数学物理方法

汪德新

华中理工大学出版社

数学物理方法

汪德新

华中理工大学出版社

(鄂)新登字第10号

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/汪德新

武汉:华中理工大学出版社,1997年8月

ISBN 7-5609-1621-X

Ⅰ.数…

Ⅱ.汪…

Ⅲ.数学物理方法 高等学校--教材

Ⅳ.O.172

数学物理方法

汪德新

责任编辑:佟文珍 李立鹏

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山 邮编:430074)

新华书店湖北发行所经销

武汉市青联彩印厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:14.5 字数:344 000

1997年8月第1版 1997年8月第1次印刷

印数:1-2 500

ISBN7-5609-1621-X/O·172

定价:13.50元

前　言

《数学物理方法》是学习理论物理学和众多应用科学的重要基础. 普通物理学可以说是一门"归纳的学科",它的数学工具是高等数学. 例如在电磁学中,通过大量的实验事实,归纳出库仑定律、毕奥-萨伐尔定律和法拉第电磁感应定律. 在这个过程中,使用高等数学就足够了. 而理论物理学可以说是一门"演绎的学科",在电动力学中,它通过提出位移电流假设,把电磁现象的规律概括为麦克斯韦方程组. 然后再将麦克斯韦方程组用于静电场、静磁场,用于电磁波的传播与电磁波的辐射,用于电磁场与粒子的相互作用,等等. 在这个过程中,高等数学就无能为力,必须应用数学物理方法. 尽管随着科学的不断发展,称为数学物理方法的内容成倍地增加,对于不同的学科,还不断产生不同的分支. 但本书所选择的内容仍然是学习"四大力学"最基本、最重要的内容,也是进一步学习其他不同分支的重要基础.

本书的宗旨是希望能给初学者提供一本深入浅出、学以致用的入门书. 为此,我们作了如下几个方面的考虑和努力:

1. 取材. 本书分为"复变函数论"和"数学物理方程"两篇. 并将以较大的篇幅叙述在物理学中有重要应用的泰勒级数与罗朗级数的展开方法,留数定理的应用,多值函数的积分,球函数和柱函数的性质及应用. 对于在电动力学和量子力学中应用很广的克隆尼克 δ 符号、狄拉克 δ 函数、行波法、平均值法、分离变量法、积分变换法、格林函数法和变分法,更给予特别的重视.

2. 体系. 本书的特点:一是在数理方程定解问题的讨论中,将按解法分类而不按方程的类型分类. 这样,可以避免同一方法的多次重复介绍. 二是把球函数和柱函数置于数学物理方程之前. 这样,可使正交曲线坐标系中分离变量法的叙述更加流畅,并通过与直角坐标系中分离变量法的横向对比,更鲜明地显示出它们在方法上的共同特征;同时,还将球函数和柱函数直接用于求解数理方程的定解问题,而不是仅仅停留在介绍这些函数的性质上.

3. 概念. 正确理解概念是建立与应用定理并灵活运用各种方法的重要基础. 我们致力于用实例形象地介绍基本概念. 例如,通过两个实例(第 10 页,第 13 页)说明函数在一点满足柯西-里曼条件,在一点可导和在一点解析的差异;通过实例(第 29 页)说明级数收敛和一致收敛的差异,等等.

4. 定理. 定理的证明力求突出证明的中心环节. 在处理数学的严谨性和实用性的关系上,我们更重视后者,但对于重要定理的严格证明,我们都开列了有关专著,供读者必要时参考. 例如,在柯西定理一的证明中介绍了前苏联著名数学家马尔库维奇的专著,在柯西定理三的证明中介绍了拉甫仑捷夫、沙巴特的专著.

5. 方法. 我们在介绍将函数展开成级数,实变函数的积分计算,以及求解数理方程的定解问题时,都全面地介绍了各种常用的方法. 并且在较复杂的例题中,都用小标题标出解题步骤,以利于初学者掌握求解各类典型题目的基本程序,使之能由特殊到一般,由掌握一个题目的解法上升到掌握一个类型题目的解法,以实现学以致用的目的.

6. 技巧. 本书通过定理的证明和例题的求解,介绍了各种各样的计算技巧,特别是理论物

理学常用的技巧和数学工具．例如，第 22 页的例 2 介绍了克隆尼克 δ 符号的使用，就使得罗朗系数唯一性的证明（第 39 页）和留数定理的证明（第 47 页）得到简化．此外，我们还说明了斯-刘本征值问题与量子力学中厄米算符本征值问题的关系（第 152 页），等等．熟识各种各样的计算技巧和理论物理常用的数学工具，对于现在和将来的学习都是有好处的．

7．前后呼应，融汇贯通．在求解数理方程的定解问题时，各章都对每一方法的基本思想和主要特点作了介绍，其后又利用多种方法求解同一问题以显示各种方法的特点，有利于知识的融会贯通．例如，"无界弦的自由振动"问题，分别采用行波法，分离变量法（经过奇延拓）和傅里叶变换法求解，得出同样的结果．又如，利用平均值法得到三维无界空间自由振动的泊松公式，后面利用格林函数法再次得到这个公式．再如格林函数的求法，我们分别用镜像法、傅里叶变换法、分离变量法、本征函数展开法和拉普拉斯变换法来求不同方程的格林函数，这不仅让读者掌握了多种求格林函数的方法，而且更是前面各章方法的综合运用．

8．公式推导有详有略．对于牵涉基本概念，基本方法以及技巧性比较强的地方，我们作出较为详细的推导；而对一般繁杂数学运算的地方，我们只给出文字的说明．这使得基础较薄弱的同学能够通过文字的导引自行把公式推出，锻炼了独立工作能力，既不感到跳跃，又不致行文累赘．

9．习题有四个层次的提示和答案．对于比较容易的题目，书后有答案；对稍难的题目，书后有提示和答案；对较难的题目，习题后面就有提示，书后有答案；对特别难的题目，书后有题解．这是为了适应不同基础的同学需要而特意安排的．

10．利用表格进行对比和小结．第 43 页、45 页、48 页、126 页、128 页、149 页、152 页、161 页等一系列的表格，对所介绍的内容及时进行对比和总结，有利于读者加深理解、便于记忆和灵活运用．

由于学时的关系，本书打 * 号的章节，也可以结合后续课程（电动力学、量子力学、固体物理、无线电物理）进行学习．

10 多年来，编者一直得到刘连寿教授的关心和帮助．在本书的编写过程中，又得到他的热情鼓励，在此表示深切的感谢．同时，编者还得到彭金生教授、李家荣教授和刘武教授的关心和鼓励，得到华中师范大学教务处和物理系领导的有力支持，得到编者早年在中山大学求学时的同窗好友朱鹤龄先生的鼎力相助，在此表示衷心的感谢．受华中理工大学出版社之托，廖晓昕教授、汪定雄教授和林化夷教授审阅了全书，在此表示由衷的谢意．最后，编者还要感谢华中理工大学出版社的大力支持和真诚合作．

由于编者水平有限，加之时间仓促，谬误之处在所难免，恳请读者批评指正．

编　者

1997 年 1 月 28 日

目　录

第一篇　复变函数论

第一章　复变函数和解析函数……………………………………………………（1）

§1.1.1　复数 ……………………………………………………………（1）
§1.1.2　复变函数 ………………………………………………………（5）
§1.1.3　复变函数的极限与连续 ………………………………………（7）
§1.1.4　复变函数的导数 ………………………………………………（9）
§1.1.5　解析函数…………………………………………………………（13）

第二章　复变函数的积分 …………………………………………………………（18）

§1.2.1　复变函数的积分…………………………………………………（18）
§1.2.2　柯西定理…………………………………………………………（20）
§1.2.3　柯西公式与高阶导数公式………………………………………（23）

第三章　复变函数的级数 …………………………………………………………（28）

§1.3.1　复变函数项级数…………………………………………………（28）
§1.3.2　幂级数……………………………………………………………（32）
§1.3.3　泰勒级数…………………………………………………………（34）
§1.3.4　罗朗级数…………………………………………………………（38）
§1.3.5　单值函数的孤立奇点……………………………………………（42）

第四章　留数定理及其应用 ………………………………………………………（47）

§1.4.1　留数定理…………………………………………………………（47）
§1.4.2　几类典型实积分的计算…………………………………………（52）
§1.4.3　物理学中的几个实积分…………………………………………（57）

第五章　解析延拓与黎曼面 ………………………………………………………（62）

§1.5.1　解析延拓　Γ函数………………………………………………（62）
§1.5.2　多值函数与黎曼面………………………………………………（65）

第六章 线性常微分方程的级数解法 球函数与柱函数 …………………………… (73)

§1.6.1 二阶线性齐次常微分方程的级数解法…………………………… (73)
§1.6.2 勒让德方程与勒让德多项式…………………………… (76)
§1.6.3 缔合勒让德方程与缔合勒让德函数…………………………… (84)
§1.6.4 贝塞耳方程与贝塞耳函数、诺埃曼函数、汉克耳函数…………………………… (87)
§1.6.5 虚宗量贝塞耳方程与虚宗量贝塞耳函数…………………………… (99)
§1.6.6 球贝塞耳方程与球贝塞耳函数 …………………………… (100)

第二篇 数学物理方程

第一章 定解问题…………………………… (103)

§2.1.1 波动问题 …………………………… (103)
§2.1.2 输运问题 …………………………… (107)
§2.1.3 稳定场问题 …………………………… (110)
§2.1.4 定解问题小结 …………………………… (113)

第二章 行波法与平均值法…………………………… (116)

§2.2.1 无界弦的自由振动 达朗贝尔公式及其推广 …………………………… (116)
* §2.2.2 三维无界空间的自由振动 泊松公式 …………………………… (120)

第三章 分离变量法…………………………… (123)

§2.3.1 直角坐标系中的分离变量法 …………………………… (123)
§2.3.2 柱坐标系中的分离变量法 …………………………… (134)
§2.3.3 球坐标系中的分离变量法 …………………………… (141)
§2.3.4 斯-刘型本征值问题…………………………… (147)

第四章 积分变换法…………………………… (154)

§2.4.1 傅里叶变换 …………………………… (154)
§2.4.2 傅里叶变换法 …………………………… (160)
§2.4.3 拉普拉斯变换 …………………………… (165)
§2.4.4 拉普拉斯变换法 …………………………… (171)

第五章 格林函数法…………………………… (174)

§2.5.1 δ函数 …………………………… (174)
* §2.5.2 格林函数法在稳定场问题中的应用 …………………………… (180)

* §2.5.3 格林函数法在输运问题中的应用 …………………………………………… (187)
* §2.5.4 格林函数法在波动问题中的应用 …………………………………………… (192)

第六章 变分法简介……………………………………………………………………… (197)

* §2.6.1 泛函的极值 ……………………………………………………………… (197)
* §2.6.2 里兹法 定态薛定谔方程的本征值问题 ………………………………… (200)

附录Ⅰ 二阶线性齐次常微分方程 $w''(z)+p(z)w'(z)+q(z)w(z)=0$ 的解 ………… (204)
附录Ⅱ 几种常用的常系数常微分方程的解……………………………………… (206)
附录Ⅲ 三角函数的正交关系……………………………………………………… (208)
附录Ⅳ 微分算符▽的若干常用公式……………………………………………… (209)
习题解答和答案…………………………………………………………………… (210)
参考书目…………………………………………………………………………… (220)

第一篇　复变函数论

第一章　复变函数和解析函数

复变函数的理论在物理学中有着广泛的应用.本章将介绍复变函数的定义,复变函数的极限、连续和导数等基本概念,并在此基础上引入解析函数,它是后面各章的理论基础.

§1.1.1　复　数

本节讨论复数的定义,复数的几何表示和运算规则.

(一) 复数的定义和基本概念

在实数范围内,代数方程 $x^2+1=0$ 没有解.如果把数域扩大,则可得到两个根:$x=\pm\sqrt{-1}$,我们把 $i=\sqrt{-1}$ 称为虚数单位,并规定它与实数在一起可进行通常的四则运算.

这样,形如 $x+iy$ 的数(其中 x,y 为实数)称为复数,x 与 y 分别称为复数 $z=x+iy$ 的实部与虚部,记作:

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z. \tag{1}$$

显然,$z=2+i0=2$ 是实数,而 $z=0+i4=4i$ 是纯虚数,$z=4+9i$ 是复数.也就是说,实数和纯虚数是复数的特殊情形.

当 $x_1=x_2,\ y_1=y_2$ 时,则称 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 相等.

当 $x_1=x_2,\ y_1=-y_2$ 时,则称 z_1 与 z_2 互为共轭复数,常用 z^* 表示 z 的共轭复数:

$$z=x+iy,\quad z^*=x-iy. \tag{2}$$

(二) 复数的几何表示

复数可以用复数平面与复数球面来表示.

1.复数平面表示法

在复数平面中可以引入笛卡尔直角坐标,也可以引入平面极坐标.

在使用直角坐标时,用点(x,y)表示复数 $z=x+iy$,例如用点$(4,9)$表示 $z=4+9i$,用点$(0,1)$表示 $z=i$,这样,xoy 平面上的一点(x,y)就与一个复数 $z=x+iy$ 相对应,而平面上所有的点就与全体复数一一对应,xoy 平面就称为复平面.

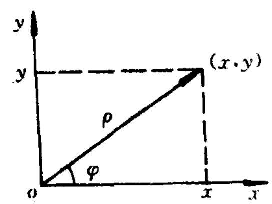


图　1.1.1

每一复数还可以用一个矢量来表示.矢量由坐标原点指向点(x,y),如图 1.1.1 所示,称为复矢量.

在使用平面极坐标时,复数平面上的点可用极坐标(ρ,φ)表示,它与 x,y 的关系为:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi. \tag{3}$$

从笛卡尔直角坐标变换到平面极坐标，就可从复数的代数表示式变换到三角表示式：

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{4}$$

这里 ρ 为复矢量的长度，称为复数的模：

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}; \tag{5}$$

φ 为复矢量与 x 轴的夹角，称为复数的辐角：

$$\varphi = \mathrm{Arg}z = \mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x}. \tag{6}$$

一个复数对应于无限多个辐角，设 φ_0 是其中的一个，则

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \cdots \tag{7}$$

通常用 $\arg z$ 表示辐角 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，主值的取值范围是：

$$0 \leqslant \arg z < 2\pi. \tag{8}$$

还应指出，复数 $z = 0$ 的辐角没有确定值，说"$z = 0$ 的辐角等于多少"是没有意义的.

下面举例说明从复数的代数表示式到三角表示式的变换.

【例 1】 求 $z = \sqrt{3} - i$ 的三角表示式.

解 由 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3+1} = 2$, $\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$. 取 $k = 0$，得

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

但有时不能忽略 $2k\pi$，例如在开方时就不能忽略，详见后述.

利用欧拉公式，还可将复数的三角表示式变换为指数表示式. 欧拉公式可以将 $e^{i\varphi}$ 展成麦克劳林级数而求得，

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos\varphi + i\sin\varphi. \end{aligned}$$

这样，复数的指数表示式即为

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}. \tag{9}$$

【例 2】 写出 $z = \sqrt{3} - i$ 的指数表示式.

解 $z = \sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)\right] = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)}$.

现在介绍复数的另一几何表示法.

2. 复数球面表示法

正如复数平面上的每一点与一个复数一一对应，因而可以用复数平面上的点表示复数一样；复数球面上的每一点也可以与一个复数一一对应，所以可以用复数球面上的点表示复数.

首先，过复数平面的坐标原点 o 作一个球面与复数平面相切(图 1.1.2). 然后过 o 作复平面的垂线交球面于 N 点，称作北极点. 再作射线 NP 交球面于 P' 点. 这样，球面上的 P' 点与平面上的 P 点一一对应，因而球面上所有的点也与全体复数一一对应. 由图 1.1.2 可见，复数平面上以 o 为圆心的圆 L 上的点与复数球面纬线 L' 上的点相对应，圆 L 内部的点与球面纬线 L'

下方的点相对应. 当平面上圆 L 的半径 $\rho \to \infty$ 时，球面上的纬线 L' 趋向球顶并缩成一点 N. 由此可见，复平面的无限远处，对应于球面上的一点 N. 在这个意义上，把复平面无限远处看成一个"点"，称为无穷远点.

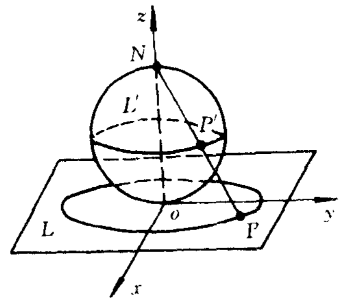


图 1.1.2

（三）复数的运算规则

(1) 加法 复数 z_1 和 z_2 的和定义为

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{10}$$

复数的几何意义是：两个复矢量的和遵守平行四边形法则(图 1.1.3). 从右图可以得到两个重要不等式：

$$|z_1| + |z_2| \geqslant |z_1 + z_2|$$

(三角形两边之和不小于第三边). (11)

$$|z_1 - z_2| \geqslant \left| |z_1| - |z_2| \right|$$

(三角形之一边不小于另两边之差). (12)

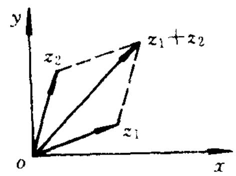


图 1.1.3

等号是在三角形变成直线时成立. 这些不等式在导出复变函数积分的基本性质时要用到.

(2) 减法 复数的减法是作为加法的逆运算来定义的. 若存在 z，使得 $z_2 + z = z_1$，则称为 z 为 z_1 与 z_2 之差，即

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \tag{13}$$

(3) 乘法 复数 z_1 与 z_2 的乘积定义为

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \tag{14}$$

特别是：$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$，即两共轭复数的乘积等于它们的模的平方(简称模方)：

$$zz^* = |z|^2. \tag{15}$$

利用复数的指数表示式计算复数的乘积，往往更为方便

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \tag{16}$$

两复数乘积的几何意义是将两复数的模相乘而辐角相加.

(4) 乘方 乘方可由乘法规则得到，用 n 个 z 相乘

$$z^n = \rho^n e^{in\varphi}. \tag{17}$$

【例 3】 试证明棣摩弗公式

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{18}$$

证 将 $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ 及欧拉公式 $e^{in\varphi} = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ 代入(17)式两边，即有：

$$\rho^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

再令 $\rho = 1$，即为棣摩弗公式.

【例 4】 试用 $\cos\varphi$ 及 $\sin\varphi$ 表示 $\cos n\varphi$ 及 $\sin n\varphi$.

解 在棣摩弗公式中，利用牛顿二项式展开 $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$，即有

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k \sin^k\varphi \cos^{n-k}\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k n!}{k!(n-k)!} \sin^k\varphi \cos^{n-k}\varphi.$$

令两边实部与虚部分别相等，即可用 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 表示 $\cos n\varphi$ 和 $\sin n\varphi$，请读者自行完成.

(5) **除法**　复数的除法是作为乘法的逆运算来定义的，若存在 z，使得 $z_2z=z_1$，则称 z 为 z_1 除以 z_2 所得之商：

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{19}$$

同样，利用复数的指数表示式将更方便．

$$z=\frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{20}$$

(6) **开方**　复数的开方是乘方的逆运算.

将 $z_0=\rho_0 e^{i\varphi_0}$ 开 n 次方，就是求满足方程 $w^n=z_0$ 的复数 w，记作 $w=\sqrt[n]{z_0}$.

为此，设 $w=\rho e^{i\varphi}$，将 w 及 z_0 代入 $w^n=z_0$，即有 $\rho^n e^{in\varphi}=\rho_0 e^{i\varphi_0}$. 由此得到

$$\rho^n=\rho_0,\ 即\quad \rho=\sqrt[n]{\rho_0};\quad n\varphi-\varphi_0=2k\pi,\ 即\quad \varphi=\frac{\varphi_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}(k\ 为整数).$$

由 $w=\rho e^{i\varphi}$ 可见，$k=0$ 与 $k=n$ 得到的 w 相同，$k=1$ 与 $k=n+1$ 得到的 w 相同…. 只有当 $k=0,1,\cdots,n-1$ 时，得到的 w 是不同的，即仅有 n 个不同的 w 值满足 $w^n=z_0$. 这样，复数的 n 次根有 n 个不同值

$$w=\sqrt[n]{z_0}=\sqrt[n]{\rho_0}e^{i\left(\frac{\varphi_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},\quad k=0,1,\cdots,n-1. \tag{21}$$

【例 5】　已知 $z_0=\sqrt{2}(1+i)$，求 $\sqrt[4]{z_0}=?$

解　首先写出 z_0 的指数表示式

$z_0=\sqrt{2}(1+i)=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$，$k$ 为整数.

$\sqrt[4]{z_0}=\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)}$，$k=0,1,2,3.$

四个不同的根是

$w_0=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{16}}$，　$w_1=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{9\pi}{16}}$，

$w_2=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{17\pi}{16}}$，　$w_3=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{25\pi}{16}}$.

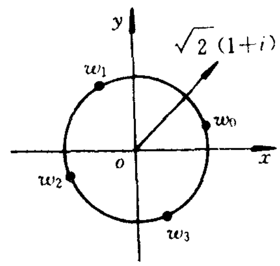


图　1.1.4

习　题　1.1.1

1. 设 z 是复数，且 $|z|=1$，求证 $w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ 是实数，且 $-1\leqslant w\leqslant 1$.

2. 写出下列各复数的三角表示式和指数表示式：

(1)　$\sqrt[3]{i}$；　(2)　e^{1+i}；　(3)　$1-i\sqrt{3}$；　(4)　$\sqrt{a+ib}$.

3. 根据棣摩弗公式用 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 表示 $\cos 4\varphi$ 和 $\sin 4\varphi$.

4. 求证：

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\varphi=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi-\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}};\qquad \sum_{k=1}^{n}\sin k\varphi=\frac{-\cos(n+\frac{1}{2})\varphi+\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

§ 1.1.2　复变函数

本节介绍复变函数的定义、区域的概念以及常用的初等复变函数.

（一）复变函数的定义

当复数 $z = x + iy$ 在复平面上变动时，复数 $w = u + iv$ 的值随 z 的值而变，则称 w 为 z 的函数，z 称为 w 的自变量(或宗量)，记作

$$w = f(z). \tag{1}$$

如果一个 z 值仅对应一个 w 值，则 $w = f(z)$ 称为单值函数，否则称为多值函数. 前几章我们只讨论单值函数，多值函数留在第四章中讨论.

（二）区域

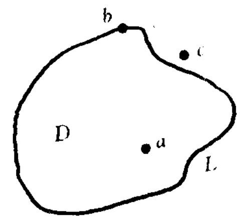


图　1.1.5

在复变函数中，自变量取值的范围是复平面上的区域，称为复变函数的定义域，如图1.1.5所示. 开区域 D 是指边界线 L 所包围的区域，闭区域 $\overline{D}$ 是指 D 加上边界线 L.

为了给出区域严格的定义，必须先介绍如下几个概念.

(1) 点 a 的 ε 邻域：是指以复数 a 为圆心，任意小的正实数 ε 为半径的一个开圆，即满足 $|z - a| < \varepsilon$ 的点的集合. 今后还会遇到 $0 < |z - a| < \varepsilon$ 的点的集合(不包含点 a)，它称为点 a 的无心邻域(见 § 1.3.5).

(2) 内点：若某点的 ε 邻域中所有的点属于 D，则该点称为 D 的内点，如图1.1.5中的 a 点.

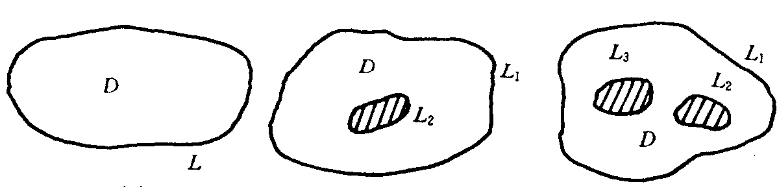
(3) 边界点：若某点不属于 D，但其 ε 邻域内含有属于 D 的点，则该点称为 D 的边界点. 如图1.1.5中的 b 点. 所有边界点组成的曲线 L 就是区域 D 的边界线，它属于 $\overline{D}$ 而不属于 D.

(4) 外点：若某点不属于 D，且其 ε 邻域内不含 D 的点，如图1.1.5中的 c 点.

这样，开区域 D 可定义为复平面上具有下述两个性质的点集：(1) 每一点都是内点(开集性)；(2) 任意两点都可用一条由点集 D 的点组成的曲线连接(连通性).

例如：$|z| < R$ 是以 $z = 0$ 为圆心、R 为半径的一个开圆，称开区域 D；$|z| = R$ 是以 $z = 0$ 为圆心、R 为半径的圆周，称开区域 D 的边界线 L；$|z| \leqslant R$ 是以 $z = 0$ 为圆心、R 为半径的闭圆，称闭区域 $\overline{D}$. 通常还把不包括无穷远点的整个平面称为全平面，把包括无 4 穷远点的整个平面称为闭平面.

区域还有单通区域和复通区域之别. 在图1.1.6中，图(a)中边界由一条闭合曲线 L 组成；



(a)　　(b)　　(c)

图　1.1.6

图(b)中边界由二条不相连接的闭合曲线 L_1 和 L_2 组成；图(c)中边界由三条不相连接的闭合曲线 L_1、L_2 和 L_3 组成. 它们分别称为单通区域，双通区域和三通区域.

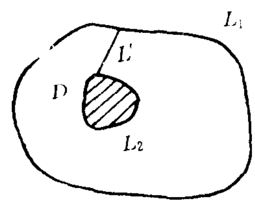


图 1.1.7

区域不相连接的边界数目 n 称为连通阶数. $n=1$ 的区域称为单通区域，$n>1$ 的区域称为复通区域. 两者的本质区别在于，区域中任一闭合曲线能否连续变形而缩成一点. 所谓"连续变形"是指变形时不能通过不属于 D 的区域(如图 1.1.6 中标有斜线的区域).

为了降低区域的连通阶数，只要作割线将两条边界线连接起来，如图 1.1.7 所示. 割线 L' 使原先的复通区域变成单通区域. 在第二章，常常利用这个方法把在单通区域成立的定理推广到复通区域中去.

(三) 复变函数的几何意义 —— 由 Z 平面到 W 平面的映射

设 $w=f(z)$ 是在区域 D 中的单值函数，即 Z 平面上的一点 $z=x+iy$ 与 W 平面上的一点 $w=u+iv$ 相对应.

例如，对于复变函数 $w=f(z)=z+1$ 来说，Z 平面上的 $z=1+i$ 点与 W 平面上的 $w=z+1=2+i$ 点相对应(见图 1.1.8). 当 z 在 Z 平面上沿某一曲线 L 变动时，与它相应的 w 也将在 W 平面沿另一曲线 L' 变动. 曲线 L 与 L' 上的点根据 $w=f(z)$ 的关系一一对应. 这种对应关系称为由 Z 平面到 W 平面的一个映射，这就是复变函数的几何意义.

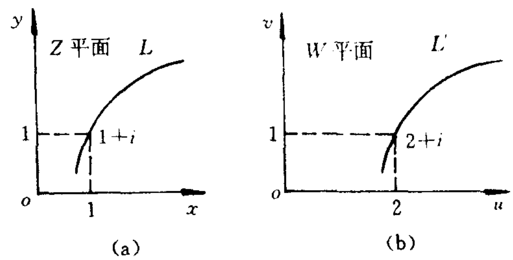


图 1.1.8

(四) 初等复变函数

初等复变函数是初等实变函数的自然推广，只要把实变函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 和函数 y 分别改为复自变量 z 和复函数 w 即可：$w=f(z)$. 这里只着重指出它的新性质.

(1) 多项式：　$w=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k$，　　有理函数：　$w=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k/\sum\limits_{l=0}^{m}b_lz^l$，

其中 m、n 为正整数，所有的 a_k，b_l 为常复数.

(2) 根式函数：　$w=\sqrt{z-a}$，它是多值函数，留在第四章讨论.

(3) 指数函数：　$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$，它是周期为 $2\pi i$ 的周期函数.

(4) 正弦函数：　$\sin z=\dfrac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$，　余弦函数：　$\cos z=\dfrac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$.

它们是周期为 2π 的周期函数. 它们的模 $|\cos z|$ 和 $|\sin z|$ 可以大于 1. 实际上，令 $z=iy$，$\cos z=\cos(iy)=\dfrac{1}{2}(e^{-y}+e^{y})$. 当 $y\to\infty$ 时，$\cos(iy)\to\infty$，即 $|\cos z|$ 无界.

(5) 双曲正弦函数：$\mathrm{sh}z=\dfrac{1}{2}(e^z-e^{-z})$，　双曲余弦函数：$\mathrm{ch}z=\dfrac{1}{2}(e^z+e^{-z})$，

它们是周期为 $2\pi i$ 的周期函数，与指数函数 e^z 相同，这不难从它们的定义看出，它们与三角函数的关系见习题 4 的(1)、(2).

(6) 对数函数：　$\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z$ 是多值函数，$\ln z=\ln|z|+i\arg z$ 是 $\mathrm{Ln}z$ 的主值支，

留在第四章讨论. 但应指出，当 z 取负值时，$\mathrm{Ln}z$ 为复数，仍有意义，这是与实变函数不同的地方.

【例】 求 $\mathrm{Ln}(-8)=?$

解 $\mathrm{Ln}(-8)=\ln|-8|+i\mathrm{Arg}(-8)=\ln 8+i(\pi+2k\pi),\quad k=0,\pm 1,\cdots$

(7) 幂函数：$z^s=e^{s\ln z}$（s 为复数）.

习 题 1.1.2

1. 试在复平面上画出下述点集的位置：

(1)$\mathrm{Re}(z^2)>\frac{1}{2}$；　(2)$0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4}$；　(3)$|z+3|+|z-3|=10$；　(4)$\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1$.

提示：要将模或辐角的不等式变成关于 x、y 的不等式.

2. 求在 $w=\frac{1}{z}$ 下，直线 $\mathrm{Re}z=c$（常数）映射为怎样的图形？

3. 试证明，对任何实数 x，有 $e^{ix}\neq 0$.

4. 计算下列数值：

(1)$\cos(ix)$；　(2)$\mathrm{ch}(ix)$；　(3)$\sin(a+ib)$，其中 a,b 为实常数；(4)$\mathrm{Ln}(-i)$；　(5)$\mathrm{Ln}\sqrt{-5}$.

§1.1.3 复变函数的极限与连续

本节讨论复数序列的极限，复变函数的极限和复变函数的连续性.

（一）复数序列的极限

设 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是复数序列，记作 $\{z_n\}$. 若任给实数 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使当 $n>N$ 时，有

$$|z_n-z_0|<\varepsilon, \tag{1}$$

则称 $\{z_n\}$ 以 z_0 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}z_n=z_0\quad（或 z\to z_0）. \tag{2}$$

序列极限概念有明显的几何意义：以 z_0 为中心，ε 为半径作一个圆 C_ε. 因为 $|z_n-z_0|$ 表示 z_n 点与 z_0 点的距离，当 $n>N$ 时，$|z_n-z_0|<\varepsilon$ 表示满足 $n>N$ 的所有 z_n 都进入圆 C_ε 内. 既然圆 C_ε 的半径是任意小的正实数，这样对于 $n>N$ 的 n，z_n 要多么接近 z_0 就多么接近 z_0，这就是复数序列 $\{z_n\}$ 以 z_0 为极限的几何意义.

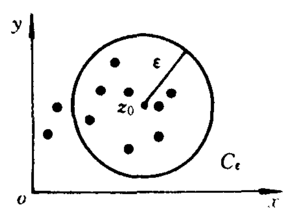


图 1.1.9

（二）复变函数的极限

设 $w=f(z)$ 是在区域 D 中定义的单值函数. 如果任给实数 $\varepsilon>0$，存在实数 $\delta>0$，当 D 内的 z 满足 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$|f(z)-w_0|<\varepsilon, \tag{3}$$

则称 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时有极限 w_0，记作：

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0. \tag{4}$$

从上面的定义可见，无论 z 以任何方式趋于 z_0 时，$f(z)$ 均趋于 w_0.

复变函数极限的几何意义是：当 z 在 Z 平面进入以 z_0 为圆心、δ 为半径的圆 C_δ 内时，相应的 $w=f(z)$ 就在 W 平面进入以 w_0 为圆心、ϵ 为半径的圆 C_ϵ 内（见图 1.1.10）．简单地说，当 z 进入 z_0 的 δ 邻域中时，相应的 $w=f(z)$ 就进入 w_0 的 ϵ 邻域．

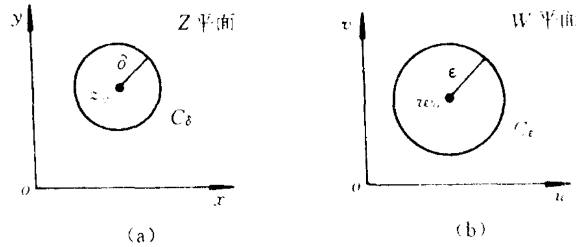


图 1.1.10

复变函数极限的性质也是实变函数极限性质的自然推广．若 $\lim\limits_{z\to z_0}f$ 及 $\lim\limits_{z\to z_0}g$ 存在，则

$$\lim_{z\to z_0}(f\pm g)=\lim_{z\to z_0}f\pm\lim_{z\to z_0}g, \tag{5}$$

$$\lim_{z\to z_0}(fg)=\lim_{z\to z_0}f\cdot\lim_{z\to z_0}g, \tag{6}$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f}{g}=\lim_{z\to z_0}f/\lim_{z\to z_0}g\quad(\lim_{z\to z_0}g\neq 0). \tag{7}$$

（三）复变函数的连续性

设 $w=f(z)$ 是在区域 D 中定义的单值函数，并且 z_0 为 D 的内点．如果任给实数 $\epsilon>0$，存在实数 $\delta>0$，使当 D 内的 z 满足 $|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$|f(z)-f(z_0)|<\epsilon, \tag{8}$$

也就是说（参看复变函数极限的定义），

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0), \tag{9}$$

则称函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 处连续．

由极限的定义可知，这里同样要求当 z 以任何方式趋于 z_0 时，$f(z)$ 均应趋于 $f(z_0)$．

其次，由于 $f(z)$ 是 x、y 的函数，所以 $w=u+iv$ 也是 x、y 的函数．$f(z)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续与 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处连续是等价的．

第三，在实变函数中有关连续函数的性质，对于复变函数来说，也同样成立．特别是，若 $f(z)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，则 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上一致连续．①

【例】 设函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续，且 $f(z_0)\neq 0$．求证：可以找到 z_0 的一个邻域，函数在此邻域内取值不为零．

证 因为 $f(z_0)\neq 0$，可取 $\epsilon=\frac{1}{2}|f(z_0)|>0$．由 $f(z)$ 在 z_0 点连续，故存在 $\delta>0$，使当 $|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-f(z_0)|<\frac{1}{2}|f(z_0)|$，利用 §1.1.1 中式(12)，可得

$$\frac{1}{2}|f(z_0)|>|f(z)-f(z_0)|\geqslant\big||f(z_0)|-|f(z)|\big|\geqslant|f(z_0)|-|f(z)|.$$

移项，即有

$$|f(z)|>|f(z_0)|-\frac{1}{2}|f(z_0)|=\frac{1}{2}|f(z_0)|>0,$$

① 一致连续的定义：如果任给实数 $\epsilon>0$，存在一个实数 $\delta>0$，使当闭区域 $\overline{D}$ 内的任意两点 z' 和 z'' 满足 $|z'-z''|<\delta$ 时，有

$$|f(z')-f(z'')|<\epsilon,$$

则称 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D}$ 内一致连续．

即在 z_0 的 δ 邻域内 $f(z) \neq 0$.

习　题　1.1.3

1. 试问下列极限值是否存在？

(1) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^*}{z}$;　　(2) $\lim\limits_{z\to 1+i}\dfrac{z-i}{z+1}$;　　(3) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{1}{1+z^2}$.

2. 试问下列函数在全平面是否连续？

(1) $w=z^4$,　　(2) $w=|z|$;　　(3) $w=\dfrac{5z-4}{z-1}$.

§1.1.4　复变函数的导数

本节介绍导数的定义，导数存在的必要条件和充要条件，以及导数的几何意义.

(一) 导数的定义及导数公式

设 $w=f(z)$ 是在区域 D 中定义的单值函数，对 D 内某一点 z，若极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{1}$$

存在，则称 $f(z)$ 在点 z 可导，并称这个极限值为 $f(z)$ 在点 z 的导数，记作 $f'(z)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}$.

由极限的定义可知，Δz 不论以任何方式趋于零，(1) 式均应趋于同一有限的极限值.

其次，从(1) 式还可看到，导数存在要求 $f(z)$ 在点 z 连续，否则当 $\Delta z\to 0$ 时，$f(z+\Delta z)-f(z)$ 不趋于零，(1) 式不可能趋于有限的极限值.

【例 1】 试由定义出发计算 $f(z)=z^n$ 的导数.

解　$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left[z^n+nz^{n-1}\Delta z+\dfrac{1}{2}n(n-1)z^{n-2}(\Delta z)^2+\cdots+(\Delta z)^n\right]-z^n}{\Delta z}=nz^{n-1}.$$

由于复变函数导数的定义与实变函数导数的定义在形式上完全相同，所以实变函数的所有导数公式都可以推广到复变函数中来. 例如，当 $f_1'(z)$ 及 $f_2'(z)$ 都存在时，有

$$[f_1(z)\pm f_2(z)]'=f_1'(z)\pm f_2'(z), \tag{2}$$

$$[f_1(z)f_2(z)]'=f_1'(z)f_2(z)+f_1(z)f_2'(z), \tag{3}$$

$$\left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]'=\frac{f_1'(z)f_2(z)-f_1(z)f_2'(z)}{[f_2(z)]^2}, \text{其中 } f_2(z)\neq 0, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}f[\xi(z)]}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\,\frac{\mathrm{d}\xi(z)}{\mathrm{d}z}. \tag{5}$$

而且，与实变函数相似，函数 $w=f(z)$ 的微分记作

$$\mathrm{d}w=\mathrm{d}f(z)=f'(z)\mathrm{d}z. \tag{6}$$

(二) 柯西 - 黎曼条件(C-R 条件)

$f(z)$ 在点 z 可导的必要条件是 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 存在，并且下述 C-R 条件成立：