线性规划及其在企业中的应用

马家骎　编著

西北大学出版社

线性规划及其在企业中的应用

马家騄 编著

*

西北大学出版社出版发行

（西安市太白路）

新华书店经销　　西北大学印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　印张：6.5　字数：138千字

1989年3月第1版　　1989年3月第1次印刷

印数：1—3000

ISBN 7-5604-0092-2/O·6　　定价：2.30元

前　言

本书不涉及线性规划的数学证明，也不应用诸如矩阵等数学符号。之所以这样做，是想供企业中对数学较为荒疏的计划工作者、经济管理工作者自学使用并供大专院校非数学专业的师生或作教材，或作参考。

本书侧重于追求“会用”与“会算”两个目标，而不顾及“会证”。所谓会用，是指通过各种例题的示范教会读者能写出与自己工作有关的问题的线性规划数学模型，当然，并不是企业管理中所有问题都能用线性规划去解决。所谓会算，是指当决策变量及约束条件较少时，读者可以自己动手求解，并能掌握求解算法以及检验数等计算过程中出现的结论的经济意义，后者对于在计算机上解题也是有帮助的。作者认为，由于计算机的普及，在会用与会算两者中，会用当然应该放在首位，因此，希望多给点例题以帮助会用，同时也将求解过程尽量写得详细点，以有利于会算。

本书所介绍的例题涉及有编制年度生产大纲，年度计划逐月安排，投资决策，新产品能否投产及运输问题，库存问题，下料问题，配料问题，厂址选择等等。本书除介绍线性规划外，还介绍了与线性规划紧密相关的目标规划、0—1规划和整数规划。

作者衷心感谢杨建志、杨晓康两同志在本书编写过程中

给予的帮助。

作者欢迎读者对本书提出批评建议。

马家骅

1988.6.于西北大学

目　　录

第一章　线性规划的数学模型

§1　为什么要学习线性规划

每个企业通常都能生产若干种产品，或者生产若干种不同型号的同类产品。作为例题，不妨设某企业可以生产三种产品，分别叫做P_1产品、P_2产品、P_3产品。

由于三种产品每单位产量（这里说的“每单位”，是按不同产品的实际情况而采取的不同计量单位，如台、件、打、吨、公斤、公尺等）的原材料消耗、工时消耗、设备折旧及管理费用不同，所以成本也不同，加之销售价格不一样，因而三种产品每单位产量的利润就不同。作为例题，不妨设上述三种产品每单位产量的利润分别为c_1、c_2、c_3元。

在一个计划期内（“计划期”是指年、月等一个具体时间期间）该企业会有多少利润呢？这就要牵涉到各种产品的产量。作为例题，不妨设该计划期内P_1产品生产x_1个单位，P_2产品生产x_2个单位，P_3产品生产x_3个单位，并且假设这些产品都能卖得出去。那么，该企业在本计划期内的总利润Z为

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3（元） \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（1.1）$$

其中总利润Z是个变数，它随三个产量变数x_1、x_2、x_3的取值而定。数学上称此方程为“线性函数”，它的特点是：四

个变量Z、x_1、x_2、x_3均为一次方，也就是说上式没有出现x_1^2，或$\sqrt{x_2}$，或($x_1 \cdot x_2$)等等情况。

企业的目标之一，是争取利润达到最大值。今后我们用max表示最大（用min表示最小），因此利润值Z最大，就可表示为$\max Z$。于是称

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.2)$$

为“目标函数”。这个式子既表示了总利润Z的构成，即(1.1)式，又表示了讨论问题的目标是求总利润Z达到最大。

当然，如果将(1.2)式改写为

$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

就表示所讨论的问题的目标是求由

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

构成的目标值Z达到最小。追求利润最小为目标，读者会难于接受，但企业中追求成本最小，运费最小，废料最小等目标，读者是会乐于接受的，因此min也有其实用背景。

回到上述尚未完成的例题上来。(1.2)式说明，因为每种单位产品的利润c_1、c_2、c_3是常数，如果这些利润都是正数，那么，总利润Z随各产品产量x_1、x_2、x_3的增大而增大，也就是说，产得越多，总利润就会越高。能不能将三种产品的产量无限制的加大呢？企业的同志们当然会给出否定的答案。因为各种产品的产量都要受到计划期内的原材料供应量、设备的可用工时、人力、流动资金、库房容量、能源供应量、运输能力、市场需求量种种因素的约束。譬如说，三种产品都要用车床，而本计划期内该厂车床的可用工时只有500个台时，并且由定额可知生产一个单位的P_1产品要用

车床2台时，生产单位P_2产品要用3台时，生产单位P_3产品要用5台时，因此完成三种产品的产量x_1、x_2、x_3必须用去车床台时数为

$$2x_1+3x_2+5x_3\text{（台时）}$$

总共只有500台时，所以，不管x_1、x_2、x_3各为多少，它们要受到共用车床的台时数不得超过500台时的约束。用数学式子表示这一“约束条件”的话，就得到三个产量必须满足

$$2x_1+3x_2+5x_3\leqslant 500 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (1.3)$$

数学中称上式为“线性不等式”。

即使在这个简单的例子中，三个产量也还要受到另外一些显然的约束（限制），那就是，总不能让某种产品的产量为负数吧！变成数学式子，就应该是三个产量分别满足

$$x_1\geqslant 0\text{、}x_2\geqslant 0\text{、}x_3\geqslant 0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (1.4)$$

当$x_1=0$时，就表示P_1产品生产零个，也就是不生产P_1产品，其它两个也可类推。

为了让读者易于明白，现在把上述问题总结一下，并设单位P_1产品的利润具体地为5元，即$c_1=5$元，同样，设$c_2=4$元，$c_3=6$元。

（1）问题：已知某厂可生产三种产品P_1、P_2、P_3，它们都要用车床，车床的可用工时数、单位产品对车床的消耗定额及单位产品的利润均见下表，并假设产品无论生产多少都能卖出去，求使总利润最大的生产计划。

设备 \ 单产定额 \ 产品	P_1	P_2	P_3	可用工时
车　　床	2	3	5	500台时
单产利润	5元	4元	6元	
产　　量	x_1	x_2	x_3	

今后，称能描述一个实际问题的数学表示式为该实际问题的“数学模型”。现将目标函数（1.2）和产量必须满足的约束条件（1.3）、（1.4）放在一块，就得到本问题的数学模型。

（2）数学模型：

$\max Z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$ ……………………（1.5）

满足　$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leqslant 500$ ………………（1.6）

$x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$，$x_3 \geqslant 0$ ………（1.7）

（3）关于制定计划的讨论：

能不能用简单的处理办法——谁的利润大就尽量生产谁——来制定生产计划呢？例如每单位P_3产品的利润$c_3 = 6$元，是三个产品的利润中最大的一个，如果将500台时的车床时间都拿去生产P_3，因为单位P_3产品要用车床5台时，于是可生产$500 \div 5 = 100$个单位的P_3。每单位P_3的利润是6元，所以可得总利润

$$Z = (500 \div 5) \times 6 = 600（元）$$

然而，如果将500个台时的车床可用工时全部去生产利润较小的P_1产品，因为每单位P_1产品要用车床2台时，且利润为5元，故可得总利润

$$Z=(500\div 2)\times 5=1250\text{(元)}$$

由上可知：（i）谁的利润大就生产谁的原则不见得对；（ii）根据已知情况编制生产计划是十分重要的事。

能不能用经验加判断凑出一个计划来呢？凑出一个计划并不难，但这个计划能否使目标达到最大，那就难说了。例如，本例每单位P_2产品所用车床台时数比P_1高，而利润反而比P_1低，显然可判断出生产计划中不能安排P_2产品，也就是x_2一定为零。再考虑到车床每一台时生产P_1产品可盈利5／2元，生产P_3产品可盈利 6／5元，前者比后者大，因此得生产计划

$$x_1=250,\ x_2=0,\ x_3=0$$

这的确是使总利润达到最大的生产计划。但是，如果除车床可用工时的限制外，还有铜材不得超过300公斤的约束；木材不得超过120立方的约束，就会使问题变得更复杂。

（4）更复杂的问题：

生产三种产品，条件如下表，求使总利润最大的生产计划。

资源＼单产定额＼产品	P_1	P_2	P_3	可用资源
车床	2	3	5	500台时
铜材	4.2	3.0	3.5	300公斤
木材	8.7	4.8	6.2	120立方
单产利润	18元	20元	25元	
产量	x_1	x_2	x_3	

它的数学模型是：

$$\max Z = 18x_1 + 20x_2 + 25x_3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.8)$$

满足 $\quad 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leqslant 500 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.9)$

$$4.2x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 \leqslant 300 \quad \cdots\cdots (1.10)$$

$$8.7x_1 + 4.8x_2 + 6.2x_3 \leqslant 120 \quad \cdots\cdots (1.11)$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \quad \cdots\cdots\cdots (1.12)$$

这时，再要凑出一个既要满足所有约束条件（1.9）到（1.12）的解，又要使目标函数（1.8）达到最大的生产计划来，就难了。即使本例还能凑，那么产品数或者资源限制所形成的约束条件数再增多时，又怎么办呢？

能不能算出所有满足各种约束条件的产量值及与其相应的总利润，然后比较各总利润的大小，以制定生产计划呢？例如

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$$

显然它们使约束条件（1.9）到（1.12）都成立，是一个可以行得通的解，简称为"可行解"。它所对应的Z值为$Z = 18$。而

$$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$$

显然也是一个可行解，它所对应的目标函数值$Z = 56$。

………………………………

这种做法，数学上称为穷举法。这种做法更不可取。因为本例并没有说x_1、x_2、x_3只能取整数，因此满足各约束条件的可行解，一般可能有无穷多个，没法穷举完。即使加上x_1、x_2、x_3只能取整数的约束，当产品一多时，或者可行解很多，或者会有无穷多解，也难于或无法用穷举法进行。

综上所述可见，作计划是企业管理中重要的、大量的、不可回避的问题，而作出一个充分利用现有人、财、物使得

效益最大的生产计划其难度很大，而企业又很需要解决这类问题。怎么办呢？本书要学的内容——线性规划——是各级决策人员编制某些类型的计划的有力工具。

§2 什么叫线性规划

"规划"这个词，可以理解为制定计划的意思。"线性"是指线性函数、线性方程及线性不等式。"线性规划"可以理解为一类计划问题的数学模型。这类计划问题必须具备三个要素和一个要求。三个要素是：

（1）决策变量

上节例中的计划问题，必须回答三种产品的产量x_1、x_2、x_3应该是多少？如果不考虑约束和目标，则x_1、x_2、x_3可以分别取各式各样的数值，因此它们是可以变化的量，简称为"变量"。制定计划的目的，就是要作出决策，即在这些各式各样的值中，按目标和约束的要求去选出一组最好的值，因此，称这些制定计划的过程中需要确定的量为"决策变量"。

（2）约束条件

由于设备能力、原材料、动力能源、市场需求、资金人力等等条件的限制，决策变量必须受到约束，这些约束的数学表达式，统称为"约束条件"。如上例中(1.9)到(1.12)都是约束条件。今后称满足所有约束条件的解为可行解。

（3）目标函数

制定计划总会有目标，如产值最高、产量最大、利润最大、原料最省、成本最低、残毒最小、设备利用率最高、设

备负荷最均衡、设备布局最合理、厂址选择最有利、资金周转速度最快等等。如上例中就是求利润最大。目标函数首先要求写出目标与决策变量的关系式，称为目标函数的构成式，如上节例中的

$$Z=18x_1+20x_2+25x_3$$

其次要指出目标的要求是达到最大呢？还是达到最小？如（1.8）式

$$\max Z=18x_1+20x_2+25x_3$$

它既表示了总利润的构成式，又表示了要求达到总利润最大。

三个要素，缺一不可。倘若所要制定的计划，其目标是颜色最漂亮，这是一个因人而异的定性指标，决策变量选不出来，目标函数也没法构成，就不能用线性规划去解决。

又如，仅要求

$$\max Z=3x_1+2x_2+x_3$$

由于它没有约束条件，根据上式的具体情况，显然Z随三个变量的增大而增大，找不出使Z最大的决策变量值，这也不能用线性规划方法去解决。

（4）一个条件

目标函数构成式与所有的约束条件，都必须分别是线性函数，线性方程或线性不等式。也就是说，所有决策变量在目标函数与约束条件中都必须是一次方的。

如果某计划问题，有决策变量，有目标函数，有约束条件，但不满足（4）的线性要求，则称此问题为“非线性规划”。非线性规划和线性规划是运筹学中的不同分支，本书不讨论非线性规划。

§3　企业中使用线性规划的例子

在企业管理(包括计划工作)中线性规划应用较广，但本书篇幅有限，所以只能在本节及以后章节中略加介绍一些应用例题，目的在于起到使读者有所借鉴、有所启发的作用。

例 1　编制年度生产大纲

编制年度生产大纲对接受订货以及编制全年生产计划都有重要价值。本例仅是将§1的例题加以推广。

某厂可生产n种产品，已知本年度内有限制的资源供应量、市场对产品的需求量、每单位产品对这些资源（设备、原料、能源、人力等）的消耗定额以及每单位产品的利润，求使总利润最大的生产计划。

解：首先扣除指令性计划对资源的消耗量，得到完成指令性计划后本年度所余下的各种非负的资源量b_1、b_2、…b_m。也就是说，b_i表示本年度第i种资源除完成指令性计划外还可以使用的最高限额。例如令$i=1$表示第一种受限制的资源，假设它代表钢材，则$b_1=100$吨就表示除指令性计划外各种产品消耗的钢材总量不能超过100吨。

用a_{ij}表示生产每单位j产品需用第i种资源的消耗定额。如a_{12}就表示每生产一个单位的2号产品需消耗1号资源（钢材）的量。

记c_j为每单位j号产品的利润。

记d_j为根据市场预测知道的第j种产品本年度的最大销售量。

资源 \ 定额 \ 产品		1	2	……	n	可用资源量
原料类	钢材	a_{11}	a_{12}	……	a_{1n}	b_1
	铜材	a_{21}	a_{22}	……	a_{2n}	b_2
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
设备类	车床	⋮	⋮		⋮	⋮
	磨床	⋮	⋮		⋮	⋮
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
能源及外部条件	外协件	⋮	⋮		⋮	⋮
	水	⋮	⋮		⋮	⋮
	煤	⋮	⋮		⋮	⋮
	气	⋮	⋮		⋮	⋮
	电	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	b_m
单位产品利润		c_1	c_2	……	c_n	
市场限制		d_1	d_2	……	d_n	
决策变量		x_1	x_2	……	x_n	

有了上面的调查结果与符号假设，就可以写出本问题的数学模型了。

（1）决策变量：令第j种非指令性计划产品的产量为x_j个单位（已在上表最下面一行写过了）。

（2）目标函数：因为每单位的j号产品可盈利c_j元，已设其产量为x_j个单位，故可盈利（c_jx_j）元。将各种非指令性计划盈利值相加，得总利润，即目标函数的构成式为

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

利润值是考核企业绩效的重要指标之一，当然是越大越好。注意，其中未考虑指令性计划产品的利润。

（3）约束条件：以第一种有限制的资源——钢材为例，每单位1号产品需用钢材材a_{11}吨，要生产x_1个单位的1号产品，共用去（$a_{11}x_1$）吨钢材，同理，x_2个单位的2号产品要用去（$a_{12}x_2$）吨钢材，……，n种产品共用去

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n$$

吨钢材。由于本年度最多可供应b_1吨钢材，显然，年度计划中各种产品的产量总共用掉的钢材量不能超过b_1吨，于是有

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1$$

这里"$\leqslant$"号，表示总共用掉的钢材量要小于或最多等于b_1。

类似地能得到第二种有限制的资源所形成的约束条件

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2$$

同理可写出m个有限制的资源所形成的约束条件。

考虑到1号产品的产量x_1受市场需求量d_1的限制，因此有

$$x_1\leqslant d_1$$

同理有

$$x_2\leqslant d_2$$

等等一共是n个约束条件。

每种产品的产量x_j都不能是负数，因此还有各决策变量应该满足的非负要求：

$$x_1\geqslant 0$$

$$x_2\geqslant 0$$

………