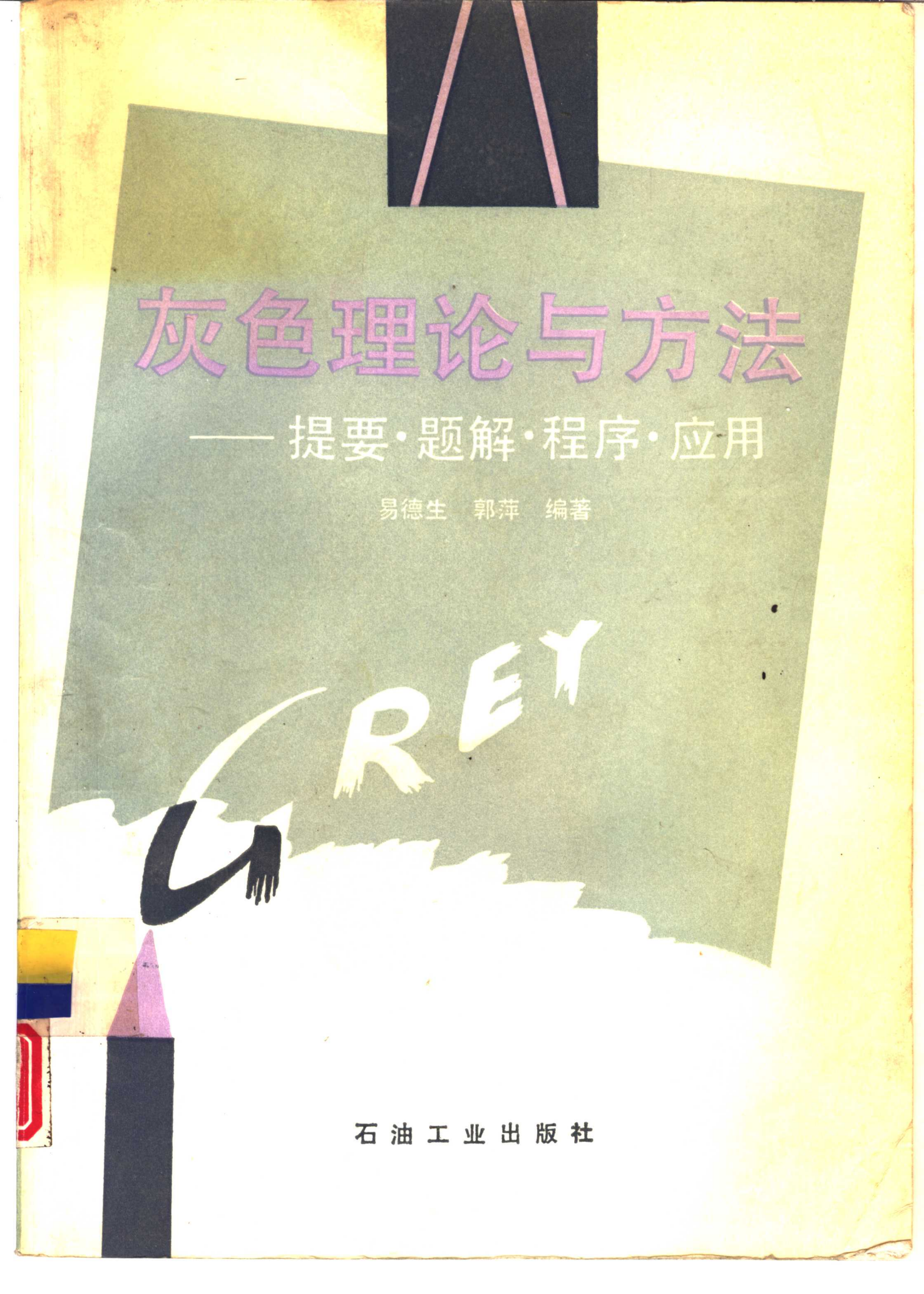




灰色理论与方法

——提要·题解·程序·应用

易德生 郭萍 编著

石油工业出版社

灰色理论与方法

——提要·题解·程序·应用

易德生 郭 萍 编著

石油工业出版社

内 容 提 要

本书系根据著者讲授“灰色理论与方法”课程的讲稿充实整理而成。全书共分八章，按提要、公式、例题和实例、习题和解答、程序和说明四部分论述。内容系统精炼、重点突出，有大量例题、实例和习题解答，实用性很强。

本书兼有工具书、习题解、程序集等多种功能，既可单独使用，也可与其他灰色系统专著配套。适宜于从事灰色理论研究和应用的各学科、各专业的科技工作者、经济管理人员和大中专师生阅读，也可作为各级、各类学校开设“灰色理论与方法”课程的教材或教学参考书。

灰 色 理 论 与 方 法

——提要·题解·程序·应用

易德生 郭 萍 编著

石油工业出版社出版
(北京安定门外安华里二区一号楼)
北京地质印刷厂排版
北京燕华印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

787×1092毫米 16开本 26¹/₄ 印张 660 千字 印1—2,750
1992年1月北京第1版 1992年1月北京第1次印刷
ISBN 7-5021-0581-6/TF·554
定价：6.80元

前 言

“灰色理论”自1982年诞生以来,由于广大理论和应用工作者的努力,其理论研究有了新的进展,应用研究有了大的开拓。现在,“灰色理论”已跨出控制范畴,渗透到了社会、经济、气象、农业、生态、水利、生物、医学、交通、材料、管理、教育、政法、石油、金融、史学等众多领域,取得了不少研究成果。到目前为止,已经出版了《灰色控制系统》、《灰色系统基本方法》、《多维灰色规划》等多本专著。

为了满足广大“灰色理论”研究和应用工作者的需要;为了帮助读者顺利阅读“灰色理论”的专著,更好地理解、更快地掌握“灰色理论”的基本概念、基本内容和基本方法,根据著者的研究心得以及讲授“灰色理论与方法”课程的体会,在吸收近几年研究和应用成果的基础上,我们编著了本书。全书分为八章,内容包括:灰色理论概言,灰色系统数学描述,灰关联分析,灰色生成,灰色建模,灰色预测,灰色决策,灰色控制。分提要和公式,例题和实例,习题和解答,程序和说明四个部分加以叙述。其中第一部分扼要地论述了基本理论内容、基本方法步骤,概括出计算应用公式,以便于解题、应用时参考,并为阅读后面内容打下基础。第二部分列举出具有代表性的例题和实例,全面地介绍解题的思路和步骤,阐述分析问题和解决问题的方法。第三部分除选编了《灰色系统基本方法》和《灰色系统理论函授教材》(包括高级班和普级班)等书的全部习题之外,还增加一些习题,并且全部给出了解答。第四部分给出了计算机运算所使用的程序清单和详细说明(包括操作步骤)并有例题计算结果(所有程序均在IBM—PC机上通过,阅后即可使用)。这四部分内容围绕着“应用”这个目的,构成一个完整的体系,同时也照顾它们的特点,保持各自的独立性,读者既可系统阅读,也可根据需要选阅其中的某一部分。

本书内容系统完整、重点突出、联系实际,有大量的例题、实例和习题解答,特别注意了加强理论价值高、实用性强的部分。叙述上由浅入深、循序渐进,尽量从实际计算入手,介绍方法和步骤,用实例说明方法的具体应用和效果。阅后不但能帮助读者加深对“灰色理论”的理解,而且能使读者仿照例题和实例很快地联系实际加以运用。本书兼有工具书、习题解、程序集等数种功能,既可单独使用,作为“灰色理论与方法”课程的教材,也可与其他专著配套使用,作为“灰色理论”课程的辅助教学用书。

“灰色理论”的创始人、华中理工大学邓聚龙教授对本书初稿进行了认真、细致的审阅,提出了许多宝贵意见,在此表示衷心感谢。

由于编著者学识水平有限,书中不当之处,敬请读者批评指正。

编著者

1989.12.

目 录

第一章 灰色理论概言	(1)
一、提要 and 公式	(1)
(一) 灰含义与灰现象	(1)
(二) 白色、黑色和灰色系统	(1)
(三) 灰数、灰元、灰关系	(2)
(四) 本征灰系统与非本征灰系统	(2)
(五) 白色系统与灰色系统的区别	(3)
(六) 灰色系统与模糊数学、黑箱方法的区别	(3)
(七) 灰度	(4)
(八) 灰因素产生的背景	(4)
(九) 灰色理论的形成	(5)
(十) 灰色理论的研究内容	(6)
二、例题和解答	(6)
第二章 灰色系统数学描述	(9)
一、提要 and 公式	(9)
(一) 灰数	(9)
(二) 灰函数	(14)
(三) 灰方程与灰矩阵	(15)
(四) 灰线性空间	(15)
(五) 灰集合	(16)
(六) 灰色数列	(16)
(七) 灰矩阵的测度	(16)
二、例题和解答	(17)
三、习题和题解	(20)
第三章 灰关联分析	(25)
一、提要 and 公式	(25)
(一) 灰关联分析	(25)
(二) 关联系数与关联度	(25)
(三) 数据变换	(26)
(四) 关联序与关联矩阵	(30)
(五) 优势分析	(31)
(六) 灰关联空间	(32)
(七) 光滑离散函数与光滑度	(33)
二、例题和实例	(33)
三、习题和解答	(46)

四、程序和说明	(58)
(一) 程序3—1: 初值化数据处理	(58)
(二) 程序3—2: 均值化数据处理	(59)
(三) 程序3—3: 灰色关联分析	(61)
第四章 灰色生成	(69)
一、提要 and 公式	(69)
(一) 生成与生成数	(69)
(二) 生成分类	(69)
(三) 累加生成	(69)
(四) 累减生成	(70)
(五) 均值生成	(70)
(六) 级比生成	(71)
(七) 灰数的白化函数生成	(71)
(八) 灰关联生成	(71)
(九) 灰色统计	(72)
(十) 灰色聚类	(73)
(十一) 生成空间	(74)
(十二) 拓扑空间	(74)
(十三) 生成模型的预测应用	(74)
(十四) 后验差检验	(75)
二、例题和实例	(75)
三、习题和解答	(88)
四、程序和说明	(111)
(一) 程序4—1: 灰色统计	(111)
(二) 程序4—2: 人员素质的灰色评估	(114)
(三) 程序4—3: 灰色聚类	(123)
第五章 灰色建模	(128)
一、提要 and 公式	(128)
(一) 灰色模块	(128)
(二) 微分拟合建模方法	(130)
(三) 灰色模型建模机理	(133)
(四) 灰微分方程	(133)
(五) 灰导数	(133)
(六) GM (1,1) 模型	(134)
(七) GM (1,N) 模型	(140)
(八) GM (0,N) 模型	(141)
(九) Verhulst模型	(141)
(十) GM (2,1) 模型	(142)
(十一) 离散GM模型	(143)
(十二) 含负值项数列的建模问题	(143)

(十三) 五步建模思想与方法·····	(144)
二、例题和实例·····	(146)
三、习题和解答·····	(169)
四、程序和说明·····	(181)
(一) 程序5—1: 矩阵相乘·····	(181)
(二) 程序5—2: 矩阵求逆·····	(184)
(三) 程序5—3: 最小二乘解·····	(186)
(四) 程序5—4: GM (1,N) 模型·····	(190)
(五) 程序5—5: GM (0,N) 模型·····	(195)
(六) 程序5—6: Verhulst模型·····	(202)
(七) 程序5—7: GM (2,1) 模型·····	(207)
第六章 灰色预测·····	(218)
一、提要 and 公式·····	(218)
(一) 灰色预测定义与分类·····	(218)
(二) 灰变量与灰过程·····	(218)
(三) 数列预测·····	(220)
(四) 灾变预测·····	(224)
(五) 季节灾变预测·····	(227)
(六) 拓扑预测·····	(228)
(七) 系统预测·····	(229)
(八) 灰色预测改进的必要性和途径·····	(230)
(九) 非等间隔序列的灰色预测问题·····	(237)
二、例题和实例·····	(237)
三、习题和解答·····	(255)
四、程序和说明·····	(267)
(一) 程序6—1: 数列预测GM (1,1) ·····	(267)
(二) 程序6—2: 灾变预测·····	(275)
(三) 程序6—3: 季节灾变预测·····	(279)
(四) 程序6—4: 拓扑预测·····	(285)
(五) 程序6—5: 系统预测·····	(293)
(六) 程序6—6: 等维灰数递补动态预测·····	(300)
第七章 灰色决策·····	(307)
一、提要 and 公式·····	(307)
(一) 决策与灰色决策·····	(307)
(二) 灰色局势决策·····	(307)
(三) 灰色层次决策·····	(311)
(四) 灰色线性规划·····	(312)
(五) 灰色整数规划·····	(315)
二、例题和实例·····	(315)
三、习题和解答·····	(335)

四、程序和说明	(349)
(一) 程序7—1: 灰色局势决策	(349)
(二) 程序7—2: 灰色线性规划	(366)
(三) 程序7—3: 灰色整数规划	(370)
第八章 灰色控制	(380)
一、提要 and 公式	(380)
(一) 灰色控制一般问题	(380)
(二) 灰色系统可控性判据	(382)
(三) 灰色系统可观性判据	(383)
(四) 灰色系统稳定性判据	(384)
(五) 系统的发展判据	(385)
(六) 灰色关联控制	(386)
(七) 灰色预测控制	(386)
(八) 灰色协调控制	(386)
(九) 灰色决策控制	(387)
(十) 去余控制	(387)
(十一) 灰色预测控制基本原理	(387)
(十二) 灰色控制系统的等效变换	(388)
二、例题和实例	(388)
三、习题和解答	(399)
四、程序和说明	(406)
(一) 程序8—1: 控制灰阵满秩的可控性	(406)
参考文献	(411)

第一章 灰色理论概言

一、提要 and 公式

(一) 灰含义与灰现象

1. 灰含义

“白”指信息完全确知；“黑”指信息完全不确知；“灰”则指信息部分确知，部分不确知，或者说是信息不完全。这是“灰”的基本含义。

对不同问题，在不同场合，“灰”可以引伸为别的含义。如：

从表象看：“明”是白；“暗”是黑，那么“半明半暗或若明若暗”则是灰。

从态度看：“肯定”是白；“否定”是黑，那么“部分肯定，部分否定”则是灰。

从性质看：“纯”是白；“不纯”是黑，那么“多种成分”则是灰。

从结果看：“唯一”是白；“无数”是黑，那么“非唯一”则是灰。

从过程看：“新”是白；“旧”是黑，那么“新旧交替”则是灰。

从目标看：“单目标”是白；“无目标”是黑，那么“多目标”则是灰。

类似地还可列举不少，但就其基本含义而言，“灰”是信息不完全性与非唯一性。

信息不完全性与非唯一性在人们认识与改造客观世界的过程中是会经常遇到的。

2. 灰现象^[6]

生产资料多种所有制属经济系统的灰现象；一国两制是社会制度的灰现象；抽象派的画，意境朦胧是文化艺术中的灰现象；货币从价值角度看，因人、因地、因时而变化，这是经济尺度中的灰现象。军事系统更是充满灰现象的系统。正如克劳塞维茨指出的那样：

“战争中一切情况都很不确定，这是一种特殊的困难。因为一切行动都仿佛是在半明半暗的光线下进行的，而且，一切往往都象在云雾里和月光下一样……”。这段文字充分说明了战场是个灰色的王国，战争充满着灰色性。作战系统的主要信息是军事情报，而军事情报的不完全和伪假现象是常见的，一条主要的军事情报，往往要付出相当大的代价才能得到。要通过多渠道校核它是很困难的，甚至是不可能的。因此它的灰色性是很突出和不可避免的。在军事力量的估计、战略战术的决策与对策中，不论通过何种手段，往往无法获得全部的信息，而只能得到一部分信息。可以说，一切军事决策、战略部署、指挥行动都是在部分信息已知，部分信息未知的情况下作出的。因此军事系统是个充满灰现象的系统，或者说是个灰度很大的系统。

(二) 白色、黑色和灰色系统

1. 白色系统

客观世界是物质的世界，也是信息的世界。可是，在工程技术、社会、经济、农业、生态、环境、军事等各种系统中经常会遇到信息不完全的情况，如参数（或元素）信息不完全；结构信息不完全；关系（指内、外关系）信息不完全；运行行为信息不完全等等。

信息完全明确的系统称为白色系统。如：一个家庭，其人口、收入、支出、父子、母

女上下间的关系等等完全明确；一个商店，在人员、资金、损耗、销售等信息完全明确的情况下，可算出该店的盈利、库存额，判断商店的销售态势、资金的周转速度等；一个工厂，其职工、设备、技术条件、产值、产量等信息均完全明确，象家庭、商店、工厂这样的系统是白色系统。

2. 黑色系统

信息完全不明确的系统称为黑色系统。如遥远的某个星球，其体积、重量、距地球多远、是否存在生命等等全然不确知；湖北原始森林神农架的野人，其生活习性、群体关系，交换信息的方法等等均完全不确知，这样的一类系统是黑色系统。还有飞碟、太平洋群岛的奇迹、星体异常现象等目前也只能当作黑色系统。

3. 灰色系统

介于上述两者之间的，即信息部分明确，部分不明确的系统称为灰色系统。比如，人体，其身高、体重、年龄等等外部参数和血压、脉搏、体温等内部参数是已知的，这是明确的信息。但人体穴位的多少，穴位的生物、化学、物理性能；生物信息的传递；温度场；意识流……等尚未确知或知道不透彻。因此，这是灰色系统。

灰色系统有时简称为灰系统。

（三）灰数、灰元、灰关系

1. 灰数

灰数、灰元、灰关系是灰现象的特征，是灰色系统的标志。

灰数，指信息不完全的数。如说“某人的年龄18岁左右”，这“18岁左右”便是灰数，是由于对某人确实的出生年月缺乏信息。又如“今天气温在 $15^{\circ}\sim 20^{\circ}$ 之间”，这“ $15^{\circ}\sim 20^{\circ}$ 之间”也是灰数；“某商品的价格在10元以下”，这“10元以下”也是灰数。

2. 灰元

灰元，指信息不完全的元素。比如货币有两种功能，无论作为流通手段或是价值尺度，都是不确定的。10元钱代表多少商品并不确定，它会因时、因地、因情况而异；10元钱代表多少工资也不确定，它可因人、因时、因地而异。除了货币之外，还有如令箭、商标、古文物、邮票等也都是灰元。总之，那些经过某种命定之后，才有某种特殊价值、特殊功能的元素，都是信息不完全的元素，是灰元。

3. 灰关系

灰关系，指信息不完全的关系。比如多种经济成分并存的经济关系；一国两制的政治关系；一种商品价格浮动导致其他商品价格波动的“撞击关系”等均为灰关系。又比如在工程技术中，要使其产品 U 的 n 项技术指标都达到标准（国标或部标），若该产品的技术指标集为 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ，要使 U 达 X ，除了考虑 U 达标的确知因素如技术力量、工艺装备、材料质量、实验手段等与 X 中诸因素的关系外，还要考虑生产中潜在的、突如其来的“不确知因素”，如设备精度的变化、技术人员的调动、原材料的变更、骨干工人人事事故的发生、外界技术干扰等与 X 中诸因素的关系。而这些“不确知因素”对产品 U 达标起着不可忽视的作用（积极的或消极的），而每个“不确知因素”对产品达标所起的作用比人们难以用确切的数量表达，充其量只能给出一个大致范围，这种“不确知因素”与 X 的关系也是灰关系。

显然，灰色系统中往往包含灰数、灰元、灰关系。

（四）本征灰系统与非本征灰系统

1. 本征灰系统

社会、经济、农业、生态等，这类系统，虽然可以量化、模型化、实体化，或者说，可以用白色参数、白色元素、白色结构等方式出现，但这仅仅是按人们的某种观念、某种逻辑思维、某种推导得到的“相似”系统、“同构”系统，并不是真正的原系统。也就是说，这类系统没有物理原型，缺乏建立确定关系的信息，系统的基本特征是多个相互依存、相互制约的部分、部门、元素，按照一定的序关系组合，且具有一种或多种功能。象这样的系统，是客观存在的抽象系统，可视为主观的本征性灰色系统，简称为本征灰系统。

2. 非本征灰系统

与本征灰系统相对应，具有客观实体的、实际的物理系统，若有些信息暂时还不确知，尚未获得，则称其为非本征性灰色系统，简称非本征灰系统。

(五) 白色系统与灰色系统的区别

区别白色系统与灰色系统的重要标志是系统中各因素间是否具有确定的关系。因素间具有确定映射关系的系统是白色系统，没有确定映射关系的系统是灰色系统。

例如，一个加有电压的电阻（见图1—1—1），也可视为一个系统，如果记 $U(t)$ 为 t 时刻的电压，根据欧姆定律可知，电压 U 与电流 I 及电阻 R 之间存在下述关系：

$$U = IR \quad (1-1-1)$$

因此，对应 $U(t)$ 便有 t 时刻的电流 $I(t)$ ，且有

$$I(t) = \frac{1}{R} U(t) \quad (1-1-2)$$

令 $t = 1, 2, \dots, n$ 便可得到电压序列 U

$$U = (U(1), U(2), \dots, U(n))$$

根据式(1—1—2)，可得电流序列 I

$$\begin{aligned} I &= (I(1), I(2), \dots, I(n)) \\ &= \left(\frac{U(1)}{R}, \frac{U(2)}{R}, \dots, \frac{U(n)}{R} \right) \end{aligned}$$

这就是说，由电压序列 U 可以唯一地确定一个电流序列 I ，这便称为电压与电流之间存在有确定的映射关系。因此，这个系统是白色系统。但是，有的系统因素之间却没有明确的映射关系。例如农业中的粮食生产系统，肥料、种子、农药、土壤、气象、水利、劳力、耕作、政策等都是影响粮食生产的因素，但难以找到全部因素，更难找到肥料、农药、…这些因素与粮食产量的映射关系（有时即使建立了某种关系，那也是在一定假设条件下，按某种理性认识或某种逻辑推理得到的）。这显然是灰色系统。

(六) 灰色系统与模糊数学、黑箱方法的区别

“灰色系统”与“模糊数学”、“黑箱”方法的区别，主要在于对系统内涵与外延的处理态度不同；研究对象内涵与外延的性质不同。

灰色系统着重研究内涵不明确、外延明确的对象。例如“这个人的年龄在18岁左右”这是灰色系统的命题。因为是指“这个人”，而不是指“其他人”，所以外延是明确的。然而对这个人确切的出生日期又不清楚，这表明内涵不明确。在研究方法上，灰色系统采取补充信息转化性质的方法。比如，对“这个人”补充出生日期的信息，便可将此入灰的内

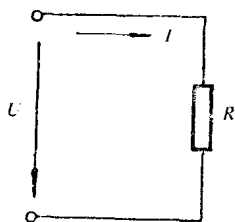


图 1—1—1 加有电压的电阻

涵，转化为白的内涵。

模糊数学着重研究内涵明确，外延不明确的对象。例如“年青人”这个概念，人人都明确，因此内涵是明确的。然而，到底多少岁的人能算作“真正的年青人”，则很难划分，这表明外延不明确。在研究方法上，模糊数学采取用模糊集来描述“年青人”，而不是采取补充信息使命题性质转化的方法。

“黑箱”方法是着重系统外部行为数据的处置方法，是因果关系的量化方法，是扬外延而弃内涵的处置方法，而灰色系统方法是外延内涵均扬的方法。具体说，就建模基础而言：灰色系统按生成数列建模，黑箱方法按原始数据建模；就建模概念而言：灰色系统可以对单端对象（单序列）建模，而黑箱方法只适合双端对象（双序列）建模。

（七）灰度

任何事物或事物的状态，都是有序与无序在不同程度的辩证统一，这种统一的测度就是灰度。在灰色系统中，“灰度”代表系统“灰”的程度，或者说，用灰度来度量系统“灰”的程度。

在不同领域，灰度有不同的内涵与名称。热力学中“熵”是灰度，熵越大，灰度越大，磁铁中偶极子的取向一致程度是灰度，偶极子取向越一致，灰度越小，磁通量越大。系统中涨落的随机性，导致行为灰度的产生，随机性越大，灰度越大。

通过灰度可区分系统的特性、状态与层次；划分系统的类别；确定系统的研究途径与方法；制定研究的策略与目标；衡量系统的有序程度；估计系统的时间序、空间序、结构序、功能序，从而对整体作合理规划，对局部作有针对性的调整，对时空结构作恰当的配置。使系统在每个不同白化程度的发展阶段，都有合适的结构、协调的关系、适应的环境、尽可能好的功能。

（八）灰因素产生的背景

一般说来，系统是否会出现信息不完全的情况，或者说是否产生灰因素、灰现象，取决于层次，即认识层次、信息层次、决策层次。认识层次又可分为时间认识层次、关系认识层次、机理深化认识层次。

所谓时间认识层次，就是在时间轴上，以原点代表“现在”，则负半轴代表过去，正半轴代表未来，越往左发展，即越往远古，认识越不清楚，认识的灰度越大。越往右发展，即越往遥远的未来，认识的灰度也越大。

所谓关系认识层次，就是在关系空间，以本人（或某人）为原点，则上级下属、亲戚朋友、左邻右舍构成一个立体的关系网。显然，在这个关系网中，越远离原点，关系越复杂，关系认识的灰度越大。

所谓机理深化认识层次，是指认识的深度变化。比如，若以直觉认识为起点，则越远离直觉，认识的灰度就越大。从宏观看，认识延伸到地球、太阳系、银河系以外，越延伸认识灰度越大。从微观看，认识延伸到分子、原子、原子核、电子，越延伸认识灰度也越大。

认识层次实质上是由信息层次引起的，因为人们不能超越信息而认识。因此可以说，认识层次是信息层次的一元映射。同样可以认为决策层次是信息层次与认识层次的二元映射。

事实上，系统是白还是灰，往往与观测的层次有关。如果用高层次代表系统的宏观层次、系统的整体层次、认识的概括层次，用低层次代表系统的微观层次、系统的分部（深部、内部）层次、认识的深化层次，则同一个系统，同一个参数，在高层次是白的，而到

了低层次却可能是灰的。如人的年龄，从“年”这个层次来看是白的，可是从“秒”、“微秒”等层次来看却是灰的。这说明“灰”取决于层次；“灰”与“白”之间存在着深刻的辩证关系，它们之间不仅相互依存，而且在一定条件下相互转化。

（九）灰色理论的形成

灰色理论是中国学者，邓聚龙教授1982月3月在国际上首先提出来的。第一篇灰色系统的文章发表在由北荷兰出版公司出版的《SYSTEMS AND CONTROL LETTER》刊物上，题为“Control Problems of Grey Systems”。文章发表后引起了国际上的重视，受到了好评。

灰色理论的形成是有个过程的。早年邓教授从事控制理论和模糊系统的研究，取得了许多成果，其中60年代提出的“去余控制”就包含了灰色控制的萌芽，并解决了参数不完全系统的镇定问题。后来，他接受了全国粮食预测的课题，在研究中开始跳出纯控制理论的范畴。为了预测，他研究了概率统计、时间序列等常用方法，发现概率统计追求大样本量，而时间序列法只致力于数据的拟合，不着重规律的发现。邓希望在可利用数据不多的情况下，找到长时期起作用的规律，于是进行了用少量数据作微分方程建模的研究。这一工作开始并不顺利，一时建立不起可供应用的模型。后来，他将原始数据作了各种处理，找到了累加生成，发现累加生成曲线是近似的指数增长曲线，而指数增长正符合微分方程解的形式。在这个基础上，进一步研究了离散函数光滑性、微分方程背景值、平滑性等一些基本问题，同时考察了有限与无限的相对性，定义了指标集拓扑空间的灰导数，最后解决了微分方程的建模问题。从所建模型中，发现单数列微分模型有较好的拟合和外推特性，所需的最少数据只要四个，适合于预测。经多个领域的使用证实了模型的预测精度，且使用简便，既可用于软科学，如社会、经济等方面，又可用于硬科学，如工业过程的预测控制。多数列的微分模型，揭示了系统各因素间的动态关联性，是建立系统综合动态模型的基本方法。以单数列的微分模型 $GM(1,1)$ 为基础，得到了五种灰色预测方法，将 $GM(1,1)$ 渗透到局势决策与经典的运筹学的规划中，建立了灰色决策，将已经建立的关联度、关联空间包括在内，这样便形成了以系统分析、信息处理（生成）、建模、预测、决策、控制为主要内容的灰色理论。

灰色理论的产生，从思维逻辑的观点看，是由“黑箱”到“灰箱”再到“灰色系统”。“黑箱”指内部结构、特性、参数全部未知的对象，只从对象外部来研究它。“灰箱”指对象中有了部分明确的信息，但其框架没有打破，箱的约束依然存在，因此其研究方法和黑箱方法一样还是从对象外部进行。“灰色系统”不同于“灰箱”，它突破了箱的约束，主张从事物内部去研究系统，充分利用那部分白色信息。

灰色理论的产生，从系统控制理论的观点看，是由经典控制理论到现代控制理论（包括大系统理论），再由现代控制理论到模糊控制理论再到灰色系统理论。经典控制理论研究的对象是单输入、单输出的线性定常系统，建立的数学模型是传递函数，采用的分析方法是频率法与根轨迹法，其特点是从外部研究系统。现代控制理论研究的对象是多输入、多输出的复杂系统，建立的数学模型是状态方程，采用的分析方法是状态空间分析法，其特点是从内部研究系统。上述两种理论均依赖于系统正确、严密的数学模型。随着社会的发展，研究的对象越来越复杂，人们遇到了得不到精确数学模型的系统，于是出现了模糊控制理论。这种理论的特点是不要求对象的精确数学模型，其基本思想是将人的经验写成模糊控制规划，利用模糊数学为工具，确定控制量去控制被控对象。尽管以上三种理论各

具特点,各有区别,但它们有个共同点,研究的都是白色系统。而前面已知,客观世界大量存在的是灰色系统,这类系统无法用传统方法建模,这就导致了灰色理论的问世。

(十) 灰色理论的研究内容

从白化的角度看,灰色理论的研究内容包括下述七个方面。

(1) 对不确定的灰数,按白化权函数取一个确定值,称为灰数白化。以灰数白化为基础的方法有灰色统计、灰色聚类。

(2) 一个系统因素很多,各种因素关系不清,影响不明,通过灰色系统理论的方法使关系量化、序化,这是因素关系的白化,相应的方法称为关联度分析方法。

(3) 抽象的因素、现象,通过对应量(或称映射量),使其数据化、量化,这称为抽象到数量的白化,灰色系统理论称此为灰映射。

(4) 系统的行为数据可能杂乱无章,没有直观的规律,通过数据处理,整理出较明显的规律,这是数字序列的白化,灰色系统理论称为生成。

(5) 经过处理后的数据列,虽然有了初步的规律,但不一定能够用数学关系作出更为精确的表达。灰色系统理论将这些加工后的数据列,建立数学关系,这是模型的白化,相应的模型称为灰色模型,这个建模过程称为灰色建模。

(6) 情况不够明确,对策不够完善,在这种情况下作出决策,这是局势的白化,相应的决策称为灰色决策。

(7) 对未来发展,通过模型作定量预测,这是发展的白化。相应的预测称为灰色预测。

概括起来,灰色系统理论的研究内容,包括关联分析、生成、灰色建模、灰色预测、灰色决策和灰色控制等。

二、例题和解答

〔例题1—1〕如何从信息的角度区别随机性、模糊性和灰色性?

解答:随机性是信息的不确定性;随机理论研究这种不确定性。

模糊性是信息的不清楚、不分明性,模糊集理论研究这种不分明性。

灰色性是信息的不完全确知性(即部分确知、部分不确知),灰色理论研究这种不完全确知性。

〔例题1—2〕试举例说明系统的灰色性。

解答:在哈肯(Hakan)的协同学(Synergetics)中,描述系统从无序到有序(或从有序到无序)演化过程的是序参量演化主方程。该方程中有一个很重要的所谓涨落项,普里高津(Prigogine)在耗散结构理论中也研究了基本意义相同的涨落问题。他们认为这种涨落的原因主要来源于对系统信息了解不足和海森堡测不准原理及系统的混乱。这里的信息了解不足就是信息不完全了解,只知道一部分,这是系统的灰色性。

〔例题1—3〕举例说明灰色理论的研究特征。

解答:灰色理论与其他理论的区别不仅在于研究对象的不同,而且还在于研究方法的不同。灰色理论的研究方法是“灰处理”方法,或者说是“非唯一的处理”方法、多模型方法。

例如,已知某火车站1981~1985年五年的装车数如表1—2—1所示。

表 1-2-1 某车站五年的装车数

年份(年)	1981	1982	1983	1984	1985
装车数(辆)	11213	12116	12955	13739	14600

则可算出每年的增长率为:

1982年比1981年增长8%

1983年比1982年增长6.9%

1984年比1983年增长6%

1985年比1984年增长6.2%

如果要问1981~1985年的年装车数是多少?回答11213~14600之间。这显然是个灰数;如果要问这五年装车数的增长率是多少?回答6%~8%之间,这也是个灰数。装车数为什么会增长,其内因、外因是什么?这是灰的。如何来维持增长,采取什么措施,这同样是灰的。随着经济的发展,其前景如何?这也是灰的。各个数据之间的关系并不明确,说明关系是灰的。总之,这些统计数字虽然是白的,或者说它形式上是白的,但实质上却有“灰”的内涵。

应用灰色系统“非唯一性”思想在建模方面的体现,可以这样来阐述该站行为模式的非唯一性,进而分析该站货运量的发展态势。

采用数据取舍的不同方法,可以建立三个GM(1,1)模型:

取1981~1984年的4个数据建立第一个行为模式

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1) = 187582.51e^{0.06266k} - \frac{11051.9}{0.06266}$$

取1982~1985年的4个数据建立第二个行为模式

$$\hat{x}_2^{(1)}(k+1) = 205093.051e^{0.06118k} - \frac{11806}{0.06118}$$

取1981~1985年的5个数据建立第三个行为模式

$$\hat{x}_3^{(1)}(k+1) = 190890.8e^{0.061655k} - \frac{11078.1217}{0.061655}$$

由此可见:

(1) 模型是非唯一的。

(2) 系统的发展特征不同,有三个发展系数:

$$\alpha_1 = 0.06266; \quad \alpha_2 = 0.06118; \quad \alpha_3 = 0.061655$$

(3) 系统发展的外因不同,有三个灰作用量:

$$u_1 = 11051.9; \quad u_2 = 11806; \quad u_3 = 11078.1217$$

(4) 发展前景,有三个预测值。

第一模型1986年预测值为 $\hat{x}_1^{(0)}(1986) = 15586$

第二模型1986年预测值为 $\hat{x}_2^{(0)}(1986) = 15532$

第三模型1986年预测值为 $\hat{x}_3^{(0)}(1986) = 15516$

最后作决策时,可用灰数、灰区间,这样有更大的可实现性。这就是研究方法中的“灰色性”。但有时会遇到多方面的结论,价值不大的情况,要求有白化值,这时可通过聚焦多方面的信息得白化值。此所谓由“灰到白”的白化过程。一句话通过白化,可达到

白化值结果。

〔例题1—4〕试举例说明灰数、灰元与灰关系

解答：农业生态系统，如果从简单的食物链来观察，一般可分为四个层次：绿色植物、食草动物、食肉动物、微生物。这四个层次的因果关系如图1—2—1所示。

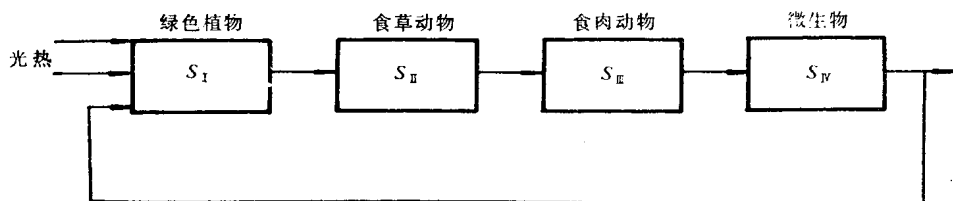


图 1—2—1 食物链四层次因果关系

若记 N_I 为绿色植物总量，则 N_I 中包含农产品 $N_I^{(1)}$ 、食草动物饲料 $N_I^{(2)}$ 和其他 $N_I^{(3)}$ ，即

$$N_I = N_I^{(1)} + N_I^{(2)} + N_I^{(3)}$$

若记 N_{II} 为食草动物总量，则 N_{II} 中包含畜产品（食草动物） $N_{II}^{(1)}$ 、食肉动物食料 $N_{II}^{(2)}$ 和其他 $N_{II}^{(3)}$ ，即

$$N_{II} = N_{II}^{(1)} + N_{II}^{(2)} + N_{II}^{(3)}$$

若记 N_{III} 为食肉动物总量，则 N_{III} 中包含畜产品（食肉动物） $N_{III}^{(1)}$ 、微生物的饵料 $N_{III}^{(2)}$ 和其他 $N_{III}^{(3)}$ ，即

$$N_{III} = N_{III}^{(1)} + N_{III}^{(2)} + N_{III}^{(3)}$$

若记 N_{IV} 为微生物总量，则 N_{IV} 中包含菌产品 $N_{IV}^{(1)}$ 、微生物分解还原成分 $N_{IV}^{(2)}$ 和其他 $N_{IV}^{(3)}$ ，即

$$N_{IV} = N_{IV}^{(1)} + N_{IV}^{(2)} + N_{IV}^{(3)}$$

在上述各量中， $N_i^{(j)} (i = I, II, III, IV)$ 是不同层次关联量。比如 N_{II} 与 $N_I^{(2)}$ 有关，即 N_{II} 与 $N_{I-1}^{(2)}$ 有关。然而这种关系因时、因地、因人而异。因此记为灰的数量关系 $\otimes_I$ ，便有 $N_{II} = \otimes_I N_I^{(2)}$

类似地有

$$N_{III} = \otimes_{II} N_{II}^{(2)}$$

$$N_{IV} = \otimes_{III} N_{III}^{(2)}$$

$$N_I = \otimes_{IV} N_{IV}^{(2)}$$

综合上述关系，可得层次结构关系如下

$$\begin{aligned} N_I^{(1)} &= N_I - N_I^{(2)} - N_I^{(3)} \\ &= \otimes_{IV} N_{IV}^{(2)} - N_I^{(2)} - N_I^{(3)} \\ &= \otimes_{IV} (N_{IV} - N_{IV}^{(1)} - N_{IV}^{(3)}) - N_I^{(2)} - N_I^{(3)} \\ &= \otimes_{IV} (\otimes_{III} N_{III}^{(2)} - N_{IV}^{(1)} - N_{IV}^{(3)}) - N_I^{(2)} - N_I^{(3)} \\ &= \otimes_{IV} (\otimes_{III} (N_{III} - N_{III}^{(1)} - N_{III}^{(3)}) - N_{IV}^{(1)} - N_{IV}^{(3)}) - N_I^{(2)} - N_I^{(3)} \\ &= \otimes_{IV} (\otimes_{III} (\otimes_{II} N_{II}^{(2)} - N_{III}^{(1)} - N_{III}^{(3)}) - N_{IV}^{(1)} - N_{IV}^{(3)}) - N_I^{(2)} - N_I^{(3)} \\ &= \otimes_{IV} (\otimes_{III} (\otimes_{II} (\otimes_I (N_I - N_I^{(1)} - N_I^{(3)}) - N_{II}^{(1)} - N_{II}^{(3)}) - N_{III}^{(1)} - N_{III}^{(3)}) - N_{IV}^{(1)} - N_{IV}^{(3)}) - N_I^{(2)} - N_I^{(3)} \\ &= \otimes_{IV} (\otimes_{III} (\otimes_{II} (\otimes_I N_I^{(2)} - N_{II}^{(1)} - N_{II}^{(3)}) - N_{III}^{(1)} - N_{III}^{(3)}) - N_{IV}^{(1)} - N_{IV}^{(3)}) - N_I^{(2)} - N_I^{(3)} \end{aligned}$$

上述层次关系表明：（1）农业生态系统中，层次间的关系系数为灰数 $\otimes_I$ ， $\otimes_{II}$ ， $\otimes_{III}$ ， $\otimes_{IV}$ ；（2）农业生态系统中每个子系统 S_I ， S_{II} ， S_{III} ， S_{IV} 是整个系统的灰元；（3）农业生态系统的层次关系、数量组合关系、相互作用关系为灰关系。

第二章 灰色系统数学描述

一、提要 and 公式

(一) 灰数

1. 灰数的定义

灰数是客观系统中大量存在着的随机的、含混的、不确知的参数的抽象。所以灰数不是一个数，而是在指定范围内变化的所有白数（确知数值的数）的全体。或者说是一群数，一个整体数。其定义如下：

某个只知大概范围，而不知其准确数值的全体实数，称为灰数，记为 $\otimes$ 。

令 α 为区间， a_i 为 α 中的数，若灰数 $\otimes$ 在 α 内取值，则称 a_i 为 $\otimes$ 的一个可能的白化值。为此可有下述符号：

$\otimes$ 为一般灰数； $\otimes(a_i)$ 以 a_i 为白化值的灰数； $\tilde{\otimes}$ 或 $\tilde{\otimes}(a_i)$ 是灰数 $\otimes$ 的白化值。注意： $\tilde{\otimes}$ 或 $\tilde{\otimes}(a_i)$ 可以是 a_i ，也可以不是 a_i ，这要取决于取数时所获得的补充信息。比如：说海豹的重量在20~25公斤之间，即海豹的重量是灰数 $\otimes$ ，可记为 $\tilde{\otimes} \in [20, 25]$ ，或 $\tilde{\otimes}(22.5) \in [20, 25]$ ，（这里22.5是一个可能的白化值）。如果指定了某个海豹（这叫补充信息），其重量为22.5公斤，则记为 $\tilde{\otimes}(22.5) = 22.5$ ，如果某海豹重量为22公斤，则记为 $\tilde{\otimes}(22.5) = 22$ ，意指以22.5为白化值的海豹灰重量的白化值为22公斤。

2. 灰数的分类

根据灰数的不同取值，灰数可分为：

(1) 有下界的灰数

指有下界而无上界的灰数。记为 $\otimes \in [\underline{a}, \infty)$ 或 $\otimes(a)$ ， $\tilde{\otimes} = \underline{a}$ ，其中 $\underline{a}$ 为 $\otimes$ 的下确界，通常称 $[\underline{a}, \infty)$ 为灰数 $\otimes$ 的值域（取值域）或灰域。

(2) 有上界的灰数

指有上界而无下界的灰数，记为 $\otimes \in (-\infty, \bar{a}]$ 或 $\tilde{\otimes}(\bar{a}) \in (-\infty, \bar{a}]$ ， $\otimes(\bar{a}) \in (-\infty, \bar{a}]$ ，其中 $\bar{a}$ 为 $\otimes$ 的上确界，是白数。

(3) 区间灰数

指具有上、下界 $\bar{a}$ ， $\underline{a}$ 的灰数称为区间灰数。记为 $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$ 。

根据灰域的连续或离散情况，灰数可分为：

(1) 连续灰数

指灰域连续的灰数。

(2) 离散灰数

指灰域离散的灰数。

根据能否找到“白数”作为灰数“代表”的情况，灰数可分为

(1) 本征灰数