TONG DIAO DAI SHU

同调代数

林子炳 编著

东北师范大学出版社

同 调 代 数
TONGDIAO DAISHU

林子炳 编著

责任编辑：杨述春　封面设计：李冰彬　责任校对：孙淑荣

东北师范大学出版社出版
（长春市斯大林大街110号）
（邮政编码：130024）

吉林省新华书店发行
长春新华印刷厂制版
长春市第九印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米1/32
印张：15.5
字数：395千

1991年5月第1版
1991年5月第1次印刷
印数：0 001—1 000 册

ISBN 7-5602-0259-4/O·30　（压膜）定价：5.00元

序　　言

同调代数自从本世纪40年代中期被引进以来，现在已发展成为代数学中一个重要的分支，并在代数学的其他分支中越来越体现出它的重要作用。国外已有很好的同调代数专著，例如 H. Cartan 及 S. Eilenberg 的 «Homological Algebra»，P. J. Hilton 及U. Stammbach 的 «A Course in Homological Algebra»，J. J. Rotman 的 «An Introduction to Homological Algebra»等等。所提到的这些专著，内容丰富，各有许多优点，但似不便于初学者阅读。国内同调代数方面的专著则至今尚不多见。本书编写的目的是为初学同调代数的读者提供一本便于阅读的书。

本书是根据编著者 1984 年春以来以 J. J. Rotman 的 «An Introduction to Homological Algebra» 为基本教材并参考其他专著先后在扬州师范学院、东北师范大学为代数研究生讲课时所写的讲稿修改而成的。若采用本书作为研究生的同调代数教科书，可以每周 4 学时，在一学期内讲完。

本书是在张海权教授的鼓舞下完成的。听课的研究生们提出了很好的意见。对于这些同志，谨在此表示衷心的感谢。

由于编著者水平的限制，书中很可能有不当甚至错误之处，敬请读者批评指正。

林子炳

1987年 9 月

目 录

第一章　模及范畴

模范畴到模范畴的函子 Hom与$\otimes$和它们的导来函子 Ext 及 Tor是同调代数的基本研究对象. 因此, 本章将先对模、范畴及函子作一极其初步的介绍.

§1　模

环上模的概念是域上向量空间及 Abel 群这两个概念的共同的自然推广. 它不仅是同调代数中的重要概念, 而且也是整个代数学中的重要概念.

本书中所说的环恒是含单位元的结合环, 所说的子环恒含原环的单位元, 所说的环同态映射恒将单位元映到单位元.

1.1　模的定义

定义1.1　设R是环, $(M, +)$是Abel群. 若有一个映射

$$R\times M\longrightarrow M$$
$$(r,m)\longmapsto rm$$

满足

(i) $r(m_1+m_2)=rm_1+rm_2$, $\quad\forall r\in$, $Rm_1,m_2\in M$;

(ii) $(r_1+r_2)m=r_1m+r_2m$, $\quad\forall r_1,r_2\in R$, $m\in M$;

(iii) $(r_1r_2)m=r_1(r_2m)$, $\quad\forall r_1,r_2\in R$, $m\in M$;

(iv) $1m=m$, $\quad\forall m\in M$,

其中 1 是环R的单位元, 则称M是一个左R-模. 有时也用 ${}_RM$表

示M是一个左R-模。

当M是左R-模时，由左R-模的定义知，有

$r0=0$，$\forall r\in R$；其中0是$(M,+)$的零元；

$r(-m)=-rm$，$\forall r\in R$，$m\in M$；

$r(m_1-m_2)=rm_1-rm_2$，$\forall r\in R$，m_1，$m_2\in M$；

$0m=0$，$\forall m\in M$；其中左边的0是环R的零元；

$(-r)m=-rm$，$\forall r\in R$，$m\in M$；

$(r_1-r_2)m=r_1m-r_2m$，$\forall r_1,r_2\in R$，$m\in M$。

当左R-模M只含一个零元时，称M是零模．零模用0来记．

例1.1 设V是域F上向量空间．对于$a\in F$及$x\in V$，定义ax是V构成域F上向量空间时所用的纯量乘法的积，则V是左F-模．反之，若M是左F-模，其中F是一个域，则M恰是域F上向量空间．故域上左模与域上向量空间这两个概念完全一致。

例1.2 设$(M,+)$是Abel群，$\mathbf{Z}$是整数环．对于正整数n及$x\in M$，当$n=1$时，定义$1x=x$，当$n\geqslant 2$时，定义$nx=x+x+\cdots+x$（n个x），并定义$(-n)x=-nx$，$0x=0$，则M是左$\mathbf{Z}$-模．反之，若M是左$\mathbf{Z}$-模，则易知对于正整数n及$x\in M$，当$n=1$时，必有$1x=x$，当$n\geqslant 2$时，必有$nx=x+x+\cdots+x$（n个x），且有$(-n)x=-nx$及$0x=0$。 故整数环上左模与Abel群这两个概念完全一致。

例1.3 设V是域F上向量空间．命R是V的全体线性变换作成的环．这里当$f,g\in R$时，$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，$\forall x\in V$；$(fg)(x)=f(g(x))$，$\forall x\in V$。现在对于$f\in R$及$x\in V$，定义$fx=f(x)$，则V是左R-模。

例1.4 设R是环，则$(R,+)$是Abel群。再对于$r\in R$及$x\in R$，定义rx就是r及x在环R中的积，则R是左R-模。以后如无特殊声明，凡提到左R-模R时，恒指这种意义下的左R-模。

类似地有右模的概念．

定义1.2 设R是环，$(M,+)$是Abel群。若有一个映射

$$R\times M\longrightarrow M$$
$$(r,m)\longmapsto mr$$

满足

(i) $(m_1+m_2)r=m_1r+m_2r,\qquad \forall\, m_1,m_2\in M,\ r\in R;$

(ii) $m(r_1+r_2)=mr_1+mr_2,\qquad \forall\, m\in M,\quad r_1,r_2\in R;$

(iii) $m(r_1r_2)=(mr_1)r_2,\qquad \forall\, m\in M,\quad r_1,r_2\in R;$

(iv) $m1=m,\qquad \forall\, m\in M,$

其中 1 是环R的单位元，则称M是一个右R-模．有时也用 M_R表示M是一个右R-模．

当M是右R-模时，由右R-模的定义知，有

$0r=0,\ \forall\, r\in R;$ 其中 0 是$(M,+)$的零元；

$(-m)r=-mr,\ \forall\, r\in R,\ m\in M;$

$(m_1-m_2)r=m_1r-m_2r,\qquad \forall\, r\in R,\ m_1,m_2\in M;$

$m0=0,\qquad \forall\, m\in M;$

$m(-r)=-mr,\qquad \forall\, r\in R,\quad m\in M;$

$m(r_1-r_2)=mr_1-mr_2,\qquad \forall\, r_1,r_2\in R,\quad m\in M.$

容易知道，域上右模与域上向量空间这两个概念也是完全一致的．同样，整数环上右模与Abel群这两个概念也是完全一致的．又，设R是环，对于$r\in R$及$x\in R$，定义xr是x及r在R中的积，则R是右R-模．以后如无特殊声明，凡提到右R-模R时，恒指这种意义下的右R-模．

当R是交换环时，若已给左R-模M，则M可以自然地成为右R-模：对于$r\in R$及$m\in M$，定义$mr=rm$．同样，若已给右R-模M，则M可以自然地成为左R-模：对于$r\in R$及$m\in M$，定义$rm=mr$．因此，当R是交换环时，按以上方式，可以当然地将一个左R-模同时当作右R-模，将一个右R-模同时当作左R-模．在这种意义下，对于交换环上的模，无需区分它是左模还是右模．

模的概念体现了一种表示的思想．设R是环，$(M,+)$是Abel

群。命 End$M$ 是 M 的所有群自同态映射作成的环。这里，当 $f, g \in \mathrm{End}M$ 时，$(f+g)(m)=f(m)+g(m)$，$\forall\, m \in M$；$(fg)(m)=f(g(m))$，$\forall\, m \in M$。环 R 到环 End$M$ 的一个环同态映射叫做 R 到 M 的一个表示。若 φ 是 R 到 M 的一个表示，可知当定义 $rm=\varphi(r)(m)$ 时，M 就成为左 R-模。反之，若已给左 R-模 M，则命 $\varphi: R \to \mathrm{End}M$ 是 $r \longmapsto \varphi(r)$，其中 $\varphi(r)(m)=rm$，就得到 R 到 M 的一个表示。对于右模，需要用反表示。环 R 到环 End$M$ 的一个环反同态映射叫做 R 到 M 的一个反表示。若 φ 是 R 到 M 的一个反表示，可知当定义 $mr=\varphi(r)(m)$ 时，M 就成为右 R-模。反之，若已给右 R-模 M，则命 $\varphi: R \longrightarrow \mathrm{End}M$ 是 $r \longmapsto \varphi(r)$，其中 $\varphi(r)(m)=mr$，就得到 R 到 M 的一个反表示。

上述表示或反表示的思想有时可以帮助我们作环上的模，或从一个环上的模得到另一个环上的模。

例如，设已给环 R 及 S，并设已给左 R-模 M，若有一个环同态映射 $\varphi: S \longrightarrow R$，则我们可以容易地使 M 成为左 S-模。这是因为左 R-模 M 确定 R 到 M 的一个表示 $\psi: R \longrightarrow \mathrm{End}M$，于是 $\psi\varphi$ 就是 S 到 M 的一个表示。因此，当定义 $sm=(\psi\varphi)(s)(m)$，也即当定义 $sm=\varphi(s)m$ 时，M 就成为左 S-模。

特别，设 I 是环 R 的理想，则有环 R/I，并有环自然同态映射 φ：$R \longrightarrow R/I$，$r \longmapsto r+I$。因此，若 M 是左 R/I-模，则当定义 $rm=\varphi(r)m$，也即当定义 $rm=(r+I)m$ 时，M 成为左 R-模。但若 N 是左 R-模，则当以自然的方式定义 $(r+I)x=rx$ 时，一般未必能使 N 成为左 R/I-模。为了弄清在什么情况下，当定义 $(r+I)x=rx$ 时可以使左 R-模 N 成为左 R/I-模，我们先记

$$a_{nn_R}N=\{r \in R \mid rx=0, \quad \forall\, x \in N\},$$

它叫做左 R-模 N 的零化子。容易知道，$a_{nn_R}N$ 恰是左 R-模 N 确定的 R 到 N 的表示 ψ 的核：$a_{nn_R}N=\ker\psi$。若 $I \subseteq a_{nn_R}N$，则命

$$\begin{aligned} \sigma:\quad & R/I \longrightarrow \mathrm{End}N \\ & r+I \longmapsto \psi(r) \end{aligned}$$

时，可知σ是环同态映射，也即σ是R/I到N的一个表示。因此，若$I\subseteq a_{nn_R}N$，则当定义$(r+I)x=\sigma(r+I)(x)$，也即定义$(r+I)x=rx$时，左R-模N就成为左R/I-模。

由左R-模及右R-模的定义知道，左R-模的理论和右R-模的理论是平行的。以后一般我们只就左R-模来进行论述，右R-模的相应结果则认为是自明的。

在模的理论中，双模的概念有着重要的作用。

定义1.3 设R，S是环，$(M,+)$是Abel群，若M既是左R-模，又是右S-模，而且有

$$(rm)s=r(ms),\qquad \forall r\in R,\quad s\in S,\quad m\in M,$$

则称M是左R、右S双模，或称M是(R,S)-双模。

有时也用${}_RM_S$表示M是(R,S)-双模。

例如，设V是域F上向量空间，则V是右F-模。命R是V的全体线性变换作成的环，则由例1.3知V是左R-模。因为明显有

$$(fx)a=f(xa),\quad \forall f\in R,\quad a\in F,\quad x\in V,$$

故V成为(R,F)-双模。

又容易知道，任意左R-模都是$(R,\mathbf{Z})$-双模，任意右R-模都是$(\mathbf{Z},R)$-双模，对于任何环R，R总是(R,R)-双模。

1.2 子模、商模

定义1.4 设M是左R-模。若M的一个非空子集N既是$(M,+)$的子群，且对任何$r\in R$及$y\in N$，恒有$ry\in N$，则称N是左R-模M的一个子模。

由定义立刻知道，当N是左R-模M的子模时，对于$r\in R$及$y\in N$，定义ry是r及y在M中的积，则N是左R-模。又易知，左R-模M的一个非空子集N是M的子模，当且仅当N对于M的加法封闭，且对任何$r\in R$及$y\in N$，恒有$ry\in N$。

左R-模M的仅由$(M,+)$的零元作成的子集0是M的子模，叫做零子模。可知，对于任何左R-模M，0及M总是M的子模。

例1.5　域F上向量空间V是左F-模．可知左F-模V的子模与域F上向量空间V的子空间一致．

例1.6　左$\mathbf{Z}$-模M的子模与$(M, +)$的子群一致．

例1.7　设V是域F上向量空间，$\mathscr{A}$是V的一个线性变换．命λ是域F上未定元，则有环$F[\lambda]$．对于$f(\lambda)\in F[\lambda]$及$x\in V$，定义$f(\lambda)x=f(\mathscr{A})(x)$，则$V$成为左$F[\lambda]$-模．可知左$F[\lambda]$-模$V$的子模与$V$的对$\mathscr{A}$不变的子空间一致．

例1.8　左R-模R的子模与环R的左理想一致．

若$\{N_\alpha|\alpha\in J\}$是左R-模M的一集子模，则易知$\bigcap_{\alpha\in J}N_\alpha$是$M$的子模．

现在介绍一种构造子模的普遍方法．设X是左R-模M的一个子集．命$\{N_\alpha|\alpha\in J\}$是M的所有含X的子模作成的集．于是$\bigcap_{\alpha\in J}N_\alpha$是$M$的子模，它叫做$X$生成的子模，记作$\langle X\rangle$，并称$X$是$\langle X\rangle$的一个生成系．$X$中的每一个元素叫做$\langle X\rangle$的一个生成元．容易知道，$\langle X\rangle$是$M$的含$X$的最小子模，即若$M$的子模$N$含$X$，则$N$必含$\langle X\rangle$．又易知空集$\phi$生成的子模$\langle\phi\rangle$是零子模：$\langle\phi\rangle=0$．当$X=\{x_\beta|\beta\in K\}\neq\phi$时，可知$\langle X\rangle=\{\sum_{\beta\in K}r_\beta x_\beta|r_\beta\in R$，且几乎所有$r_\beta=0\}$，这里所谓“几乎所有$r_\beta=0$”是指“只有有限个$\beta\in K$使$r_\beta\neq0$”，特别，当然包含“$r_\beta=0$，$\forall\beta\in K$”这种情况．若$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是$M$的一个有限子集，则称$\langle X\rangle$是$M$的一个有限生成子模或$f.g.$子模，并记$\langle X\rangle=\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$．可知这时$\langle X\rangle=\{\sum_{i=1}^n r_ix_i|r_i\in R, i=1, 2\cdots, n\}$．特别，若$X=\{x\}$，则$\langle X\rangle=\langle x\rangle$叫做由$x$生成的循环子模．命$Rx=\{rx|r\in R\}$，则可知$\langle x\rangle=Rx$．若$M=\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$，则称$M$是有限生成模或$f.g.$模．若$M=\langle x\rangle$，则$M$叫做由$x$生成的循环模．

若$\{N_\alpha|\alpha\in J\}$是M的一集子模，则$\langle\bigcup_{\alpha\in J}N_\alpha\rangle$叫做$\{N_\alpha|\alpha\in J\}$

的和，记作$\sum\limits_{\alpha\in J}N_\alpha$。可知$\sum\limits_{\alpha\in J}N_\alpha=\{\sum\limits_{\alpha\in J}x_\alpha\ |x_\alpha\in N_\alpha$，且几乎所有$x_\alpha=0\}$。当$J=\{1,2,\cdots,n\}$是有限集时，$\{N_i|i=1,2,\cdots,n\}$的和记作$\sum\limits_{i=1}^{n}N_i$，或$N_1+N_2+\cdots+N_n$。可知$N_1+N_2+\cdots+N_n=\{x_1+x_2+\cdots+x_n|x_i\in N_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$。

于是对于任何左R-模M，总有$M=\sum\limits_{x\in M}Rx$。若$M=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$，则可知$M=\sum\limits_{i=1}^{n}Rx_i$。

设M是左R-模，并设N是M的一个子模。于是有商群M/N。对于$r\in R$及$x+N\in M/N$，定义$r(x+N)=rx+N$，则易知M/N成为左R-模，它叫做M对N的商模。

1.3 模同态映射

定义1.5 设M及N都是左R-模。若映射$\varphi: M\longrightarrow N$满足

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),\qquad \forall\ x,y\in M,$$
$$\varphi(rx)=r\varphi(x),\qquad \forall\ r\in R,\quad x\in M,$$

则称φ是M到N的一个左R-模同态映射，简称左R-映射。

容易知道，

$$\begin{aligned}0:\ &M\longrightarrow N\\ &x\longmapsto 0\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}1_M:\ &M\longrightarrow M\\ &x\longmapsto x\end{aligned}$$

都是左R-映射。

设φ及ψ是M到N的两个左R-映射。若$X=\{x_\alpha|\alpha\in J\}$是左$R$-模$M$的一个生成系，则容易知道，$\varphi=\psi$，当且仅当$\varphi(x_\alpha)=\psi(x_\alpha)$，$\forall\ \alpha\in J$。

例1.9 设V及W是域F上向量空间，则V及W都是左F-模。

可知V到W的左F-映射与空间V到空间W的线性变换一致。

例1.10 左$\mathbf{Z}$-模M到左$\mathbf{Z}$-模N的左$\mathbf{Z}$-映射与$(M, +)$到$(N, +)$的群同态映射一致。

当$\varphi: M \longrightarrow N$是左$R$-映射时，记

$$\operatorname{im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in M\},$$
$$\ker\varphi = \{x \in M \mid \varphi(x) = 0\},$$

它们分别叫做φ的象及核。易知$\operatorname{im}\varphi$是N的子模，$\ker\varphi$是M的子模. 又记

$$\operatorname{Coker}\varphi = N/\operatorname{im}\varphi,$$

它叫做φ的上核。

设A及B是两个集合，$\varphi: A \longrightarrow B$是映射。若$\varphi$是单射，则记作$\varphi: A \rightarrowtail B$；若$\varphi$是满射，则记作$\varphi: A \twoheadrightarrow B$；若$\varphi$既是单射又是满射，则称$\varphi$是双射，并记作$\varphi: A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$。

易知，

$$\begin{aligned} 1_A:\ & A \longrightarrow A \\ & x \longmapsto x \end{aligned}$$

是双射.

若C是集A的一个非空子集，则映射

$$\begin{aligned} \varphi:\ & C \longrightarrow A \\ & x \longmapsto x \end{aligned}$$

叫做包含映射，记作

$$\varphi: C \hookrightarrow A$$

可知包含映射是单射。

设$\varphi: A \longrightarrow B$是映射，$C$是集$A$的一个非空子集，则得到映射

$$\begin{aligned} \varphi|_C:\ & C \longrightarrow B \\ & x \longmapsto \varphi(x). \end{aligned}$$

它叫做φ在C上的限制。

设φ: $A\longrightarrow B$及ψ: $B\longrightarrow C$都是映射，则得到映射

$$\begin{aligned}\psi\varphi:\ & A\longrightarrow C\\ & x\longmapsto\psi(\varphi(x)),\end{aligned}$$

它叫做φ与ψ的积。

易知，对于任何映射f: $A\longrightarrow B$，g: $B\longrightarrow C$及h: $C\longrightarrow D$，恒有

$$(hg)f=h(gf).$$

又，对于任何映射f: $A\longrightarrow B$及g: $C\longrightarrow A$，恒有

$$f1_A=f,\qquad 1_Ag=g.$$

设φ及ψ都是映射，且$\psi\varphi$有意义。若φ及ψ都是单射，则$\psi\varphi$也是单射；若φ及ψ都是满射，则$\psi\varphi$也是满射。又，若$\psi\varphi$是单射，则ψ是单射；若$\psi\psi$是满射，则ψ是满射。

当φ: $M\longrightarrow N$是左R-映射时，若φ是单射，则称φ是左R-单射；若φ是满射，则称φ是左R-满射，并称N是M的一个同态象，记作$M\sim N$或$M\overset{\varphi}{\sim}N$；若$\varphi$是双射，则称$\varphi$是左$R$-同构映射，并称$M$与$N$同构，记作$M\cong N$或$M\overset{\varphi}{\xrightarrow{\sim}}N$。容易知道，左$R$-模的同构具有反身性、对称性及传递性。

交换图的概念在同调代数中起着重要作用。设f: $A\longrightarrow B$，g: $A\longrightarrow C$及h: $C\longrightarrow B$是映射。若在映射图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

中有$hg=f$，则称此图是交换图。同样，若在映射图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "\psi"'] & D \end{tikzcd}$$

中有$\psi\varphi = gf$，则称此图是交换图。

称可以（唯一地）补成交换图：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\ & C \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

是指当映射f及g已给时，存在（唯一的）映射h使上图是交换图。对于正方形图的情形，其意义自明。

关于左R-映射，我们先证明下面三个命题。

命题 I　设φ：$M \longrightarrow N$是左R-映射，则有

(i) φ 是R-单射，当且仅当$\ker\varphi = 0$；φ 是R-满射，当且仅当$\mathrm{Coker}\varphi = 0$；

(ii) φ是R-单射，当且仅当对于任何左R-模X及任何左R-映射 f, g：$X \longrightarrow M$，由 $\varphi f = \varphi g$必有$f = g$；φ 是R-满射，当且仅当对于任何左 R-模 Y 及任何左 R-映射h, k：$N \longrightarrow Y$，由$h\varphi = k\varphi$必有$h = k$。

证　(i)是明显的。我们证明(ii)。设φ是R-单射。若$\varphi f = \varphi g$，则$\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$，$\forall x \in X$，从而$f(x) = g(x)$，$\forall x \in X$，故$f = g$。反之，命$f$：$\ker\varphi \hookrightarrow M$，$g$：$\ker\varphi \longrightarrow M$是$g(x) = 0$，$\forall x \in \ker\varphi$，则$\varphi f = \varphi g$，从而$f = g$，故$\ker\varphi = 0$。因此由(i)知$\varphi$是$R$-单射。

R-满射的情形留作习题。

命题Ⅱ 设已给左R-映射交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

则有

(i) 若h是R-单射，则$\ker f=\ker g$；

(ii) 若g是R-满射，则$\operatorname{im} f=\operatorname{im} h$。

证 (i)若$f(a)=0$，则由$hg=f$有$h(g(a))=0$，从而$g(a)=0$。反之，若$g(a)=0$，则有$f(a)=h(g(a))=0$，故$\ker f=\ker g$。

(ii) 当$h(b)\in\operatorname{im} h$，其中$b\in B$，则有$a\in A$使$g(a)=b$，从而$h(b)=hg(a)=f(a)$，故$\operatorname{im} h\subseteq\operatorname{im} f$。又因为$f(a)=h(g(a))$，故$\operatorname{im} f\subseteq\operatorname{im} h$，因此$\operatorname{im} f=\operatorname{im} h$。

命题Ⅲ 设已给左R-映射f：$A\longrightarrow B$及g：$A\longrightarrow C$。若g是满射且$\ker g\subseteq\ker f$，则可唯一地补成交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\ & C \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd} \qquad (甲)$$

其中补出的h是左R-映射。

又，h是单射，当且仅当$\ker g=\ker f$；h是满射，当且仅当f是满射。

证 命

$$h:\ C\longrightarrow B$$
$$c\longmapsto f(a),$$

其中$a\in A$满足$g(a)=c$。

因为g是满射，故对$c\in C$，恒存在$a\in A$使$g(a)=c$。若$a'\in A$使$g(a')=c$，则由$g(a)=g(a')$知$a-a'\in\ker g$。而$\ker g\subseteq\ker f$，故$a-a'\in\ker f$，从而$f(a)=f(a')$。因此h是映射。容易验证h是左R-映射。

当$a\in A$时，设$g(a)=c$，则$hg(a)=h(c)=f(a)$，故$hg=f$。因此h使（甲）是交换图。

若左R-映射h'：$C\longrightarrow B$使$h'g=f$，则当$c\in C$时，命$a\in A$满足$g(a)=c$，则$h'(c)=h'g(a)=f(a)$，故$h'=h$。因此，能将（甲）补成交换图的左R-映射h是唯一的。

若h是单射，则由命题Ⅱ知$\ker g=\ker f$。反之，若$\ker g=\ker f$，则当$c\in\ker h$时，有$h(c)=0$。设$a\in A$使$g(a)=c$，则$hg(a)=0$，从而$f(a)=0$。因此$a\in\ker f=\ker g$，从而$g(a)=0$。因此$c=0$。于是$\ker h=0$，故h是单射。

最后，由命题Ⅱ知$\mathrm{im}h=\mathrm{im}f$，故$h$是满射，当且仅当$f$是满射。

和群的情形相类似，对于模，有模同态基本定理及模的三个同构定理。

首先，设N是左R-模M的一个子模。命

$$\rho:\ M\longrightarrow M/N$$
$$x\longmapsto x+N,$$

则易知ρ是左R-满射，它叫自然同态映射。可知$\ker\rho=N$。

定理1.1　（**模同态基本定理**）　设φ：$M\longrightarrow N$是左R-映射。若M'是M的子模且$M'\subseteq\ker\varphi$，则可以唯一地补成交换图

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\rho"'] & & N \\
& M/M' \arrow[ur, dashed, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

其中ρ是自然同态映射，补出的f是左R-映射．又，　f是单射当