)。

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$　　(B) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = -|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

(C) $|k\boldsymbol{A}| = k|\boldsymbol{A}|$　　(D) $|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$

(4) 设$f(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x \end{vmatrix}$，其可能的最高次数是(　　)。

(A) 1 次　　(B) 2 次

(C) 3 次　　(D) 4 次