光纤孤子理论基础

黄念宁 陈宗蕴 著

光纤孤子通信是前景日益明朗的下一代最有希望的光纤通信方式。本书系统地阐述了它所依据的超短脉冲波色在单横光纤中传播的数学理论。

武汉大学学术丛书
WUHAN UNIVERSITY ACADEMIC LIBRARY 武汉大学出版社

光纤孤子理论基础

黄念宁
陈宗蕴 著

武汉大学出版社

光纤孤子理论基础

黄念宁
陈宗蕴 著

*

武汉大学出版社出版发行

（430072 武昌 珞珈山）

武汉正加数据处理部激光照排

武汉大学出版社印刷总厂印刷

*

850×1168 毫米 1/32 6.5 印张 插页 2 163 千字

1991 年 11 月第 1 版 1991 年 11 月第 1 次印刷

印数：1－2200（内含精装 200 册）

ISBN 7-307-01127-1/O·89（平）

ISBN 7-307-01128-x/O·90（精）

定价：平 3.40 元 精 5.80 元

黄念宁 男，1933年2月生，湖北蕲春人。北京大学物理系研究生1959年8月毕业。现为武汉大学物理系教授，主要从事非线性理论的研究。

陈宗蕴 女，1937年12月生，广东番禺人。北京大学物理系研究生1963年2月毕业。现为华中理工大学物理系付教授，主要从事非线性理论的研究。

前　　言

超短脉冲在单模光纤中的传播的研究，是下一代极有前途的光纤孤子通信的基础，因而是近年来飞跃发展的重要领域。

皮(10^{-12})秒脉冲的传播由非线性 Schrödinger(NLS)方程来描述. 若考虑到输出谱的不对称，则要改用变形的非线性 Schrödinger (MNLS)方程. 描述飞(10^{-15})秒脉冲的传播的基本方程也是 MNLS 方程. 如果再考虑到种种影响，就要在这两方程上再加上相应的修正项.

因此，作为光纤孤子理论的数学基础是：NLS 方程和 MNLS 方程的严格求解，及含修正项的这两方程的微扰处理. 本书系统阐述有关结果. 第一部分，即前四章，是关于 NLS 方程的. 第二部分，即后四章，是关于 MNLS 方程的.

对 NLS 方程，Zakharov 和 Shabat 给出的反散射解法的论文，极富开创性. 本书除详述有关结果外，补充了从线代数方程导出多孤子解显式的手续及从极点展开的 Darboux 变换给出多孤子解的递归算法. 并且讨论了孤子解与透射振幅的极点分布的重要关系.

对于含修正项的 NLS 方程的微扰处理，本书详述了 Karpman 和 Maslov 的理论. 并且改进了原来对决定散射数据的公式的推导，在不引入超出反散射法原有条件的假定下给出了推导的简单证明.

MNLS 方程已经证明是完全可积的. 本书从极点展开的 Darboux 变换给出多孤子解的递归算法，决定孤子解的线代数方程和多孤子解的显式. 在引入以物理的谱参数 λ 表出的、但不含 $\lambda^{\frac{1}{2}}$ 的非对称的 Lax 对后，建立了标准形式的反散射解法. 并且对此导出了含修正项的 MNLS 方程的微扰理论.

本书的第一部分详细论述NLS方程，它为现今光纤孤子通信的理论需要用到的数学方法. 关于MNLS方程的本书的第二部分，服务于今后对飞秒脉冲传播的研究的需要. 它大多为作者近年来的研究结果. 其中第5、6章有关的研究，由于是第一次得到MNLS方程的显式解，获得了国家教育委员会1990年科技进步(甲类)二等奖.

本书第一部分为黄念宁所写，第二部分由陈宗蕴执笔.

本书涉及的课题的研究，得到国家科学基金委员会信息学部与数理学部的资助.

在本书有关的课题的研究和本书的写作中，方俊鑫老师、蔡建华教授和S. A. Akhmanov教授，提出了许多宝贵的意见并给予热情的支持，对于他们先后去世，在此表示深切的怀念. 叶培大老师、林为干老师、刘颂豪教授、陈英礼教授和扬晨钟高级工程师，提出了不少宝贵的建议和帮助，在此表示衷心的感谢.

作者

1991.6

目　　录

第1章　求非线性 Schrödinger 方程的孤子解的亚纯变换矩阵方法

非线性 Schrödinger 方程（NLS 方程）是有很多实际用途的方程，例如，它是描述短（～10^{-12}秒，皮秒）脉冲在单模光纤中传播的基本方程. 在 Gardner，Greene，Kruskal 和 Miura 于 1967 年为求解 Korteweg-de Vries 方程（KdV 方程）创立了反散射法之后，Zakharov 和 Shabat 于 1971 年将它推广到求解 NLS 方程. Zakharov 和 Shabat 建立的反散射法是求解 NLS 方程和其它类似的方程的最系统的方法. 在无反射的情况下，导出了决定 NLS 方程多孤子解的线代数方程组. 随后，广田用以双线性微分方程为基础的直接法，给出了 NLS 方程的多孤子解的显式. 还有各种各样的方法也被用来求解非线性方程.

其中有一种被称为 Darboux 变换的方法，它的意图是，以递归的形式给出 NLS 方程的多孤子解，即若已知 n 孤子解，则 Darboux 变换就可以给出 $n+1$ 孤子解. 可是，由于通常将 Darboux 变换写成谱参数 λ 的幂展开的形式，只在最简单的情况下，即 $n=1,2$ 的情况下，可以求得 Darboux 变换的显式解，因而也只可求得 NLS 方程的单孤子解和两孤子解.

不久前，Darboux 变换被改为以谱参数 λ 的极点展开的形式. 看起来，这只是一种形式上等价的改变. 但是，这使得 Darboux 变换的确定换成了它在各极点处的留数的确定. 而后者可以利用复变函数理论上已透彻研究过的种种方法. 事实上，对 NLS 方程的

N 孤子解的情况，不论 N 为何正整数，极点展开形式的 Darboux 变换的显式解都可以简单地决定，从而实现了 Darboux 变换方法的原来意图，给出了 NLS 方程的多孤子解的递归算法. 这使得编制 NLS 方程多孤子解的递归程序成为可能，而递归程序是用计算机最方便的程序.

同时，从 Darboux 变换的显式解，可以用简单的手续导出一组决定 NLS 方程的 N 孤子解的线代数方程. 如果将 Darboux 变换的极点都限于复 λ 的上半平面，则这一组方程就是 Zakharov 和 Shabat 用反散射法得到的、在无反射的情况下的线代数方程组. 反散射法导出它的手续相当复杂，而且它对极点给出了都在复 λ 上半平面的限制. 而从 Darboux 变换的显式解可以证明，对于 NLS 方程，只要极点 λ_1、λ_2、…、λ_N 和它们的复共轭，$\bar{\lambda}_1$，$\bar{\lambda}_2$，…，$\bar{\lambda}_N$ 各不相同，则所得的解是正则的，即这时给出的确实是 NLS 方程的 N 孤子解.

这一条件并不要求 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N$ 都限制在复 λ 的上半平面，所以比反散射法给出的限制要弱. 于是，人们就会问，在这较弱的限制下，会不会有比反散射法给出的解更多的解呢？

为了回答这一问题，我们来看一个确定的 N 孤子解，它由 N 个常数对(λ_j,b_j)，$j=1,2,\cdots,N$，来表征，这里 b_j 的意义见后面的说明. 我们将证明，当这 N 个常数对中之一，例如(λ_n,b_n)换成$(\bar{\lambda}_n,-\bar{b}_n^{-1})$，则此 N 孤子解保持不变. 这就表示，较弱的限制并没有给出新的解，对任何确定的 N 孤子解，可以选取 2^N 种 N 个常数对. 例如，可以选取 λ_j，$j=1,2,\cdots,N$，使 $\mathrm{Im}\lambda_j>0$. 这就是反散射法给出的. 在实际问题中，例如对 NLS 方程 N 孤子解在 $t\to\pm\infty$时的渐近行为，这样的选取就可很方便地导出.

可是，光纤中或其他非稳定介质中所用到的NLS方程，是通常的NLS方程中变数x与t的位置互换. 所以这时要讨论N孤子解在 $t\to\pm\infty$时的渐近行为，就宜于选取 λ_j，$j=1,2,\cdots,N$，使得 $\mathrm{Im}(\lambda_j^2)\geqslant 0$.

由于没有除极点之外的它种奇异性的复变函数，称为亚纯函数，所以这一方法又合理地称为亚纯变换方法或亚纯变换矩阵方法. 本章将系统地介绍这种简单的方法.

1.1 非线性 Schrödinger 方程

方程

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0 \tag{1.1}$$

称为非线性 Schrödinger 方程(NLS 方程)，式中下标 t,x 分别表示相应的偏微商. 这一方程是空间一维的. 与通常量子力学中的一维 Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u - Vu = 0 \tag{1.2}$$

相比，可见(1.1)相当于(1.2)中的 $\hbar$ 和 $2m$ 都取作 1，而势 V 取作 $-2|u|^2$. 由于势是由波函数的模的平方构成的，因而(1.1)的解不再满足线性叠加原理，即若 u_1 和 u_2 是(1.1)的解，则 u_1+u_2 一般不再是(1.1)的解. 由于 $-2|u|^2$ 恒负，所以(1.1)相应于吸引势的情况. 因此(1.1)是吸引情况下的一维非线性 Schrödinger 方程.

将(1.1)的第三项变号，得

$$iu_t + u_{xx} - 2|u|^2u = 0 \tag{1.3}$$

它是排斥情况下的一维非线性 Schrödinger 方程.

我们现在着手研究吸引情况下的 NLS 方程(1.1)在边界条件

$$u \to 0, \qquad \text{当 } |x| \to \infty \text{ 时}, \tag{1.4}$$

下的解.

我们来看如下一对线性方程

$$\partial_x F(x,t,\lambda) = L(x,t,\lambda)F(x,t,\lambda), \tag{1.5}$$

$$\partial_t F(x,t,\lambda) = M(x,t,\lambda)F(x,t,\lambda), \tag{1.6}$$

式中

$$L(x,t,\lambda) = -i\lambda\sigma_3 + U(x,t), \tag{1.7}$$

$$M(x,t,\lambda) = -i2\lambda^2\sigma_3 + 2\lambda U(x,t) - i[U^2(x,t) + U_x(x,t)]\sigma_3, \tag{1.8}$$

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & u(x,t) \\ -\overline{u(x,t)} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

这里 λ 是谱参数，函数上的一横表示复共轭.

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

$F(x,t,\lambda)$是一个二分量的函数，像量子力学中考虑到电子自旋$\frac{1}{2}\hbar$时所用的波函数那样.

由于(1.5)和(1.6)是相容的，即交叉微商相等

$$(\partial_x - L)(\partial_t - M) = (\partial_t - M)(\partial_x - L), \tag{1.11}$$

也就是

$$L_t - M_x + [L,M] = 0, \tag{1.12}$$

式中$[L,M]=LM-ML$. 以(1.7)—(1.9)代入(1.12)得

$$U_t + iU_{xx}\sigma_3 - i2U^3\sigma_3 = 0. \tag{1.13}$$

它的对角元部分为 0，非对角部分的 (12) 和 (21) 元分别是方程(1.1)和它的复共轭. 这显示出非线性 Schrödinger 方程(1.1)和线方程对(1.5)和(1.6)之间的联系.

线方程对(1.5)和(1.6)称为非线性 Schrödinger 方程(1.1)的 Lax 对. 虽然按 Lax 原来的思想，非线性 Schrödinger 方程的 Lax 对的表示形式与这里的有所区别，但它们是等价的. 关于这点，我们将在 3.1 进一步讨论.

我们现在来看在求非线性Schrödinger方程(1.1)在边界条件(1.4)下的解时，它的 Lax 对(1.5)和(1.6)有什么作用. 若已知(1.1)在边界条件(1.4)下的一个解 $u(x,t)$，则(1.5)和(1.6)在适当的边界条件和初始条件下可以解出 $F(x,t,\lambda)$. 反之，若有某种方法有效地定出 $F(x,t,\lambda)$，则从(1.5)就可以决定 $u(x,t)$.

著名的反散射法就是先定出$F(x,t,\lambda)$再决定$u(x,t)$的方

法.用这一方法求解(1.1)时,首先由边界条件对$u(x,t)$的限制来决定$F(x,t,\lambda)$作为λ的复变函数的解析性,然后由所得的解析性导出关于$F(x,t,\lambda)$的封闭的方程组.这一方程组可以用来求出$F(x,t,\lambda)$,因而由(1.5)可以决定$u(x,t)$,显然它比较复杂.我们将稍后再介绍它.

下面先介绍另一种求非线性Schrödinger方程(1.1)的特殊形式的解——所谓孤子解的方法,这种方法可以称为亚纯变换矩阵方法,或以极点展开形式的Darboux变换方法.它也是先定出$F(x,t,\lambda)$,再决定$u(x,t)$的方法.但是我们将看到,它很简单,并且在现有的求(1.1)方程的孤子解的种种方法中,似乎它更基本.更重要的是,它是唯一以递归方式给出(1.1)的孤子解的方法.这将对(1.1)的孤子解的显示提供最经济的程序编制的出发点.

1.2 亚纯变换矩阵方法

由于二分量的一阶方程,一般有两个独立解,我们将此两个独立解写作

$$F_{\cdot 1}(x,t,\lambda)=\begin{pmatrix}F_{11}(x,t,\lambda)\\ F_{21}(x,t,\lambda)\end{pmatrix},\qquad F_{\cdot 2}(x,t,\lambda)=\begin{pmatrix}F_{12}(x,t,\lambda)\\ F_{22}(x,t,\lambda)\end{pmatrix}.\tag{1.14}$$

将(1.5)和(1.6)中的$F(x,t,\lambda)$看作是一个2×2矩阵,它的组成是

$$F(x,t,\lambda)=(F_{\cdot 1}(x,t,\lambda)F_{\cdot 2}(x,t,\lambda))=\begin{pmatrix}F_{11}(x,t,\lambda) & F_{12}(x,t,\lambda)\\ F_{21}(x,t,\lambda) & F_{22}(x,t,\lambda)\end{pmatrix}.\tag{1.15}$$

显然,

$$U_0=0\tag{1.16}$$

是(1.13)的一个特解.这时,相应的

$$L_0(\lambda)=-i\lambda\sigma_3,\tag{1.17}$$

$$M_0(\lambda)=-i2\lambda^2\sigma_3.\tag{1.18}$$

把(1.17)和(1.18)分别代入(1.5)和(1.6),求出

$$F_0(x,t,\lambda) = e^{-i(\lambda x+2\lambda^2 t)\sigma_3}. \tag{1.19}$$

因为当$|\lambda|\to\infty$时,只需保留λ的最高次幂,有

$$L(x,t,\lambda) \to L_0(\lambda), \tag{1.20}$$

$$M(x,t,\lambda) \to M_0(\lambda). \tag{1.21}$$

所以,对于方程(1.5)和(1.6)的任何解$F(x,t,\lambda)$,均有

$$F(x,t,\lambda) \to F_0(x,t,\lambda), \qquad \text{当 } |\lambda| \to \infty \text{ 时}. \tag{1.22}$$

因此,方程的任一解$F(x,t,\lambda)$可以看作是$F_0(x,t,\lambda)$经过一个变换$G(x,t,\lambda)$而得到的

$$F(x,t,\lambda) = G(x,t,\lambda)F_0(x,t,\lambda), \tag{1.23}$$

这里$G(x,t,\lambda)$称为变换矩阵,它应满足

$$G(x,t,\lambda) \to I, \qquad \text{当 } |\lambda| \to \infty \text{ 时}. \tag{1.24}$$

我们引入一个假设(Ansatz): 变换矩阵$G(x,t,\lambda)$作为λ的复变函数是亚纯的,即它没有极点之外的其他奇异性.

进一步再假定$G(x,t,\lambda)$的极点是N个简单极点,即一阶极点,以$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N$表示这$N$个简单极点,且它们都不在实轴上.这时的$G(x,t,\lambda)$记作$G_N(x,t,\lambda)$.考虑到(1.24),就有

$$G_N(x,t,\lambda) = I + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} A_n(x,t), \tag{1.25}$$

式中$A_n(x,t)$是$G_N(x,t,\lambda)$在$\lambda=\lambda_n$处的留数.这时相应的解记作$F_N(x,t,\lambda)$,我们有

$$F_N(x,t,\lambda) = G_N(x,t,\lambda)F_0(x,t,\lambda). \tag{1.26}$$

显然,由于有N个极点,要决定$G_N(x,t,\lambda)$,即决定N个$A_n(x,t)$会比较复杂,我们先从只有一个极点的变换着手.以$D_1(x,t,\lambda),D_2(x,t,\lambda),\cdots,D_N(x,t,\lambda)$表示这样一系列变换矩阵,它们的形式是

$$D_n(x,t,\lambda) = I + \frac{1}{\lambda - \lambda_n} B_n(x,t), \tag{1.27}$$

式中$B_n(x,t)$是$D_n(x,t,\lambda)$在$\lambda=\lambda_n$处的留数.由于已设λ_n不是实

的，所以可将上式再改写为

$$D_n(x,t,\lambda) = I + \frac{\lambda_n - \bar{\lambda}_n}{\lambda - \lambda_n} P_n(x,t), \tag{1.28}$$

这里

$$P_n(x,t) = (\lambda_n - \bar{\lambda}_n)^{-1} B_n(x,t). \tag{1.29}$$

这一系列变换矩阵的作用是：$D_n(x,t,\lambda)$将$F_{n-1}(x,t,\lambda)$变成$F_n(x,t,\lambda)$，即

$$F_1(x,t,\lambda) = D_1(x,t,\lambda) F_0(x,t,\lambda), \tag{1.30}$$

$$F_n(x,t,\lambda) = D_n(x,t,\lambda) F_{n-1}(x,t,\lambda). \tag{1.31}$$

$F_n(x,t,\lambda)$ 满足的一对方程是

$$\partial_x F_n(x,t,\lambda) = L_n(x,t,\lambda) F_n(x,t,\lambda), \quad (\text{'}$$

$$\partial_t F_n(x,t,\lambda) = M_n(x,t,\lambda) F_n(x,t,\lambda), \quad (\text{:}$$

式中 $L_n(x,t,\lambda)$ 和 $M_n(x,t,\lambda)$分别由(1.7)和(1.8)将$U(x,t)$与 $F_n(x,t,\lambda)$ 相对应的$U_n(x,t)$而得的表示式. 于是，显然有

$$F_N(x,t,\lambda) = D_N(x,t,\lambda) D_{N-1}(x,t,\lambda) \cdots D_1(x,t,\lambda) F_0(x,t,\lambda)$$

(1

和

$$\partial_x F_N(x,t,\lambda) = L_N(x,t,\lambda) F_N(x,t,\lambda), \quad (1$$

$$\partial_t F_N(x,t,\lambda) = M_N(x,t,\lambda) F_N(x,t,\lambda). \quad (1$$

由(1.34)与(1.26)比较，得

$$G_N(x,t,\lambda) = D_N(x,t,\lambda) D_{N-1}(x,t,\lambda) \cdots D_1(x,t,\lambda). \quad ($$

从(1.25)，又得

$$A_n(x,t) = \lim_{\lambda \to \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) G_N(x,t,\lambda). \quad ($$

将(1.37)代入上式，再注意(1.28)，得

$$A_n = D_N(\lambda_n) \cdots D_{n+1}(\lambda_n)(\lambda_n - \bar{\lambda}_n) P_n D_{n-1}(\lambda_n) \cdots D_1(\lambda_n).$$

(1.3

所以只要定出这一系列的 $P_n(x,t)$，也就定出了 $A_n(x,t)$. 这样，就定出了 $G_N(x,t,\lambda)$和 $F_N(x,t,\lambda)$.

变换 $D_n(x,t,\lambda)$称为 Darboux 变换. 通常采用的是按 λ 幂展开