

信息与计算科学丛书

定量预测引论

Dingliang Yuce Yinlun

夏安邦 王 硕 编著

东南大学出版社

信息与计算机科学丛书

定量预测引论

夏安邦 王 硕 编著

东南大学出版社

内 容 提 要

本书针对目前流行的定量预测方法,讨论其原理和理论依据。考虑到预测对象(例如社会经济系统)处在不断变化之中,所以特别强调动态预测的观点。本书在介绍一般的静态定量预测方法的同时,分析了它们的局限性和使用条件,把建立定量预测模型的视野从数理统计扩展到非平稳随机过程,提出动态相关分析的观点,探讨动态相关分析的理论基础。此外,还介绍了一些新技术如神经网络、混沌模型、物元分析等在定量预测中的应用。

本书可作为理工科院校的经济、工商管理、企业管理等专业的大学高年级学生、研究生、博士生的教学参考书,也可以指导预测工作者建立预测模型,其中一些观点能够开拓预测理论研究人员思路。

图书在版编目(CIP)数据

定量预测引论/夏安邦,王硕编著. —南京:东南大学出版社,2001.4

(信息与计算科学丛书)

ISBN 7-81050-674-9

I. 定... II. ①夏... ②王... III. 预测科学

IV. G303

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 17956 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人:宋增民

江苏省新华书店经销 华东有色地研所印刷厂印刷
开本:787 mm×1092 mm 1/16 印张:18.75 字数:450 千字
2001 年 6 月第 1 版 2001 年 6 月第 1 次印刷
总定价:180.00 元 本册定价:30.00 元

(凡因印装质量问题,可直接向发行科调换。电话:025-3792327)

前 言

预测对于人们并不是一个陌生的名词,但其作为一门独立的学科,问世的时间却不很长。随着预测技术的普及和推广,预测人员已不满足于定性分析所得出的结论,而力求量化,因此大量的定量预测方法被应用于实践。然而,预测人员如果不了解所使用方法的原理和本质,往往得不到正确的结论。随着管理信息系统(MIS)应用水平的提高,决策人员和研究人员已经掌握了大量数据,并希望利用数学模型来分析这些数据。这种发展趋势要求人们提高定量分析的水平及对模型的深刻认识。为此,我们在多年科研和教学的基础上,编写了这本书。

定量预测从量的概念上描述未来,提供的结论简明、清晰、直观,是一门很受欢迎的实用技术。但是如果使用定量预测方法时,不考虑所用方法的原理、条件和局限性,生搬硬套,往往得出错误的结果,有时明知结果错误而不知道为什么。本书讨论定量预测的基础理论,供有关的管理人员、预测工作者和研究人员作为参考,也可以作为高等院校经济管理和系统工程专业的本科高年级学生及研究生的参考书。全书分为三个层次:对于初学者,本书力求为他们提供入门的向导;标记单星号“*”的内容较深入地讨论了一些定量预测方法的本质,供预测人员处理实际问题时参考;标有双星号“**”的部分旨在反映该领域的发展动向,可供理论工作者研究参考。

全书共分14章。第1章到第3章为基础部分,系统介绍从事定量预测所必备的知识。第4章讨论最常用的一些方法,用较多实例介绍如何使用常规定量分析方法,同时指出这些方法的缺陷。第5章讨论确定性时间模型,列举了一些应用的例子。读者掌握了第4、5章后,就可以对现有常规预测方法建立初步印象,具备进行简单定量预测的分析能力。

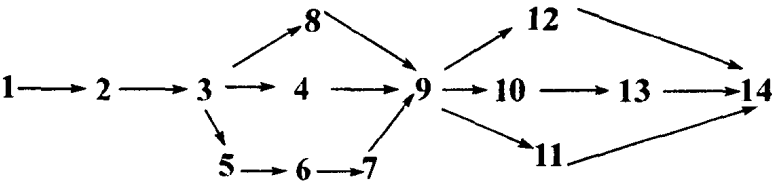
第6、7章分别讨论平稳和非平稳时间序列的建模原理,特别强调预测对象的非平稳性和时变性。第8章介绍马尔科夫序列,讨论状态转移矩阵原理。第9章引出一种新的方法:动态相关分析,为模型更接近现实提出了一些探索性的建议。第10章讨论组合预测,介绍了组合预测的概念和方法,并对变权重组合预测进行初步研究。这几章的内容主要取自学术刊物和学术会议论文。

第11~13章探讨近年发展起来的几种预测技术。第11章讨论神经网络预测,介绍神经网络预测的基本概念,重点研究了Hopfield网络预测与BP网络预测,并结合模糊理论探讨了模糊神经网络预测,对神经网络预测概况和发展趋势进行了总结。第12章讨论混沌预测,研究了混沌与经济预测、预测的混沌范式及方法,对股票价格波动预测进行了介绍。第13章讨论可拓学预测(物元模型预测),介绍了我国学者创立的可拓学理论,研究该理论在

预测上的应用,重点探讨了股市物元模型预测和台风年频次分类物元预测模型。

基于预测过程的半结构化或非结构化特征,第 14 章介绍合肥工业大学预测与发展研究所开发的预测支持系统(FSS),探讨了 FSS 的需求分析、预测模型管理、FSS 的使用,以及 FSS 的案例研究。

变化是预测对象的一个最基本属性,本书以运动发展作为主要线索,把定量预测范畴由静态推向动态。本书采用积木式构造,读者不一定从头到尾阅读全书,可以根据自己的基础和实际需要选读,阅读线索如下:



本书的初稿曾通过西安交通大学出版社委托万百五教授审阅,使作者受益非浅。在构思中曾得到刘豹教授、胡保生教授、邓聚龙教授等学者的启示和帮助。书中参考和引用了一些专家的研究成果,特别是韩志刚、霍俊、陈玉祥、张汉亚、唐小我、曾勇、蔡文、寿志勤、刘洪,我们表示衷心的感谢。在本书出版过程中,得到东南大学出版社的大力支持。研究生刘勇、林琳、张长昊、彭钊轶、笃峻等参加了文字的录入和校对工作,付出大量劳动,张明同志给予很多帮助,我们一并表示感谢。

本书第 1~9 章由夏安邦教授编写,第 10~14 章由王硕副教授编写。由于我们才疏学浅,书中的缺点和错误在所难免,欢迎读者批评指正。

编著者

2000 年 10 月于东南大学

定量预测引论

Dingliang Yuce Yinlun

信息与计算机科学丛书

责任编辑 陶勛恒

责任印制 张文礼

封面设计 顾晓阳

ISBN 7-81050-674-9



9 787810 506748 >

ISBN 7-81050-674-9
O·34 定价: 30.00元
(丛书总定价: 180元)

目 录

1 数学基础	(1)
1.1 线性代数	(1)
1.1.1 矩阵的概念	(1)
1.1.2 矩阵的加、减与矩阵的乘法	(3)
1.1.3 转置矩阵和逆矩阵	(6)
1.1.4 线性方程组和矩阵方程	(8)
1.1.5* 矩阵和向量的微分	(9)
1.1.6** 线性空间与线性变换	(13)
1.2 集合和映射	(14)
1.2.1 集合的概念	(14)
1.2.2 集合的运算	(17)
1.2.3 卡氏积(直积集合)	(19)
1.2.4 映射	(20)
1.2.5 基数	(22)
1.2.6 测度空间	(23)
1.3 概率论初步	(25)
1.3.1 事件及其运算	(25)
1.3.2 概率及其运算公式	(27)
1.3.3 随机变量	(30)
1.3.4 随机变量的数字特征	(33)
1.3.5 随机向量	(35)
2 模型和仿真	(37)
2.1 模型的基本概念	(37)
2.1.1 模型与现实	(37)
2.1.2 建模条件分析	(38)
2.1.3** 样本中的随机干扰	(39)
2.2 模型的分类	(41)
2.2.1 形象模型(iconic model)	(41)
2.2.2 抽象模型(abstract model)	(41)
2.2.3 概念模型(concept model)	(41)
2.2.4 数学模型分类	(41)
2.3 模型的评价	(43)
2.4 建模方法	(45)

2.4.1	预测模型的一般要求	(45)
2.4.2	常用的分析方法	(46)
2.4.3	建立预测模型的基本步骤	(49)
2.5	仿真	(51)
2.5.1	仿真的工作步骤	(51)
2.5.2	社会经济系统的仿真	(52)
2.6*	随机数列的仿真	(55)
2.6.1	均匀分布随机数的产生	(56)
2.6.2	独立均匀分布随机数的检验	(56)
2.6.3	其他分布的随机序列	(58)
2.6.4	蒙特卡罗仿真	(59)
2.6.5	相关序列的产生	(60)
3	参数估计	(62)
3.1	基本概念	(62)
3.1.1	模型和参数	(62)
3.1.2	参数的内在含义	(63)
3.1.3	参数的时变性	(65)
3.1.4	参数的随机性	(66)
3.2	参数估计值的评价	(66)
3.2.1	无偏性	(67)
3.2.2	有效性	(68)
3.2.3	一致估计	(71)
3.2.4	充分性和完备性	(72)
3.3	参数估计的基本方法	(73)
3.3.1	准则函数	(73)
3.3.2	最小二乘估计 ^[7]	(75)
3.3.3	最小方差估计	(79)
3.3.4	预报误差估计法	(80)
3.3.5	极大似然估计	(81)
3.3.6	非线性规划	(83)
3.3.7	随机逼近	(85)
3.4	误差分析	(86)
3.4.1	随机误差	(87)
3.4.2	系统误差	(89)
3.4.3	小结	(90)
4	相关分析和回归方程	(92)
4.1	概述	(92)
4.1.1	相关的概念	(92)

4.1.2	回归的概念	(92)
4.1.3	相关分析内容	(93)
4.2	线性相关分析	(94)
4.2.1	相关系数 R	(94)
4.2.2	线性相关检验	(96)
4.3	线性回归方程	(97)
4.3.1	一元线性回归方程	(97)
4.3.2	多元回归方程	(103)
4.3.3	二元线性回归方程	(104)
4.3.4	多元线性回归模型建模方法	(106)
4.3.5	逐步回归算法建模	(110)
4.4	非线性回归方程	(115)
4.5	非线性规划的应用	(116)
4.5.1	非线性规划问题的提出	(116)
4.5.2	非线性规划问题的一般提法	(116)
4.5.3	非线性规划问题求解	(117)
4.5.4	非线性规划建模方法——目标函数最优(Ⅰ)	(118)
4.5.5	非线性规划建模方法——目标函数寻优(Ⅱ)	(118)
4.6	表格法	(120)
4.7	图论的应用	(122)
4.7.1	图	(122)
4.7.2	有向图	(123)
4.7.3	网络最大流	(123)
4.7.4	最小费用流	(125)
4.7.5	最小费用最大流	(126)
5	时间序列分析(Ⅰ)	
	——外延模型	(127)
5.1	概述	(127)
5.1.1	趋势外推法	(127)
5.1.2	时间序列种类	(128)
5.1.3	外延模型	(128)
5.2	移动平均法	(130)
5.2.1	一次移动平均法	(130)
5.2.2	二次移动平均法	(131)
5.3	指数平滑法	(134)
5.3.1	一次指数平滑法	(134)
5.3.2	一次指数平滑法和移动平均法的关系	(134)
5.3.3	平均役龄	(135)

5.3.4	初始值 S_0	(135)
5.3.5	二次指数平滑法	(136)
5.4	趋势分析	(137)
5.4.1	确立外延数学模型的方法	(137)
5.4.2	模型参数估计	(138)
5.5	生长曲线外延模型	(139)
5.5.1	生长曲线	(139)
5.5.2	生长曲线建模方法	(140)
5.5.3	生长曲线模型应用	(142)
5.5.4	包络曲线	(142)
5.6	周期预测法	(143)
5.6.1	周期波动时间序列与趋势分析	(143)
5.6.2	季节指数法	(144)
5.6.3	季节周期时间序列周期内趋势分析	(147)
5.6.4	季节周期模型滚动运算	(148)
5.6.5	温特法	(148)
6*	时间序列分析(Ⅱ)	
	——平稳时间序列	(150)
6.1	基本概念 ^[1]	(150)
6.1.1	时间序列分析	(150)
6.1.2	随机过程的数字特征	(150)
6.1.3	平稳随机过程	(151)
6.1.4	各态历经性(ergodic)	(152)
6.1.5	弱平稳时间序列的描述	(153)
6.2	AR 模型	(154)
6.2.1	模型参数估计方法	(154)
6.2.2	自相关分析	(155)
6.3	MA 模型	(157)
6.3.1	滑动平均模型的若干性质	(157)
6.3.2	MA 模型的参数估计	(158)
6.3.3	适应性滤波	(158)
6.4	ARMA 模型	(159)
6.4.1	基本规律介绍	(159)
6.4.2	ARMA 模型的参数估计	(160)
6.4.3	ARMA 模型的预测效果	(160)
6.5**	CARMA 模型	(161)
6.5.1	CARMA 模型的描述方法	(161)
6.5.2	CARMA 模型的结构辨识	(163)

6.5.3	参数估计的方法	(165)
7*	时间序列分析(Ⅱ)	
	——非平稳时间序列	(168)
7.1	引言	(168)
7.2	平稳余差过程	(168)
7.2.1	ARIMA 模型	(169)
7.2.2	季节性模型	(170)
7.2.3	函数生成理论 ^[48]	(171)
7.3**	随机过程的线性变换	(171)
7.3.1	基本概念	(171)
7.3.2	第一类线性变换	(172)
7.3.3	第二类线性变换	(173)
7.4**	噪声分离技术	(174)
7.4.1	均值函数的 Fourier 变换	(174)
7.4.2	零均值随机过程 Fourier 变换	(175)
7.4.3	离散付里叶变换	(175)
7.4.4	噪声分离技术	(176)
7.4.5	仿真计算举例	(177)
7.5**	方差滤波	(178)
7.5.1	方差滤波的基本原理	(178)
7.5.2	方差滤波的统计检验	(178)
7.5.3	方差滤波的工作步骤	(179)
8	马尔科夫序列	(181)
8.1	概述	(181)
8.2	基本定理 ^[6]	(182)
8.2.1	首次进入时间和状态分类	(182)
8.2.2	闭集和状态空间的分解	(184)
8.2.3	$p_{ij}^{(n)}$ 的渐进性质与平稳分布	(186)
8.3	状态转移概率矩阵	(187)
8.3.1	状态转移概率矩阵的性质	(187)
8.3.2	根据调查资料求解 P	(189)
8.3.3	求解 P 的最小二乘方法	(193)
8.4	齐次马尔科夫序列的预测	(195)
8.4.1	近期预测	(195)
8.4.2	远期预测	(195)
9*	动态相关分析	(197)
9.1	动态相关分析的原理	(197)
9.1.1	一般概念	(197)
9.1.2	基本定理	(199)

9.1.3	数据处理方法	(201)
9.2	参数对现实的跟踪	(202)
9.2.1	线性时变系统	(202)
9.2.2	非线性时变系统	(203)
9.2.3	多层递阶预报	(204)
9.3	变参数回归方程	(204)
9.3.1	参数子模型法	(204)
9.3.2	差分法	(205)
9.3.3	预报-校正法	(206)
9.3.4	机理分析法	(207)
9.4	二次回归分析	(207)
9.4.1	二次回归方程的概念	(207)
9.4.2	二次回归方程的建立过程	(209)
9.4.3	其他模型的二次回归	(210)
9.5**	变参数 ARMA 模型	(211)
9.5.1	基本定义	(211)
9.5.2	几个定理	(212)
9.5.3	二阶非平稳过程的描述方法	(216)
9.6**	非齐次马氏链和时变图表	(217)
9.6.1	非齐次马氏链	(217)
9.6.2	函数矩阵的参数估计	(218)
9.6.3	时变图表	(219)
9.7**	问题和发展	(219)
9.7.1	决不能忽视定性分析的作用	(220)
9.7.2	使用交互技术	(220)
9.7.3	开发变结构建模方法	(220)
9.7.4	使用新的模型描述方式	(221)
9.7.5	把定量分析和推理机制结合在一起	(222)
10	组合预测	(223)
10.1	概述	(223)
10.2	组合预测的计算方法	(224)
10.3*	变权重组合预测	(227)
11	神经网络预测	(230)
11.1	概述	(230)
11.1.1	Hopfield 神经网络简介	(230)
11.1.2	BP 神经网络简介	(230)
11.2	Hopfield 网络预测	(231)
11.3	BP 网络预测	(237)
11.4	模糊神经网络预测	(240)

11.4.1	两种方法的比较与结合	(240)
11.4.2	建模基本步骤	(241)
11.5	神经网络预测概况及发展趋势	(242)
11.5.1	预测的神经网络方法	(243)
11.5.2	存在的问题	(246)
12*	混沌预测	(247)
12.1	混沌与经济预测	(247)
12.1.1	混沌的概念	(247)
12.1.2	混沌理论在经济学中的应用	(248)
12.1.3	经济预测模型与混沌	(248)
12.2**	预测的混沌范式及方法	(250)
12.2.1	混沌理论关于预测的范式假定	(250)
12.2.2	混沌动力学预测的过程	(251)
12.2.3	实例及干扰因素对系统行为的影响分析	(252)
12.3	股票价格波动分析与预测	(254)
12.3.1	分维与布朗运动	(254)
12.3.2	R/S 分析	(256)
12.3.3	分数维与股票价格波动	(256)
13	可拓学预测	
	——物元模型预测	(258)
13.1	可拓学概述	(258)
13.1.1	可拓学的研究对象	(258)
13.1.2	可拓学的基本理论	(259)
13.1.3	可拓学的基本方法——可拓方法	(263)
13.1.4	可拓学的框架	(264)
13.1.5	可拓预测方法的基本过程	(264)
13.2	股市物元模型预测	(266)
13.2.1	有关技术指标的计算	(266)
13.2.2	建立技术指标的关联函数	(267)
13.2.3	关联函数在预测中的运用	(268)
13.2.4	实例验证	(268)
13.3	台风年频次分类物元预测模型	(270)
14*	预测支持系统	(273)
14.1	FSS 需求分析	(273)
14.2	预测模型管理	(273)
14.3	FSS 的使用	(277)
14.4	FSS 案例研究	(279)
	参考文献	(284)

1 数学基础

预测学是一门还在迅速发展的学科,没有完全形成自己的体系。从原则上讲,数学的一切成就都可以用于定量预测。控制理论、运筹学、系统科学等现代科学领域的发展,也为定量预测提供了很多很好的方法。研究定量预测理论应该对数学有较深入的了解,同时还应该善于吸取其他一些现代科学的成就。然而对于绝大部分预测工作者,为了掌握现有的预测方法,只要了解现有的预测方法所涉及的一些数学知识就可以了。对于具有高中以上文化程度的读者,需要补充线性代数、概率论和数理统计的知识。对有兴趣进行定量预测理论研究的读者,则需要补充更多的数学知识。这一章并不准备全面地讲述所有有关的数学原理,只介绍已有定量预测方法所涉及的数学方法,目的在于帮助读者较深入地理解这些方法,也为进一步研究定量预测理论奠定一定的数学基础。

线性代数、概率论和数理统计的绝大部分材料都是定量预测最基本的知识,希望读者一定要掌握。随机过程属于提高部分,供研究时间序列和季节模型的谱分析使用。数理统计的现代概念和集合与映射部分内容比较深,仅供研究定量预测理论的读者参考。

1.1 线性代数

线性代数的研究内容包括行列式、线性方程组、矩阵、线性变换和线性空间等。本节主要介绍矩阵及其运算,以少量篇幅介绍线性变换的概念。行列式和线性方程组的内容考虑到在高中的代数课中已经讲述,本书不重复了。

1.1.1 矩阵的概念

在经济规划、商品价格、交通运输等实际问题中,往往碰到很多量,它们可以排成一个二维数表。例如有五种型号的产品,每一种分为三个等级,那么它的价格可以形成一个二维数表。以 $A_j(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ 表示产品型号, $B_i(i = 1, 2, 3)$ 表示等级,价格表如表 1-1 所示。

表 1-1 价格二维数表

等 级	型 号				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
B_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}

其中 a_{ij} 表示等级为 i 、型号为 j 的产品价格。可以用一个更简略的形式把实质性的内容抽象出来,表示为如下数表:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

这种结构的数表在数学上就称为矩阵。

定义 1.1 由 $m \times n$ 个元素排成的 m 行 n 列的表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

称为一个 $m \times n$ 的矩阵。

矩阵(1.1)中, a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 称为矩阵的元素,通常 a_{ij} 为一个实数,广义一点讲 a_{ij} 也可以为复数、多项式等。 i 称为 a_{ij} 的行标, j 称为 a_{ij} 的列标。 $m \times n$ 称为矩阵的维。

通常用大写英文字母 $A, B, \dots$ 或者 $\{a_{ij}\}, \{b_{ij}\}, \dots$ 表示矩阵。有时为了表明矩阵的行、列数,把 m 行、 n 列矩阵写成 A_{mn} 或 $\{a_{ij}\}_{mn}$ 。有些资料中用空间 $\mathbf{R}^{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 维矩阵。例如 A_{mn} 记为 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 符号 $\in$ 读作属于,我们将在集合和映射中作进一步的介绍。

当 $m = n$ 时,矩阵 A_{mn} 叫做 n 维方阵。一维方阵就是一个数,称之为标量。

当 $m = 1$ 时,表示只有 1 行的矩阵

$$[a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}]$$

或记为

$$[a_1, a_2, \dots, a_n]$$

叫做行矩阵,或行向量。

当 $n = 1$ 时,表示只有 1 列的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

有时记为

$$[a_1, a_2, \dots, a_n]^T$$

符号“ T ”表示转置,它的意义将在后面介绍。这种只有 1 列元素的矩阵称为列矩阵或列向量。

元素都是零的矩阵称为零矩阵,记作 0 。

矩阵(1.1)中,当 $m = n$ 时,把由 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 组成的连线称为方阵的主对角线。除了主对角线之外,其余元素都为零的方阵称为对角矩阵,表示为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

主对角线上的元素都为 1 的对角矩阵,叫做单位矩阵,记做 I ,即

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

主对角线一侧所有元素为零的矩阵,叫做三角矩阵。三角矩阵分为上三角矩阵和下三角矩阵,分别表示为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

如果两个矩阵 A 和 B 的行数、列数相等,并且对应元素也相等,即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad i = 1, 2, 3, \cdots, m; j = 1, 2, 3, \cdots, n$$

则称矩阵 A 与矩阵 B 相等,记为

$$A = B$$

方阵 A 的元素按原来次序所构成的行列式叫做方阵 A 的行列式,记做 $|A|$ 。方阵 A 和行列式 $|A|$ 尽管元素和排列次序都一样,但两者有本质的差别。矩阵表示一个数表或符号表,而行列式表示一个数或一个算式。

1.1.2 矩阵的加、减与矩阵的乘法

只有两个维数相同的矩阵才可以实现加、减法运算。例如两个 m 行 n 列矩阵

$$A = \{a_{ij}\}, \quad B = \{b_{ij}\}$$

则矩阵 A 与矩阵 B 的和(差)矩阵规定为

$$C = A \pm B = \{a_{ij} \pm b_{ij}\} \quad (1.3)$$

例 1.1 设

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 80 & 45 \\ 60 & 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 15 & 45 \\ 40 & 38 \\ 24 & 19 \end{bmatrix}$$

那么 A 与 B 之和为

$$C = \begin{bmatrix} 20 + 15 & 30 + 45 \\ 80 + 40 & 45 + 38 \\ 60 + 24 & 10 + 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 75 \\ 120 & 83 \\ 84 & 29 \end{bmatrix}$$

A 与 B 之差为

$$C = \begin{bmatrix} 20 - 15 & 30 - 45 \\ 80 - 40 & 45 - 38 \\ 60 - 24 & 10 - 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -15 \\ 40 & 7 \\ 36 & -9 \end{bmatrix}$$

简言之,矩阵的加、减运算就是矩阵的对应元素相加、减。

矩阵的乘法有两种含义,一种是数与矩阵相乘,另一种是矩阵与矩阵相乘。

数 k 与矩阵 A 相乘规定为数 k 与矩阵 A 的每一个元素 a_{ij} 相乘,即

$$kA = \{ka_{ij}\} \quad (1.4)$$

或

$$kA = k \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

并且规定

$$A \cdot k = k \cdot A \quad (1.5)$$

容易证明,矩阵的加法、数与矩阵的乘法满足以下运算律:

设 A, B 均为 $m \times n$ 维矩阵,则有:

- (1) 交换律 $A + B = B + A$ 。
- (2) 结合律 $(A + B) + C = A + (B + C); k(rA) = (kr)A$, 其中 k, r 为实数。
- (3) 分配律 $k(A + B) = kA + kB; (k + r)A = kA + rA$ 。

为了讲述矩阵与矩阵相乘的运算法则,先请看一个例子。

例 1.2 某校明后两年计划建筑教学楼与宿舍楼。建筑面积及材料消耗量列于表 1-2 和表 1-3 中。

表 1-2 建 筑 面 积 m^2

年份	教学楼	宿舍楼
明年	2 000	1 000
后年	3 000	2 000

表 1-3 不同楼房的材料消耗量(每 100 平方米建筑面积的平均用量)

楼 房	钢材 /t	水泥 /t	木材 / m^3
教学楼	2	18	4
宿舍楼	1.5	15	5

因此,明后两年三种建筑材料的耗用量如表 1-4 所示。