

塑性力学基础

刘文斌 张 宏 译
王 仁 校

高等教育出版社

塑性力学基础

〔日〕北川 浩著

刘文斌 张 宏 译

王 仁 校

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

二二〇七工厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 8.125 字数 194,000

1986年 7月第1版 1986年 7月第1次印刷

印数 1—6,000

书号 15010·0605 定价 1.85 元

校 者 前 言

由于工程技术上需要更充分地发挥材料的潜力和利用其变形等,也由于计算技术的发展使得复杂的计算成为可能,对塑性力学知识的要求愈来愈多,塑性力学已逐渐成为某些工程专业学生所必修的课程。近年来这方面的教科书在国内也已出版多种,然而本书还有其特点,值得译出供读者参考。

本书取材精炼,把重点放在对本构关系和弹塑性边值问题的一般理论上。全书篇幅和[1]几乎一样,两者在平面应变问题,极限分析原理上用的篇幅也一样,不过,在理论基础方面占的篇幅却比后者多了近三分之一。本书关于解的唯一性的讨论,塑性体热力学概念的引入,关于柱体塑性稳定性的介绍都在理论上达到一定深度,是一般塑性力学教材所不及的。作者还注意给出较清晰的物理图象,如第一章关于安定状态的分析,把它和多晶体的弹塑性性质联系起来理解等。书中的习题和给出的解答均有助于读者深入理解书中内容。

本书由刘文斌、张宏合译。张宏译一、八两章及附录;刘文斌译二、三、四、五、六、七各章。黄杰藩校阅了部分译稿。全部译稿最后由王仁校阅定稿。

两位译者在塑性力学方面有较好基础,译文准确并改正了一些印刷错误和加了注解。本书的出版对初学者提供了一本很好的学习参考书。

北京大学力学系 王 仁

1983年6月20日

[1] 王仁、黄文彬:塑性力学引论,北京大学出版社,1982年。

序 言

本书是为学习结构分析、材料工艺学或者塑性加工的学生而编写的塑性力学教科书。教科书的内容以作者在大阪大学对机械工程系的学生授课的讲义为基础，并认为读者已具有材料力学及本书的姊妹篇井上达雄著的《弹性力学基础》程度的有关固体力学知识为前提而写的。

塑性力学和弹性力学一样，都是固体力学的中心内容，是关于结构和机械设计、金属材料加工及强度研究等的基础学科。对于在这些领域中从事尖端技术工作的人员来说，为了在接近于极限条件下使用材料，满足轻量化及提高经济效果和可靠性等方面的要求，以适应于新技术的研究，这就迫切要求技术人员具备有关的知识和技能，使得他们能够自如地运用取得惊人发展的以计算机为基础的分析方法以及正确地进行力学上的强度计算和变形量的计算。在这种情况下，即将成为技术人员的大学生应当掌握怎样的塑性力学基础知识呢？为了能够胜任将来的工作，只靠片断地积累一些经验和知识显然是不够的。作者认为，应该充分考虑到塑性这种现象的复杂性及其在各个领域中的应用，同时又不失一般性，塑性力学基础必须是一种自成体系的理论。关于此点，尽管出版了不少好书，但是还没有一本满足上述要求的供讲课用的教科书。鉴于此种情况，作者才决心编写本书。

本书中，对弹塑性体的本构关系（应力与应变的关系）及弹塑性边值问题的一般理论予以大量的篇幅，在此之前写了绪论，初步介绍了塑性性质总的特征及应力、应变的性质；为了加深对一般理论的理解，在本书的后半部分安排了两章讲述有代表性的、并富有

特色的边值问题的分析结果及弹塑性边值问题固有的分析方法；本书的最后论及了塑性体的热力学，它可以看做是一个重要性日益增长的学科领域的引言。之所以采用了上述的编排，是为了使读者在进入塑性力学的各个应用领域之前，打下坚实的基础并开阔一下眼界，以便真正掌握塑性性质的特点。但由于作者能力有限，恐难完全达到目的，尚希读者鉴谅。

为使固体力学的初学者易于理解，书中避免使用高深的数学，但为了简洁地表述严谨的内容，不得不使用笛卡儿坐标系的张量表示方法。作者认为，对于还不习惯于这种算法的读者，只要具备大学低年级所学的线性代数的基础知识，并通晓本书附录中张量的算法基础及其表示方法，就能完全看懂本书。顺便提一句，张量表示法不仅用于塑性力学，而且也是连续体力学理论的基本语言，因此希望读者能尽早地掌握它。再者，为了有助于理解本书的内容，书中还收录了大量的练习题，并为自学者备有详细的解答。

在本书的编写过程中参考了大量书刊杂志，特别是从每章后面所列举的参考文献中引用了很多内容。另外，本书是在多方的帮助和鼓励下写成的。特别要提到的是，承京都大学井上达雄副教授对本书的编写给以鼓励，并在内容方面提出了许多宝贵的意见。承神户大学富田佳宏副教授详细审阅了本书的草稿，指正了其中的不少错误。大阪大学浜田实教授及机械工程学教研室的老师们，对作者在塑性力学的讲授方面总是给以不断的关怀和热情的帮助，作者在此一一表示深切的谢意。此外，直到本书的完成为止，日刊工业新闻社出版部的先生们始终给以协助，在此致以由衷的敬礼。

北川 浩

1979年2月28日

• 3 •

目 录

1. 绪 论	1
1.1 塑性力学的目的	1
1.2 金属材料塑性变形的特征	3
1.3 拉伸实验和压缩实验	7
1.3.1 拉伸实验	7
1.3.2 压缩实验	13
1.4 塑性体行为的理想化	13
1.5 超静定桁架的弹塑性性态	15
——目的在于理解结构的弹塑性分析和多晶体的弹塑性性态——	
参考文献	25
练习题 1	25
2. 应变与应力	28
2.1 变形与应变	28
2.2 应力与平衡方程	32
2.3 主应力, 应力主轴, 不变量	35
2.4 应力偏量	36
3. 弹塑性体的本构关系	38
3.1 弹塑性体应力-应变关系的表述	38
3.1.1 单向应力-应变关系的推广, 屈服面	38
3.1.2 弹性应力-应变关系	41
3.1.3 稳定弹塑性体的性态——杜拉克(Drucker)公设——	42
3.1.4 屈服函数与加载, 中性变载及卸载的条件	47
3.1.5 塑性应变增量(速率)	49
3.1.6 屈服面的外凸性与塑性应变率的法向性	50
3.1.7 塑性势与塑性应变率	52
3.1.8 完全的应力-应变关系(弹塑性体的本构关系)	54
3.1.9 应力-应变关系的逆关系式	57

3.2 实际弹塑性体的本构关系	59
3.2.1 初始屈服条件	60
3.2.2 应变强化规律与应力-应变关系式	74
3.2.3 非强化(理想)塑性体的应力-应变关系式	85
3.2.4 理想刚塑性体的应力-应变关系式	86
塑性体应力-应变关系的研究简史	87
参考文献	89
练习题 3	90
4. 弹塑性边值问题	93
4.1 弹塑性边值问题解的唯一性	93
4.1.1 边值问题与虚功原理	93
4.1.2 应力率(增量)的唯一性	98
4.1.3 关于应变率(增量)的唯一性	100
4.1.4 关于应力的唯一性	101
4.2 变分原理	104
4.2.1 对于应变率及应力率的变分原理	104
4.2.2 对于应变和应力的变分原理	108
参考文献	111
练习题 4	112
5. 全量理论	113
5.1 应力-应变关系与变分原理	113
5.2 汉基(Hencky)公式	115
5.3 卡恰诺夫(Kachanov)原理与哈尔-卡曼(Haar-Kármán)原理	117
参考文献	121
练习题 5	121
6. 弹塑性边值问题的分析例题	123
6.1 梁的弯曲与柱体的屈曲	123
6.1.1 梁的弯曲问题	123
6.1.2 柱体的塑性屈曲	129
6.2 杆的扭转	134
6.2.1 等截面杆扭转的基本方程	134
6.2.2 理想弹塑性体的扭转	137

6.3 轴对称问题	145
6.3.1 基本方程	145
6.3.2 承受内压的无限长圆管	146
6.3.3 单向拉伸状态下圆杆颈缩部分的应力分析	150
参考文献	152
练习题 6	153
7. 塑性问题的分析方法	155
7.1 平面应变问题与滑移线场法	155
7.1.1 平面应变问题的基本方程	155
7.1.2 滑移线场的基本边值问题	162
7.1.3 滑移线场的几何特征	166
7.1.4 应力场与速度场的不连续性与滑移线场	169
7.1.5 基本的滑移线场	171
7.1.6 根据应力边界条件求滑移线场的作图方法	174
7.1.7 用滑移线场法分析问题的例子	178
7.1.8 关于解的完全性与唯一性	190
7.2 极限分析——极限定理及其应用	191
7.2.1 极限分析及其意义	191
7.2.2 极限定理	192
7.2.3 上、下限定理	196
7.2.4 上、下限定理的应用	198
7.2.5 结构的极限分析——关于极限设计法	204
7.3 弹塑性边值问题的数值解法——有限单元法	206
7.3.1 变分原理与有限单元法	206
7.3.2 平面问题的有限单元法	208
参考文献	212
练习题 7	213
8. 塑性体的热力学	215
8.1 局部平衡状态及热力学第一和第二定律	215
8.2 弹性与非弹性性质	217
8.2.1 弹性体	218
8.2.2 非弹性体与演化方程	218
8.3 塑性体的本构关系	222

8.4 考虑温度影响的热弹塑性体的应力-应变关系	224
参考文献	225
练习题 8	225
附 录	226
附录 A 向量与张量	226
附录 B 高斯散度定理	228
附录 C 柱坐标和球坐标中的基本方程——应变-位移关系及应力 平衡方程——	229
参考书	231
练习题的提示及解答	233
索 引	243
人名索引	248

1. 绪 论

1.1 塑性力学的目的

很多固体材料, 在某一定大小范围内的载荷作用下呈弹性反应。即在载荷作用的同时产生变形, 变形的大小只决定于载荷的大小, 并且在卸载后又可恢复原状。如果所加载荷超过了某个限度, 即使卸掉载荷, 仍有残留变形, 有时还会出现变形随着时间延长而增长的现象。象这样不仅取决于载荷的大小, 而且由于加载方式不同引起材料的反应也不相同的性质称为非弹性 (inelastic)。根据产生变形的不同机理, 非弹性变形可分为与载荷变化同时产生的塑性变形 (plastic deformation) 及随时间变化的粘性变形 (viscous deformation)。在固体材料中, 有的材料从加载开始就产生粘性变形, 有的材料即使在通常呈现弹性反应的载荷范围内, 由于环境及加载方式不同, 有时也会出现显著的粘性变形。

塑性变形是结晶材料所特有的现象, 在金属材料中表现得最为典型。不过, 即使在非结晶材料中, 有不少材料从现象论的观点来看, 在一定的变形范围内也往往可从作为具有塑性性质而同样对待, 例如某些塑料、混凝土、岩石和土等就是这样的一些例子。

在研究这种塑性变形的学科领域里可分为物理理论和数学理论两个方面。前者, 是从物质的微观结构, 即从原子、分子、结晶及其集合体的物性出发, 探求产生塑性变形的原因, 从物理的角度来说明这些现象。这部分内容在金属学和物性论中占有一定的地位。后者, 则是研究统称为塑性变形的材料宏观现象的数学处理方法。塑性力学 (plasticity) 就是数学理论学科体系的名称。它

属于从现象论的观点来观察材料的性质而用数学方法处理的连续介质力学(continuum mechanics)的范围,与此有关的学科有弹性力学、流体力学及流变学(粘弹性力学)等。但是,一般情况下,根据材料所处的状态,在某一限度的物理和力学条件范围内,可表现出它们独特的性质,根据这种特性来研究各自特有的处理方法和分析方法,因为这样比较方便,于是就出现了上述种种学科。但不能忘记,实际材料并不一定严格地符合哪个学科的规律,而关键是要预先知道某种材料在什么样的条件下将会呈现怎样的性质。

金属材料的塑性变形能力一般都很显著。如对其施加适当的应力,常温下它不会破裂,原材料可能承受百分之几百的塑性应变,压延、拉拔、挤压等塑性加工就是利用材料的这种性质。塑性加工过程的设计目标就是用尽可能少的动力,在不破坏原材料的情况下,加工成所规定的形状和尺寸,有时还需要具有一定硬度和耐磨性等特性的产品。做为评价加工过程的基础,重要的是要知道加工过程中材料的应力和应变状态。另一方面,材料一旦出现塑性变形,一般地说它对变形的抵抗能力就显著下降,因此,结构物和机械部件一产生塑性变形,即使强度上没有问题,也会因变形太大而不能发挥原有的功能。在这种情况下,设计的目标是将塑性应变控制在与弹性应变有同一量级的范围内。最近,人们注意到金属破坏时,即使是脆性材料,在断裂裂缝尖端所产生的塑性变形对材料中裂缝的扩展也起着重要的作用,目前正在研究这种局部的塑性变形。

通过以上的论述,塑性力学的目的已经明确了,它从现象论的立场出发,主要对常温附近、具有延性的多晶体金属所明显表现出来的非弹性特性做数学上的处理。所研究的对象可分为下面两大部分,即:

(1) 研究材料固有的特性,建立应力、应变及温度等量之间关

系的数学表达式;

(2) 分析塑性变形物体内应力与应变的分布。

前者就是本构方程(constitutive equation)的研究,从材料的微观结构中寻求现象产生的原因,同时,建立表述宏观测得的量之间的关系式。后者则一般叫做求解边值问题或者初值-边值问题,属于应用数学问题,它将探讨求解的方法、讨论解的唯一性及解的精度等问题。

本书的主要目的是尽可能用数学方法系统地阐述塑性力学的基础。因此,不把理论的范围搞得过于庞大,而是尽可能用统一的观点阐述各种各样的塑性现象。

1.2 金属材料塑性变形的特征

用多晶体金属材料的试件,进行单向拉伸和压缩等实验,使整个试件产生均匀变形。这时载荷与变形的定性关系,在应变(变形)不太大的范围内与加载方式无关,大致如图 1.1 所示。如果改变纵轴与横轴的比例,此图也可以看成是名义应力(nominal stress)和名义应变(nominal strain)的关系。此处的名义应力和名义应变是以变形前试件的形状和尺寸为基准而得到的计算值,在拉伸和压缩实验中,取

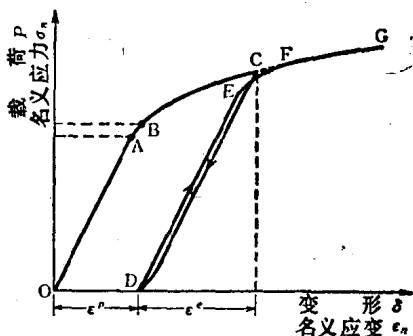


图 1.1 载荷(名义应力)与变形(名义应变)的关系

A_0 : 变形前试件的横截面面积,

P : 拉伸或压缩载荷,

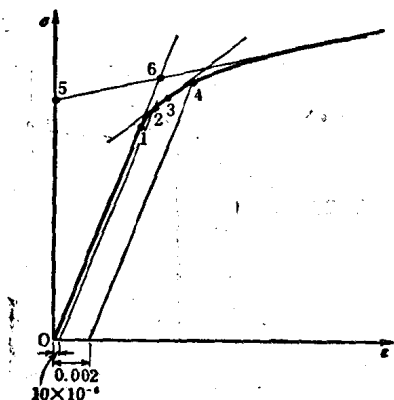
l_0 : 变形前试件的标距,

l : 变形过程中试件的标距。

这时则可定义名义应力和名义应变为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \frac{P}{A_0} \\ \varepsilon_n &= \frac{l - l_0}{l_0} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

随着载荷的增加, 初始阶段呈弹性反应, 通常应变(变形)与应力(载荷)成正比关系。这时如果卸掉载荷, 试件将恢复原状。当载荷进一步增加时, 将达到比例关系的极限点(A), 随后又出现了不能恢复原状的点(B)。称 A 为比例极限 (proportional limit), B 为屈服点 (yield point)。但因这个变化过程是缓慢进行的, 所以



1. 比例极限 2. 可测得的最微小的永久应变 3. 该点切线的斜率=常数 $\times E$ 4. 0.2% 的永久应变 5. 按屈服后曲线的斜率外推 6. 弹性部分的延长线同前述外推线的交点

图 1.2 屈服点的定义

一般难以明确地定出比例极限和屈服点。通常根据测量装置的灵敏度或使用目的而采用各种标准加以定义。图1.2表示了一些常用的屈服点定义, 虽然因所用定义不同而稍有差别, 但在承受单向拉伸的多晶体金属中所能产生的弹性应变最大值一般在 0.1%~0.2% 左右。

在刚刚超过屈服点的附近, 应力-应变曲线显著地开始弯曲, 相同载荷增量所对应的伸长增量变大了。可以认为,

应力-应变曲线的这种缓慢的弯曲是由于晶粒逐个地屈服所致, 并非材料的整体都一致地进入塑性状态。这样看来, 即使在均匀应力作用下, 向塑性状态的过渡也不是均匀地发生着。尽管如此, 建

立在宏观基础上的塑性力学还是认为，当应力通过屈服点所对应的应力(屈服应力)时，材料的性质已由弹性过渡到塑性。

对多数材料来说，屈服之后，要使其变形继续增大，就需要继续增加载荷，亦即 $d\sigma/d\varepsilon > 0$ 。材料的这种反应叫做应变强化(strain hardening)或加工强化(work hardening)。与弹性反应阶段相比，要产生相同的应变增量这时所需的应力增量要小得多，而且一般是随着变形的增加而越来越小。

在产生了一定塑性变形之后，如果减小载荷，如图 1.1 中 CD 线那样，应变沿着大致平行于最初的弹性反应直线减少。这种现象暗示着在产生塑性变形以后，材料内部的结晶构造也没有发生本质的变化。但由于晶粒具有各不相同的取向，塑性变形不是均匀发生的，因而卸载时变形的恢复也不均匀，晶粒间互相影响、相互制约，这样在载荷完全卸掉之前晶粒内部还可能再产生微小的塑性应变。在此种情况下，应力-应变曲线于卸载中途就会弯曲，在载荷完全卸掉之后，应变的弹性部分 ε^e 就会恢复，而塑性应变亦即永久应变(permanent strain) ε^p 则残存下来。

如果重新加载，在一定范围内材料仍呈弹性，此时的弹性系数与塑性变形之前相同。此后经过新的比例极限(E)，在载荷开始下降时的应力 C 点附近，曲线急剧地弯曲，沿着 BC 的延长线 FG 延伸。一般情况下 C 点与 F 点实际上非常接近，可以把 C 点看做是承受过塑性变形 ε^p 的材料的新屈服点。

一开始就反向加载，在应变不太大的范围内，材料一般也呈现与

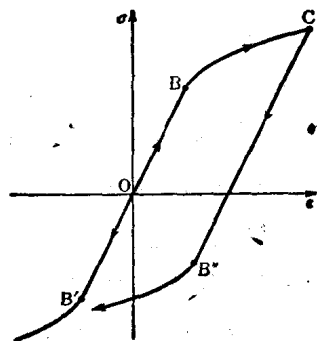


图 1.3 鲍辛格效应

正向加载同样的性质。另一方面，如图 1.3 所示在塑性变形发展

到一定程度之后卸载,然后再反方向加载,这就出现屈服点(B'')。这个应力一般低于最初就反向加载时的屈服点(B')的应力。这种现象称为鲍辛格效应(Bauschinger effect)。我们知道材料一旦发生过塑性变形,屈服点一般都提高(图1.1的F点),而且,材料的塑性性质不仅受到它所经受过的塑性变形大小的重大影响,同时象鲍辛格效应那样,还受到材料所经受的塑性变形的方向的影响。

若以一定的速度对退火软钢(低碳钢)和某种铝合金等进行单

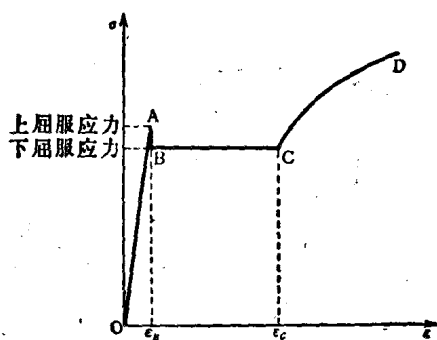


图 1.4 软钢的屈服

向拉伸,则如图1.4所示,在塑性变形开始阶段会发生如下现象:当应力达到某一定数值时应力突然下降,然后变形在不变的应力下继续发展。应力开始降低时的应力值称为上屈服应力(upper yield stress);应力保持不变而变形

继续发展时的应力值称为下屈服应力(lower yield stress)。退火软钢在下屈服应力作用下可以产生百分之几的伸长。上屈服点的出现,是由于在材料内部产生了微观的不稳定结构所致,因此上屈服应力值将随加载速度等试验条件而变化。一般都是把下屈服应力值做为可能再现的值来测量。观察表面抛光的试件可以发现,在应力开始降低时,沿着与拉伸方向大约成 45° 角的方向,出现宏观的剪切*带状区域,即卢德斯带(Lüders band),在下屈服应力状态下,这种带相继在试件的各个部分发生并传播,最终扩展到整个

* 原文为纯剪切,这种区域的应力状态并不是纯剪切,而是拉伸剪切,但剪应力在 45° 的截面上最大。——译者注

试件。进入这样状态后,即开始出现加工强化,应力-应变曲线向右上方翘起。

一般认为,晶体中原子的排列是规则的,塑性变形是原子间的相对错动(滑移)汇集而成的,其中以剪切变形为主,而几乎不发生体积变化。

如上所述,塑性体的性态依赖于它以前承受过什么样的载荷,而不能象弹性体那样,只要根据应力值就可确定应变。但是大多数常用的工业材料在制造过程中进行过各种各样的塑性加工,当时的应力、应变的历史一般是不清楚的。因此,除经过退火的材料之外,由材料实验测得的应力-应变关系都是把实验开始时的应变取为零的相对关系,而不是如图 1.1 所示的绝对关系,这一点是必须注意的。

很多金属是由微小的晶粒按随机方向排列而成的多晶体。构成一个个晶粒的单晶体的特性与以上所见迥然不同。多晶体在微观上并非均质体,但与物体的尺寸相比,如果晶粒十分微小,宏观上仍可将多晶体视为均质体。此外,如果结晶的方位是随机的,则宏观上也可以认为多晶体是各向同性的。但在塑性变形的发展过程中,一般地晶体的方位具有朝着一个特定的方向汇集的趋势,从而表现为各向异性。

1.3 拉伸实验和压缩实验

1.3.1 拉伸实验

为研究材料的塑性特征,最普通的是进行单向拉伸实验。根据实验结果,当塑性变形比图 1.1 所示的范围更进一步发展时,则名义应力-应变曲线通常为图 1.5 所示的形状。即随着塑性应变的增加,出现应变强化,曲线向右上方翘起。不久,当应变强化这一材料固有特性不能克服由于横截面积减小所引起的抗力降低

时,载荷(从而使名义应力)即达到最大值,此后试件的一部分出现局部的截面缩小(颈缩),最后随着承载能力(名义应力)的急剧下降而发生破裂。

在进行作为工业试验的拉伸实验时,可求出下列各量:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{屈服应力:} & \sigma_Y = P_Y / A_0 \\ \text{拉伸强度:} & \sigma_M = P_M / A_0 \\ \text{延伸率:} & \varphi_F = \frac{l_F - l_0}{l_0} \\ \text{截面收缩率:} & \psi_F = \frac{A_0 - A_F}{A_0} \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

其中

P_Y : 屈服载荷;
 P_M : 最高载荷;
 l_F : 断裂后的标距;
 A_F : 断裂后的最小横截面面积。

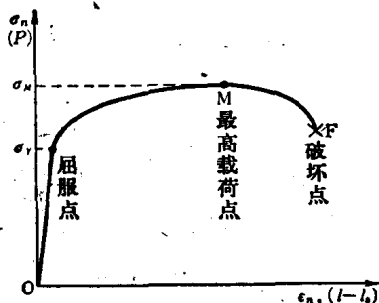


图 1-5 用单向拉伸实验求得的
 名义应力-应变曲线

这些值与材料的强度及加工性能有关,在对材料进行比较时,这些值是有效的。但也未必能

说它们就表现了材料固有的塑性特性。譬如说,由于变形的进展,试件的横截面面积变小,材料中产生的应力不是以最初的横截面面积为基准的名义应力,因而拉伸强度并不表示材料本身所能承受的应力。同时一旦发生颈缩,沿拉伸方向的变形明显地变得不均匀,这样延伸率也并不意味着材料的变形能力。

试件中产生的实际应力是

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1.3)$$

(其中 A 为瞬时的横截面积)称之为真应力 (true or actual