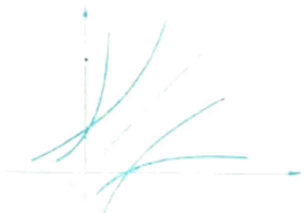
商业技工学校试用教材

商业应用数学

（下 册）



董利青 主编

黑龙江科学技术出版社

（黑）新登字第2号

责任编辑：张永嘉
封面设计：刘连生

商业应用数学（下册）
主编　董利清

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区建设街35号）
黑龙江省教育委员会印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 7.5印张 150千字
1993年2月第1版·1993年2月第1次印刷
印数：1—10000册　　定价：3.80元
ISBN　7-5388-2062-0/F·210

目　　录

第八章　概　　率

本章介绍一些概率的初步知识。随着科学技术和生产的飞速发展，概率作为人们认识世界和改造世界的一种数学工具，近年来得到了迅速的发展和广泛的应用。

§8·1　随机事件

一、随机现象与随机试验

现实生活中有这样一类现象，如某人射击一次，可能中靶，也可能不中靶；购买一张贴花奖，可能中奖，也可能不中奖；抛一枚硬币，其结果可能出现正面，也可能出现反面；一批新产品投放到市场，可能是滞销，也可能是畅销等等。这些例子就是随机现象。在一定的条件下，可能发生也可能不发生的现象称为**随机现象**。随机现象就一次试验（或观察）来说，其结果虽然难以肯定，但在大量重复试验或观察中，又具有某种统计规律性。例如，多次重复抛一枚硬币得正面朝上，反面朝上的次数大约各占一半。

我们对随机现象进行观察和试验。例如，在一定条件下，抽检一件产品；投放市场一批新产品试销；记录某电话交换台一分钟内接到的呼唤次数等，叫做做了一次试验。上述每一次试验的共同特点是：

（1）试验可以在相同的条件下重复进行；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

（2）试验的所有可能的结果是明确可知的，并且不止一个；

（3）每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但在试验之前却不能肯定这次试验会出现那一个结果。

我们把满足上述三个条件的一个试验，称为**随机试验**。简称试验，一般用E表示。

二、随机事件

在随机试验E中，可能发生，也可能不发生的事件，称为**随机事件**。随机试验E的每一个可能结果，称为**基本事件**。所有基本事件的全体称为**基本事件组**。由若干基本事件组合而成的事件称为复合事件。

例如，有一家邮购商店要研究定单发送是否及时的情况。假如在接到定单以后两天之内发出算是及时发送，两天以后发出就算推迟发送。如果它的所有定单发送情况由下列四种情况组成：（1）当天发送；（2）第二天发送；（3）第三天发送；（四）第四天发送。那么，观察定单的发送情况就是随机试验；每一次观察的结果是一个随机事件；这里随机事件只有四种可能的结果；每一种结果就是一个基本事件。“及时发送”这一事件由“当天发送”与“第二天发送”这两个基本事件组成，所以是一个复合事件。同样，“推迟发送”这一事件是由“第三天发送”与“第四天发送”这两个基本事件组成，也是一个复合事件。

通常把随机事件，简称**事件**，对不同的事件一般用不同的符号A、B、C，…等表示。

在随机试验E中，必然会发生的事情，叫做**必然事件**，记作Ω。

在随机试验E中，不可能发生的事件，叫做**不可能事**

件，记作Φ。

例如，（1）在一批商品中抽出一件商品既是正品又是次品。显然这种试验的结果是不可能事件。这个事件是“抽出一件商品既是正品又是次品”，条件为“在一批商品中抽出一件商品”。

（2）投掷一次骰子，向上的一面是4点。

显然这种试验的结果是随机事件。这个事件是“向上一面是4点”，条件为“投掷一次骰子，观察向上的一面”。

（3）在一批商品中任取一件，这一件商品是一级品。

显然这种试验的结果是随机事件，这个事件是“抽出一件商品是一级品”，条件是“在一批商品中抽出一件商品”。

（4）在实数范围内任取两个实数a、b，有$a+b=b+a$成立。

显然这种试验的结果是必然事件。这个事件是“$a+b=b+a$”。条件是“a、b都是实数”。

习　题　8·1

1．举出实际生活中随机事件、不可能事件、必然事件的例子。

2．在下列各题中，哪些是随机事件，哪些是不可能事件，哪些是必然事件，并指出这些事件的条件。

（1）在一批尽是一级品的商品中，抽出一件商品是二级品。

（2）投掷一次硬币，向上是正面；

（3）在一批商品中任取一件，这件商品是次品；

（4）在实数范围内，方程$ax^2+bx+c=0$当$b^2-4ac>0$有两个实数根。

3．一百货商店搞有奖销售，规定从公布获奖号码之日

起，四天之内来领奖算是有效，四天后就算自动放弃。如果有领奖者的情况由下列六种情况组成：（1）当天领奖的；（2）第二天领奖的；（3）第三天领奖的；（4）第四天领奖的；（5）第五天领奖的；（6）第六天领奖的。试指出这里领奖的随机事件有几种可能结果和“能领到奖者”与“不能领到奖者”事件是由哪些基本事件组成。

§8·2 概率的定义

一、古典概率的定义

有一商店的搪瓷柜进了10个型号相同的杯子，其中一等品6个，二等品3个，三等品1个。从中任取1个，取到各个杯子的可能性是相等的。由于是从10个杯子中任取1个，那么基本事件总数为10。又由于其中6个一等品，设事件A为“取到一个杯子是一等品”，因此有利于事件A的基本事件数为6。所以，取到一等品的可能性大小是$P(A)=\frac{6}{10}$。同理，设事件B为“取到一个杯子是二等品”，则事件B的可能性大小为$P(B)=\frac{3}{10}$。设事件C为“取到一个杯子是三等品”，则事件C的可能性大小是$P(C)=\frac{1}{10}$。

一般地，**如果一次试验的基本事件总数是n种，其中有利于事件A的基本事件数是m种，并且这些基本事件的发生有相等的可能性，那么事件A的概率$P(A)=\frac{m}{n}$。**

由上述概率的古典定义可知，概率有下面的性质：

（1）一个必然事件Ω的概率是1

$P(\Omega)=1$

（2）一个不可能事件Φ的概率是0

$P(\Phi)=0$

（3）任何一个随机事件A的概率$P(A)$满足

$0\leq P(A)\leq 1$

例1 在100件商品中有99件合格，有一件次品。随机地从100件商品中抽取两件，问两件都是合格品的概率是多少？

解：设事件A为“任抽两件都是合格品”。基本事件总数是100件中任取2件的组合数是C_{100}^2。

有利于事件A的基本事件数是从99件合格品中任取2件的组合数，即C_{99}^2，因此，事件A的概率为

$$P(A)=\frac{C_{99}^2}{C_{100}^2}=\frac{99\times 98}{100\times 99}=\frac{49}{50}=98\%。$$

答：取出两件都是合格品的概率是98%。

例2 一时装店的包装盒中装有红、黄、兰、绿、紫的衬衣各一件，求

（1）从中取出1件有颜色的衬衣的概率。

（2）从中取出2件同色的衬衣的概率。

解：设事件A为“取出1件有颜色的衬衣”。因为从装有红、黄、兰、绿、紫衬衣各1件的盒中取出1件有颜色的衬衣是必然事件，所以A为必然事件。由概率的性质知：

$P(A)=P(\Omega)=1$

（2）设事件B为“取出2件同色的衬衣”。因为从装有红、黄、兰、绿、紫衬衣各1件的盒中取出2件同色的衬衣是不可能事件。所以B为不可能事件。由概率的性质知：

$P(B)=P(\Phi)=0$

由古典概率定义可知，对于古典概型问题，往往不必通过试验去求其概率，要解这类问题，只要求出基本事件总数n和有利于事件A的基本事件数m，就可以直接求得其结果。

即$$P(A)=\frac{\text{有利于事件}A\text{的基本事件数}}{\text{基本事件总数}} \qquad (8-1)$$

例3　20件一叠的羊毛衫中有2件是次品，从中随机地接连取出3件，取后不放回，试求第三次取出的羊毛衫是次品的概率。

解：设事件A为"第三次取出的羊毛衫是次品"。

由于从20件中随机地接连取出3件，取后不放回，是不重复排列。于是，基本事件总数为P_{20}^3。第三次取得的1件为次品，可以从2件次品中任选1件，有C_2^1种取法，前2件可以从其余19件中取出，有P_{19}^2种取法，从而有利于事件A的基本事件数为$C_2^1 P_{19}^2$。

所以
$$P(A)=\frac{C_2^1 P_{19}^2}{P_{20}^3}=\frac{2}{20}=0.1$$

答：第三次取出的羊毛衫是次品的概率是0.1

二、概率的统计定义

某商店要安排某个季节商品的进货量，需要了解这个季节商品的销售率，保险事业的发展，需要了解某一年龄组人口的死亡率。这类随机现象显然不能由古典概率来计算，需要根据大量的统计数据来确定。

例如，历史上有人对掷硬币出现正面的情况进行实验，其结果如下：

试验者	掷硬币的次数	出现正面次数	频　率
蒲　丰	4041	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

出现正面的频率在0.5附近摆动。

又如，对生产的一批乒乓球进行抽查，结果如下表所示：

抽　球　数　n	50	100	200	500	1000	2000
优等品数　m	45	92	194	470	954	1902
优等品频率　$\frac{m}{n}$	0.9	0.92	0.97	0.94	0.954	0.951

我们看到，当抽查的球数很多时，抽到优等品的频率$\frac{m}{n}$（优等品的个数m与抽取的球数n的比）接近于常数0.95，在它附近摆动。

一般地，在不变的条件下重复进行n次实验，事件A发生的频率$\frac{m}{n}$围绕某一常数P上下摆动，且随着n的增大，摆动的幅度随之减小，逐步趋于稳定。这个频率的稳定值P称为事件A出现的概率。因此当概率未知而n又相当大的情况下，可以**用频率$\frac{m}{n}$去估计事件A的概率$P(A)$**。

概率的统计定义和古典定义是一致的。例如，掷一个均匀的硬币，按照概率的古典定义，在一次投掷时，出现“正面向上”和“背面向上”的可能性相等。故其概率均为

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$\frac{1}{2}$。这与试验的统计结果是相一致的。即随着试验次数增大时出现"正面向上"和"背面向上"的频率都逐渐接近于$\frac{1}{2}$。

根据概率的古典定义推导出的概率性质，对统计定义的概率也是适用的。

习　　题 8·2

1. 从生产的一批螺钉中抽取1000个进行检查，结果有4个是次品，那么从中任取一个螺钉，取到次品的概率是多少?

2. 袋中装有3个白球，4个黄球，5个红球。从中任取3个球时，求下列事件发生的概率：

（1）白、黄、红球各1个；

（2）恰有两个白球；

（3）至少有2个白球。

3. 有100张编了号的卡片（从1号到100号），从中任取1张。计算：（1）卡片号是奇数的概率；（2）卡片号是7的倍数的概率。

4. 掷两颗骰子，求下列事件发生的概率：

（1）两颗都出现六点；

（2）两颗出现的点数之和小于或等于4；

（3）两颗出现的点数之积大于15；

（4）两颗出现的点数都是3的倍数。

§8·3　互斥事件有一个发生的概率

一、互斥事件

在一次随机试验中，如果事件A与事件B不能同时发生，即$A\cap B=\Phi$，则称事件A与事件B为**互斥事件**（或互不相容事件）。

例如，某射击手进行一次射击，若用A表示射中靶板上的A环这一事件，用B表示射中靶板上的B环这一事件，在一次射击中，事件A和事件B不可能同时发生，这样的事件就是互斥事件。

如果A和B是互斥事件，我们用符号$A+B$表示A或B出现。如果A、B和C是互斥事件，那么A或B或C出现就记作$A+B+C$，其余类推。

二、加法法则

考察例子：

商店购进某商品30箱，其中由A厂生产的9箱，B厂生产的10箱，C厂生产的11箱。现从30箱商品中任取一箱，这箱是A厂、B厂或C厂的产品的事件分别记作A、B和C，显然A、B、C互斥。由概率的古典定义有

$$P(A)=\frac{9}{30},\quad P(B)=\frac{10}{30},\quad P(C)=\frac{11}{30}。$$

如果从中任取出一箱，这一箱是A厂或B厂生产的产品的事件记为$A+B$，在A、B互斥的条件下，有利于$A+B$发生的基本事件数是19，且A厂为9，B厂为10，不会重合。由概率的古典定义有

$$P(A+B)=\frac{19}{30}=\frac{9}{30}+\frac{10}{30}=P(A)+P(B)。$$

取出的这一箱是A厂或C厂生产的产品事件记为$A+C$，同理得：

$$P\ (A+C)\ =\frac{20}{30}=\frac{9}{30}+\frac{11}{30}=P\ (A)\ +P\ (C)$$

取出的这一箱是 B 厂或 C 厂生产的产品的事件记为 $B+C$，同理得：

$$P\ (B+C)\ =\frac{21}{30}=\frac{10}{30}+\frac{11}{30}=P\ (B)\ -P\ (C)\ 。$$

从上面的例子可以得到如下的法则：

加法法则：**若任意两个互斥事件为A与B，则A或B发生的概率，即事件$A+B$发生的概率，等于事件A、B分别发生的概率之和。即**

$$\boldsymbol{P\ (A+B)\ =P\ (A)\ +P\ (B)} \qquad (8—2)$$

一般地，**如果事件A_1，$A_2\cdots A_n$彼此互斥，那么事件$A_1+A_2+\cdots A_n$发生（即A_1，A_2，$\cdots A_n$中有一个发生）的概率，等于这n个事件分别发生的概率的和，即**

$$\boldsymbol{P\ (A_1+A_2+\cdots A_n)}$$
$$\boldsymbol{=P\ (A_1)\ +P\ (A_2)\ +\cdots+P\ (A_n)}\ 。\qquad (8—3)$$

例 1　某工厂的产品分为一级品、二级品、三级品三个等级，在正常条件下，出现二级品的概率是 7 %，出现三级品的概率是 3 %，其余都是一级品．求出现非一级品的概率。

解：设事件 A 为“抽验的一只产品是二级品”，事件B为“抽验的一只产品是三级品”。那么事件 $A+B$ 为“抽验的一只产品是非一级品”。由于在一次抽验 A与 B 不可能同时发生，即A与B是互斥的，所以

$$P\ (A+B)\ =P\ (A)\ +P\ (B)=7\%+3\%=10\%$$

答：出现非一级品的概率为10%。

例 2　在20件商品中，有15件一级品，5 件二级品。从中

任取3件，求其中至少有1件为二级品的概率。

解：设事件A_1为"任取3件其中恰有1件二级品"；事件A_2为"任取3件其中恰有2件二级品"，事件A_3为"任取3件全是二级品"。这样，事件A_1，A_2，A_3的概率分别是

$$P(A_1)=\frac{C_5^1\cdot C_{15}^2}{C_{20}^3}=\frac{105}{228};$$

$$P(A_2)=\frac{C_5^2\cdot C_{15}^1}{C_{20}^3}=\frac{30}{228};$$

$$P(A_3)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{2}{228}$$

显然，事件A_1、A_2、A_3彼此互斥，所以3件商品中至少有1件为二级品的概率是

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+A_3)&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\\&=\frac{105}{228}+\frac{30}{228}+\frac{2}{228}\\&=\frac{137}{228}\end{aligned}$$

答：3件商品中至少有1件为二级品的概率是$\frac{137}{228}$。

三、对立事件的概率

从20件商品中任取3件，或者都是一级品，或者不都是一级品（即其中至少有一件是二级品），这两个互斥事件必有一个发生。这种**其中必有一个发生的两个互斥事件叫做对立事件（或称矛盾事件，或逆事件）**。一个事件A的对立事件通常记作$\bar{A}$。根据对立事件的意义，$A+\bar{A}$是一个必然事件，它的概率等于1，又由于A与$\bar{A}$互斥，我们得到

$$\boldsymbol{P(A)+P(\bar{A})=P(A+\bar{A})=1} \qquad (8-4)$$

这就是说，**两个对立事件的概率的和等于1。**

从公式（8—4）还可得到

$$\boldsymbol{P(\bar{A})=1-P(A)} \qquad (8-4)'$$

运用公式（8—4）′计算事件的概率，有时比较简便。

例3　在100件同类商品中，有8件二等品，其余为一等品。从这100件商品中，任取10件，求至少取得1件二等品的概率。

解：设事件A为“至少取得一件二等品”，那么A的对立事件$\bar{A}$为“没有取得二等品”。则用古典概率的定义，

$$P(\bar{A})=\frac{C_8^0 \cdot C_{92}^{10}}{C_{100}^{10}} \approx 0.42$$

所以由公式（8—4）′得

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-0.42=0.58$$

习　题　8·3

1．判别下列每对事件是不是互斥事件，如果是，再判别它们是不是对立事件。

从一堆产品（其中正品与次品都多于2个）中任取2件，其中：

（1）恰有1件次品和恰有2件次品；

（2）至少有1件次品和全是次品；

（3）至少有1件正品和至少有1件次品；

（4）至少有1件次品和全是正品。

2．学生阅览室中有20个座位列成一行，求有17个座位有人坐时，（1）空着3个座位恰好连在一起的概率。（2）空着3个座位最多有两个座位连在一起的概率。

3．在50件商品中有3件二级品，其余都是一级品，做不放回抽样3次，每次抽取1件商品，求最多有1件是一级品的概率。

4．有10件商品，其中只有两件是次品，任意从中取出3件，求下列事件发生的概率：

（1）这3件全是正品；

（2）这3件中恰有1件是次品；

（3）这3件中至少有1件是次品。

§8·4 相互独立事件同时发生的概率

甲袋子里有6个白球，4个黑球，乙袋子里有3个白球，5个黑球，从这两个袋子里分别摸出一个，它们都是白球的概率是多少？

我们把“从甲袋子里摸出一个球，得到白球”叫做事件A，把“从乙袋子里摸出一个球，得到白球”叫做事件B。很明显，从一个袋子里摸出的是白球还是黑球，对从另一个袋子里摸出白球的概率没有影响。这就是说，事件A（或B）是否发生对事件B（或A）发生的概率没有影响，这样的两个事件叫做**相互独立事件**。

在上例中，事件$\overline{A}$是指“从甲袋子里摸出一个球，得到黑球”，事件$\overline{B}$是指“从乙袋子里摸出一个球，得到黑球”，很明显，事件A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也都是相互独立的。一般地，如果事件A与B相互独立，那么A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也都是相互独立的。

“从两个袋子里分别摸出一个，都是白球”是一个事件，它的发生，就是事件A、B同时发生，我们将它记作

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com