考研数学精解

主　编:郝　涌　卢士堂
参　编:(按姓氏笔划为序)
李学志　宋新宇　柳合龙　贾元强
陶有德　彭玉成　樊铁钢　戴启学

华中理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学精解　郝　涌　卢士堂　主编
武汉：华中理工大学出版社，1999 年 3 月
ISBN 7-5609-1838-7

Ⅰ.①郝…　②卢…　③李…　④宋…　⑤柳…
　⑥贾…　⑦陶…　⑧彭…　⑨樊…　⑩戴…
Ⅱ.郝…
Ⅲ.数学-研究生-入学考试-参考资料
Ⅳ.O01

考研数学精解

责任编辑：龙纯曼　　封面设计：刘　卉
责任校对：朱　霞　　监　　印：张正林

出版发行者：华中理工大学出版社　　武[redacted]家山　邮编：430074　电话：(027)87542624

经销者：新华书店湖北发行所

录排者：华中理工大学出版社照排室排版
印刷者：中国科学院武汉分院科技印刷厂　　电话：(027)87863005

开本：787×1092　1/16　　印 张：35.5　　字 数：890 000
版次：1999 年 3 月第 1 版　　印 次：1999 年 3 月第 1 次印刷　　印 数：1—2 500
ISBN 7-5609-1838-7/O・181　　定 价：45.00 元

(本书若有印装质量问题，请向出版社发行科调换)

内容提要

本书包括了数学分析、线性代数、常微分方程、概率论及复变函数等五门学科的知识，全部以理科本科教学大纲的要求选编。书中强调了理论的严谨性，说明了高等数学学习中分析问题和解决问题的思想方法，同时也选编了大量具有典型意义的例题。本书具有偏“理”而兼顾“工”的特色，因此本书不仅适用于理、工科学生考研复习，也是每一位理、工科学生及其他科技工作者学习以上课程的好“帮手”。

前　言

在教学过程中，与学生们谈及“高等数学”这门课时，学生们普遍反映的有两个问题：一是由于这门课所涉及的知识门类较多，而教学时数有限，因而有些门类的知识介绍较浅显，满足不了同学们的求知欲望；二是教材中的习题根据本章节的内容而编写，缺乏综合性与难度，也无法满足学有余力的同学深层次学习的需求。他们希望有一本包含门类比较齐全，而知识结构又比较系统和全面，习题上又有一定综合性与难度的“高等数学”学习辅助用书。

随着新世纪的到来，高层次科研人才的需求量剧增，因此“考研”已在大学校园内蔚然成风。学子们迫切需要一本能帮他们成功的好书。目前，已面世的考研辅导书也不少，但多偏重工科考生，多计算，少证明，理论性要求不高，无法满足那些对理论基础知识要求较高的考生的需求。

针对上述情况，我们编写了这本书。在内容上，它包含了“数学分析”、“线性代数”、“常微分方程”、“概率论”和“复变函数”五门学科的知识，并且全部以理科本科教学大纲的要求进行内容选编。书中强调了理论的严谨性；说明了高等数学学习中分析问题和解决问题的思想方法；同时也选编了大量的具有典型意义的计算题。可以说，本书的特色在于偏“理”而兼顾“工”。本书不仅适用于理、工科学生的考研指导，而且也是每一位理、工科学生及其他科技工作者学习高等数学的好“帮手”。因为它集五门知识于一书，将五门课的核心内容、精华部分尽收其内；所选例题又具有一定的深广度和综合性，对于开阔读者的眼界，培养综合运用各门知识的能力都是很有好处的。

在结构上，本书每节分“基本理论概述”和“典型例题分析”两部分。“基本理论概述”部分对本节所涉及的定义、定理和方法，他们之间的关系，需要注意的问题等作出简要综述，以便使读者对一些基本概念有一清楚理解。“典型例题分析”中所选编的例题，尽量避免雷同或类似的例题；不选用知识面窄或较容易的例题；即照顾到知识面的宽度(即包含多个知识点)，又采取了由浅入深的循序编排，以逐步加大知识的综合性和难度。

参加本书编写工作的都是长期在教学第一线从事教学的老师，他们有多年辅导考研的经验。具体分工是：“极限与连续”由彭玉成老师编写，“微分学”和“附录”由李学志老师编写，“积分学”由郝涌、樊铁钢老师编写，“级数”、“广义积分”和“参量积分”由陶有德、戴启学老师编写，“线性代数”和“常微分方程”由宋新宇、柳合龙老师编写，“概率论”由贾元强老师编写，“复变函数”由卢士堂老师编写。郝涌、卢士堂主编了全书。

华中理工大学数学系徐长发教授对本书的编写提出了不少宝贵意见，在此表

示衷心的感谢。华中理工大学出版社的领导与责任编辑们对本书的出版也给予了积极地支持与帮助，在此也向他们表示诚挚的谢意。

由于编者水平所限，加上出版时间紧迫，书中不当之处难免，诚望读者不吝赐教。

编者

1998.9.

目　　录

上篇　数学分析

下篇　线性代数　微分方程　概率论　复变函数

上　　篇

数学分析

第一章　数 列 极 限

§1.1　数列极限概念

一、基本理论概述

1. 极限定义

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow$对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，当$n>N$时，有$|a_n-a|<\varepsilon$.

在这个定义中需注意以下几点：

(1) ε的任意性. ε除了要求是正数之外，还要可以任意选取，也只有这样的ε，才能刻划数列$\{a_n\}$与常数a可以任意靠近. 由ε的任意性，可知ε^2、2ε、$\sqrt{\varepsilon}$等也具有与ε相同的特性，因此在证明问题时，有时用它们代替ε，其意义是一样的. 其次，ε在未选之前可以任意选取，但是一旦选定后，它就是一个常数，可根据它的值去确定N.

(2) N的存在性. 在定义中，ε一旦给定之后，就看有没有那么一个时刻N，使当$n>N$后的一切a_n(即$a_{N+1},a_{N+2},\cdots$)，到常数a的距离都小于ε. 如果有某一个自然数N满足要求，那么$N+p$(p是自然数)也必然满足要求. 因此，我们在解决问题时所关心的是N的存在性，而不在乎它的大小是否是最恰当的.

2. 数列$\{a_n\}$不以a为极限的描述

存在某常数$\varepsilon_0>0$，对任意的自然数N，总存在某自然数$n_0>N$，使得$|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$.

3. 数列$\{a_n\}$发散的描述

存在某正常数ε_0，使得对任意实数a及任意自然数N，总存在某自然数$n>N$，有$|a_n-a|\geqslant\varepsilon_0$.

二、典型例题分析

1. 证明：常数数列(数列的每一项均为常数)收敛，则极限为该常数.

证明　设$a_n=C$，$n=1,2,\cdots$. 由实数的性质，显然有$|a_n-C|=0$. 从而对任给的正数ε，对每个自然数n，有$|a_n-C|=0<\varepsilon$. 所以常数数列收敛，则其极限为该常数.

2. 求证：(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+1}=\dfrac{2}{3}$，(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

证明　(1) 由于$\left|\dfrac{2n-1}{3n+1}-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{5}{3(3n+1)}<\dfrac{1}{n}$，所以对任给的正数$\varepsilon$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，有$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，从而有$\left|\dfrac{2n-1}{3n+1}-\dfrac{2}{3}\right|<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+1}=\dfrac{2}{3}$.

(2) 由于$\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot1}{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}<\dfrac{1}{n}$，所以对任给的正数$\varepsilon$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，有$\left|\dfrac{n!}{n^n}-0\right|=\dfrac{n!}{n^n}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

3. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0$（$\alpha>0$ 为常数）.

证明 对任给的正数 ε，由于 $\left|\frac{1}{n^{\alpha}}-0\right|=\frac{1}{n^{\alpha}}$，取 $N=\left[\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\frac{1}{n^{\alpha}}<\frac{1}{N^{\alpha}}\leqslant\varepsilon$，所以有 $\left|\frac{1}{n^{\alpha}}-0\right|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0$.

4. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$（$a\geqslant1$ 为常数）.

证明 若 $a=1$，则 $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ 为常数数列，由第 1 题知，$\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$.

若 $a>1$，则易见 $a^{\frac{1}{n}}>1$. 令 $a^{\frac{1}{n}}=1+h_n$，其中 $h_n>0$. 由于 $a=(1+h_n)^n>1+nh_n$，所以有 $h_n<\frac{a-1}{n}$.

对任给的正数 ε，由于 $\left|a^{\frac{1}{n}}-1\right|=a^{\frac{1}{n}}-1=h_n<\frac{a-1}{n}<\frac{a}{n}$，取 $N=\left[\frac{a}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，有 $\frac{a}{n}<\varepsilon$，更有 $\left|a^{\frac{1}{n}}-1\right|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$.

5. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

证明 对任给的正数 ε，由于 $\left|\frac{n}{2^n}-0\right|=\frac{n}{2^n}=\frac{n}{(1+1)^n}<\frac{n}{C_n^2}=\frac{2}{n-1}$，取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，有 $\frac{2}{n-1}<\varepsilon$，所以也有 $\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

6. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$.

证明 对任给的正数 ε，由正弦函数的性质知，$\left|\sin\frac{\pi}{n}-0\right|=\sin\frac{\pi}{n}<\frac{\pi}{n}$，取 $N=\left[\frac{\pi}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，有 $\frac{\pi}{n}<\varepsilon$，所以 $\left|\sin\frac{\pi}{n}-0\right|<\varepsilon$，即有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$.

7. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则对任一自然数 k，有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a$.

证明 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则对任给的正数 ε，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 特别地，对自然数 k，当 $n+k>N$ 时，上式仍然成立，即 $|a_{n+k}-a|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a$.

8. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$（$a_n>0$）.

证明 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l$，故对任给的正数 ε，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}-l\right|<\varepsilon$，从而也有

$$l-\varepsilon<\frac{a_n}{a_{n+1}}<l+\varepsilon. \tag{1.1-1}$$

特别地，取 $\varepsilon_0=(l-1)/2$，存在自然数 N_0，当 $n>N_0$ 时(1.1)式仍然成立.

由(1.1)式左端不等式，当 $n>N_0$ 时，有 $a_{n+1}<\frac{2}{l+1}a_n$，特别地有 $a_{N_0+1+p}<\left[\frac{2}{l+1}\right]^p\cdot a_{N_0+1}$，$p=1,2,\cdots$. 由于 a_{N_0+1} 是有限数，$l>1$，故 $\frac{2}{l+1}<1$. 由等比数列知有 $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\frac{2}{l+1}\right)^p=0$. 由第 8 题亦有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

9. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a_n|$. 又问反之是否成立?

证明 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，故对任给的正数 ε，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 由绝

对值的性质亦有$||a_n|-|a||\leqslant|a_n-a|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

反之不成立. 如数列$\{(-1)^n\}$，显然$\{|(-1)^n|\}=\{1\}$为常数数列，由第1题知常数数列收敛，但$\{(-1)^n\}$却为发散数列.

10. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的充分必要条件是，对任给的$\eta<a$和$\mu>a$，只有有限个n，使$\eta<a<\mu$不成立.

证明 由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，故对任给的正数$\varepsilon$，存在自然数$N$，使得当$n>N$时，有$|a_n-a|<\varepsilon$，即有

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon. \tag{1.1-2}$$

从而对上述的ε，不满足(1.1-2)式的a_n最多只有有限项. 特别地，对任意的$\eta<a$及$\mu>a$，取$\varepsilon=\min\{a-\eta,\mu-a\}$，则(1.1-2)式变为

$$\eta<a_n<\mu. \tag{1.1-3}$$

(1.1-3)式表明，对任意的$\eta<a$及$\mu>a$，只有有限个n，使(1.1-3)式不成立. 必要性得证.

充分性：对任意的$\eta<a$和$\mu>a$，则$\varepsilon=\min\{a-\eta,\mu-a\}$为任意正数，由题中条件使(1.1-3)式不成立的项仅有有限项，设这些项为$a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_m}$，令$N=\max\{i_1,i_2,\cdots,i_m\}$，则当$n>N$时，(1.1-3)式成立，即$a-\varepsilon<\eta<a_n<\mu<a+\varepsilon$，即有$|a_n-a|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

11. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

证明 由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，故对任意的正数$\varepsilon$，存在自然数$N$，使得当$n>N$时，有$|a_n-a|<\varepsilon$. 又由于

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|&=\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)/n\right|\\&\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k-a|=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|a_k-a|+\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|a_n-a|\end{aligned} \tag{1.1-4}$$

对上述的ε及相应的N，存在自然数$N'(>N)$，使得当$n>N'$时，有$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N}|a_k-a|<\varepsilon$显然

$$\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|a_n-a|<\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}\varepsilon<\varepsilon. \tag{1.1-5}$$

由(1.1-4)和(1.1-5)式有 $\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<2\varepsilon$.

由ε的任意性，有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

12. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，数列$\{b_n\}$为有界数列，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=0$. 又设$\{b_n\}$为给定的数列，$\{a_n\}$为任意的无穷小量，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=0$，试证$\{b_n\}$为有界数列.

证明 由于数列$\{b_n\}$为有界数列，故存在正数M，使得$|b_n|\leqslant M\quad n=1,2,\cdots$.

又由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，故对任给的正数$\varepsilon$，存在自然数$N$，使得当$n>N$时，有$|a_n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$. 因此当$n>N$时，有

$$|a_nb_n-0|=|a_n\cdot b_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=0$.

若假设$\{b_n\}$为无界数列，则存在b_{i_1}. 使得$|b_{i_1}|>1$. 又由$\{b_n\}$的无界性，存在$b_{i_2}\neq b_{i_1}$，使得

$|b_{i_2}|>\max\{1,b_{i_1}\}$. 由数学归纳法，易证存在 $b_{i_m}\overline{\in}\{b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_{m-1}}\}$，使得 $|b_{i_m}|>\max\{m,|b_{i_{m-1}}|\}$. 取无穷小数列 $\{a_n\}$，当 $n=i_m$ 时，$a_n=\sqrt{|b_{i_m}|^{-1}}$，当 $n\neq i_m$ 时，$a_n=0$；易见当 $n=i_m$ 时，$|a_n\cdot b_n|\geqslant\sqrt{|b_{im}|}\geqslant 1$；当 $n\neq i_m$ 时，$|a_nb_n|=0,m=1,2,\cdots$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n$ 不存在，这与 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$ 的条件矛盾，故假设错误，所以 $\{b_n\}$ 为有界数列.

13. 证明：若存在自然数 N 及常数 $0<k<1$，且 $n>N$ 时，有 $0<a_{n+1}<ka_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明 根据题中条件可得如下不等式：

$0<a_{N+1+p}<k^pa_{N+1}$，$p=1,2,\cdots$. 由于 a_{N+1} 为常数，$0<k<1$，由等比数列知 $\lim\limits_{p\to\infty}k^p=0$；由§1.1 第 8 题有 $\lim\limits_{n\to\infty}k^pa_{N+1}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

§1.2 数列极限性质

一、基本理论概述

收敛数列 $\{a_n\}$ 具有如下重要性质：

(1) 收敛数列的极限是唯一的.

(2) 收敛数列是有界的；但是反之不真. 例如数列 $\{(-1)^n\}$ 有界性是显然的，但是不收敛.

(3) 收敛数列具有保号性，即若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0(<0)$，则对任意的 $0<a'<a(0>a'>a)$，则存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有 $a_n>a'>0(a_n<a'<0)$.

(4) 适应不等式性：即若 $x_n\geqslant y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

(5) 收敛数列适应四则运算(作为除数的数列极限应不为 0).

还有如下重要性质：改变数列的有限项并不改变数列的敛散性.

二、典型例题分析

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{p=1}^{n}p!\ /n!\right]$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$.

解 (1) 由于 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}$，所以 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\sqrt{\frac{1}{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$. 由极限的性质有：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}=0$.

(2) 由于 $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$. 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$. 由极限的性质有：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

(3) 由于 $\sum_{p=1}^{n} p! = 1! + 2! + \cdots + (n-2)! + (n-1)! + n! \leqslant (n-2)! + (n-2)! + \cdots + (n-2)! + (n-1)! + n! = (n-2)(n-2)! + (n-1)! + n! < 2(n-1)! + n!$

显然 $1 = \frac{n!}{n!} < \frac{\sum_{p=1}^{n} p!}{n!} < \frac{2(n-1)! + n!}{n!}$，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{2(n-1)! + n!}{n!} = 1$. 由极限的性质有：$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{p=1}^{n} p!/n!\right) = 1$.

(4) 由于 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$，$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n}$. 易见 $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2}$，所以 $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

2. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$，且 $a < b$. 证明存在自然数 N，当 $n > N$ 时，有 $a_n < b_n$.

证明 由题有 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b < 0$，由保号性定理，存在自然数 N，使得当 $n > N$ 时，有 $a_n - b_n < \frac{1}{2}(a-b) < 0$，即 $a_n < b_n$.

3. 设 $x_n > 0$，若 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = A$，则 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = A$.

证明 由于 $x_n > 0$，所以 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = A \geqslant 0$.

若 $A = 0$，则对任给的正数 ε，存在自然数 N，当 $n > N$ 时，有 $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \varepsilon$. 特别地有 $\frac{x_{N+p+1}}{x_{N+p}} < \varepsilon$，$p = 1, 2, \cdots$. 所以有 $\frac{x_{N+p+1}}{x_{N+1}} < \varepsilon^p$，亦即 $x_{N+p+1} < \varepsilon^p x_{N+1}$. 显然 $n = N + p + 1 \to +\infty \Leftrightarrow p \to +\infty$. $\frac{p}{N+p+1} \to 1 (p \to +\infty)$. 故对上述的 ε，N 是随 ε 而确定的数，因此对上述的 ε，存在 p_0，当 $p > p_0$ 时，有 $\varepsilon^{\frac{p}{N+p+1}} x_{N+1}^{\frac{1}{N+p+1}} < 2\varepsilon$，从而 $x_{N+p+1}^{\frac{1}{N+p+1}} = x_n^{\frac{1}{n}} < 2\varepsilon$. 由 ε 的任意性有 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 0$.

若 $A > 0$，则对任给的正数 ε，存在自然数 N，使得当 $n > N$ 时，有：$A - \varepsilon < \frac{x_{n+1}}{x_n} < A + \varepsilon$. 特别地有 $A - \varepsilon < \frac{x_{N+p+1}}{x_{N+p}} < A + \varepsilon$，$p = 1, 2, \cdots$. 所以有 $(A-\varepsilon)^p < \frac{x_{N+p+1}}{x_{N+1}} < (A+\varepsilon)^p$，亦有 $(A-\varepsilon)^p x_{N+1} < x_{N+p+1} < (A+\varepsilon)^p x_{N+1}$. 仿照上面的证明，存在自然数 p_0，当 $p > p_0$ 时，有 $(A-\varepsilon)^{\frac{p}{N+p+1}} \cdot x_{N+1}^{\frac{1}{N+p+1}} > A - 2\varepsilon$，$(A+\varepsilon)^{\frac{p}{N+p+1}} x_{N+1}^{\frac{1}{N+p+1}} < A + 2\varepsilon$，从而当 $p > p_0$ 时，有 $A - 2\varepsilon < x_{N+p+1}^{\frac{1}{N+p+1}} = x_n^{\frac{1}{n}} < A + 2\varepsilon$. 由 ε 的任意性，有 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = A$.

综上有 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = A$.

4. 若 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个正数，证明：$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$.

证明 显然 $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\} < \sqrt[n]{a_1{}^n + a_2{}^n + \cdots + a_m^n} < \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\} \cdot \sqrt[n]{m}$.
由§1.1第4题及收敛数列的性质有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1{}^n + a_2{}^n + \cdots + a_m{}^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

5. 证明:若$a_n>0,n=1,2,\cdots$,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}=a$.

证明 由于$a_n>0,n=1,2,\cdots$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\geqslant0$.

若$a=0$,即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,则对任给的正数$\varepsilon$,存在自然数$N_1$,当$n>N_1$时,有$a_n<\varepsilon$. 特别地有$a_{N+p}<\varepsilon,p=1,2,\cdots$. 所以有$\prod\limits_{i=1}^{p}a_{N+i}<\varepsilon^p$. 所以$\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}=\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{N_1}a_i}\sqrt[n]{\prod\limits_{i=N_1+1}^{n}a_i}<\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{N_1}a_i}\varepsilon^{(1-\frac{N_1}{n})}$. 显然对上述的$\varepsilon$,$N_1$是随$\varepsilon$而确定的,所以有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_1}{n}=0$. 由§1.1第4题及极限的性质,存在自然数$N_2$,当$n>N_2$时,有$\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{N_1}a_i}\varepsilon^{(1-\frac{N_1}{n})}<2\varepsilon$. 取$N=\max\{N_1,N_2\}$,当$n>N$时,上述各不等式均成立,所以有$\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}<2\varepsilon$. 由$\varepsilon$的任意性有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}=0$.

若$a>0$,则对任给的正数ε,存在自然数N_1,当$n>N_1$时,有$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$. 特别地有$a-\varepsilon<a_{N+p}<a+\varepsilon,p=1,2,\cdots$. 因此有$\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{N_1}a_i}(a-\varepsilon)^{(1-\frac{N_1}{n})}<\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}<\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{N_1}a_i}(a+\varepsilon)^{(1-\frac{N_1}{n})}$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_1}{n}=0$. 根据§1.1.1第5题及收敛数列的性质,存在自然数N_2,使得当$n>N_2$时,有$\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{N_1}a_i}(a-\varepsilon)^{(1-\frac{N_1}{n})}>a-2\varepsilon$,$\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{N_1}a_i}(a+\varepsilon)^{(1-\frac{N_1}{n})}<a+2\varepsilon$. 取$N=\max\{N_1,N_2\}$,上述各不等式当$n>N$时仍然成立,所以当$n>N$时,有$a-2\varepsilon<\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}<a+2\varepsilon$. 由$\varepsilon$的任意性,所以有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}=a$.

综上,对$a\geqslant0$均有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}=a$.

6. 证明:若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$.

证明 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,由收敛数列的性质有$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-b)=0$,且存在常数$M>0$,使得

$$|a_n|\leqslant M,|b_n|\leqslant M,n=1,2,\cdots. \tag{1.2-1}$$

又由于

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_{n-k+1}}{n}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-a)b_{n-k+1}}{n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{ab_{n-k+1}}{n}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-a)b_{n-k+1}}{n}+a\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{n},\end{aligned}\tag{1.2-2}$$

根据(1.2-1)式及§1.1第12题、第11题有$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}b_k/n=b$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a)b_{n-k+1}/n\right]=0$. 根据(1.2-2)式,有:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$.

7. 设数列$\{l_n\}$满足$l_n>0$且$\lim\limits_{n\to\infty}l_n=0$,试证有无穷多个下标$m$,使得$l_m>l_{m+k}$,$k=1,2,\cdots$

证明 此题即要证明满足条件的数列$\{l_n\}$中有无穷多个项大于它后面的项.

事实上,由于$l_n>0$且$\lim\limits_{n\to\infty}l_n=0$,所以存在自然数$N_1$,使得当$n>N_1$时,有$l_n<l_1$.记$n_1=\max\{n|l_n\geqslant l_1\}$,则由上述过程知$l_{n_1}>l_{n_1+k}$,$k=1,2,\cdots$.由于$l_{n_1+1}>0$,$\lim\limits_{n\to\infty}l_n=0$,所以存在自然数$N_2$,使得当$n>N_2$时,有$l_n<l_{n_1+1}$.记$n_2=\max\{n|l_n\geqslant l_{n_1+1}\}$,显然$n_2>n_1$,且依据上述过程知$l_{n_2}>l_{n_2+k}$,$k=1,2,\cdots$.依次类推.假设存在$l_{n_m}$,满足$l_{n_m}>l_{n_m+k}$,$k=1,2,\cdots$,$n_m>n_{m-1}$.则由$l_{n_m+1}>0$,$\lim\limits_{n\to\infty}l_n=0$,所以存在自然数$N_m$,使得当$n>N_m$时,有$l_n<l_{n_m+1}$.记$n_{m+1}=\max\{n|l_n\geqslant l_{n_m+1}\}$,依据上述过程同样有$l_{n_{m+1}}>l_{n_{m+1}+k}$,$k=1,2,\cdots$.依据归纳法,存在满足题中要求的无穷多个$m$,使得$l_m>l_{m+k}$,$k=1,2,\cdots$.

8. 设a_1、a_2为任取定的实数,且$a_1^2+a_2^2\neq0$,定义$a_{n+1}=ka_n+la_{n-1}$,其中k、l为正常数,$n=2,3,\cdots$.试求$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/a_{n-1})$.

解 令$\alpha=(k+\sqrt{k^2+4l})/2$,$\beta=(k-\sqrt{k^2+4l})/2$,显然$\alpha$和$\beta$是方程$x^2=kx+l$的两个实根,并且

$$\alpha+\beta=k,\alpha\beta=-l,\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1. \tag{1.2-3}$$

把(1.2-3)式代入$a_{n+1}=ka_n+la_{n-1}$,有$a_{n+1}=(\alpha+\beta)a_n+la_n$.

整理后可得$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$或者$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha(a_n-\beta a_{n-1})$,$n=2,3,\cdots$.从而可得$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$或者$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-a_1)$,$n=2,3,\cdots$.所以有$(\beta-\alpha)a_{n+1}=\beta^n(a_2-\alpha a_1)-\alpha^n(a_2-\beta a_1)$.整理后有$a_{n+1}=[\beta^n(a_2-\alpha a_1)-\alpha^n(a_2-\beta a_1)]/(\beta-\alpha)$,$n=2,3,\cdots$.所以有

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=[\beta^n(a_2-\alpha a_1)-\alpha^n(a_2-\beta a_1)]/[\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)-\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)]\\&=\left[(a_2-\beta a_1)\cdot\alpha-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}\beta(a_2-\alpha a_1)\right]\Big/\left[(a_2-\alpha a_1)-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}(a_2-\alpha a_1)\right].\end{aligned}$$

当$a_2=\beta a_1$时,$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\beta$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\beta$.

当$a_2\neq\beta a_1$时,由于$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=0$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha$.

9. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,证明:(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[na_n]}{n}=a$, (2) 若$a>0$,$a_n>0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

证明 (1) 因为$na_n-1\leqslant[na_n]\leqslant na_n$,所以有$a_n-\frac{1}{n}\leqslant\frac{[na_n]}{n}\leqslant a_n$.依据题中条件有$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.由极限的不等式性质有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[na_n]}{n}=a$.

(2) 由于$a>0$,$a_n>0$,由保号性定理和有界性定理,存在自然数N,使得当$n>N$时,有$\frac{1}{2}a<a_n<a+1$.

由§1.1第4题和极限性质有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}a}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a+1}=1$.由极限的不等式性质所以有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.