

报考研究生复习丛书

YAN

刘其昌 主编

JIU

SHENG

材料力学复习纲要

中国展望出版社

编辑说明

《报考研究生丛书》是为了帮助广大青年复习有关课程，应考硕士研究生，约请有丰富教学经验的教师，根据部颁教学大纲和报考研究生的要求而编写的。力求使同学们通过学习，进一步掌握基本原理，明确基本概念，提高分析问题和解决问题的能力。本丛书可作为在校学生和社会青年的辅导读物，也可供有关教师和工程技术人员参考。

本丛书包括：《大学政治理论课纲要》、《大学英语复习指导》、《高等数学复习纲要》、《大学物理复习纲要》、《物理化学复习纲要》、《化工原理复习纲要》、《理论力学复习纲要》、《材料力学复习纲要》、《结构力学复习纲要》、《电工基础复习纲要》。

本套丛书由宋权、席庆义主编。

材料力学复习纲要

刘其昌 主编

*

中国地质出版社 出版

(北京西城区太平桥大街4号)

合肥东方印刷厂印刷

北京新华书店发行

开本787×1092毫米 1/32 印张 9.5

218.88千字 1985年9月北京第1版

第1次印刷 1—20,000册

统一书号:7271·084 定价:1.80元

前 言

《材料力学复习纲要》是宋权、席庆义主编的《报考研究生复习丛书》之一，旨在帮助广大青年学生系统地有重点地复习材料力学课程，进一步掌握基本原理，明确基本概念，提高分析问题和解题的能力。

本书共分十五章，内容有：拉伸与压缩、剪切、扭转、平面图形性质的几何性质、弯曲内力、弯曲变形、应力变形分析基础、强度理论、组合变形、能量法、超静定系统、压杆稳定、动荷应力及综合题。每章均有内容提要、解题示例及习题三大部分，习题附有答案。本书由刘其昌编写第一、二章及全部内容提要；殷尔禧编写第三、四、五、六、七章；张衍华编写第八、九、十、十四章；柯文波编写第十一、十二、十三、十五章，最后由刘其昌与柯文波统编定稿，刘其昌主编，郑定国审阅。

由于我们水平所限，书中难免有不当之处，敬希读者批评指正。

编 者

一九八五年七月

目 录

第一章 拉伸与压缩	12
内容提要.....	1
1. 轴向拉(压)时的应力与强度条件 2. 轴向拉(压)时的变形 3. 拉(压)时的超静定问题	
解题示例.....	3
习题.....	21
第二章 剪切	26
内容提要.....	26
1. 剪切的实用计算 2. 挤压的实用计算	
解题示例.....	27
习题.....	35
第三章 扭转	39
内容提要.....	39
1. 扭矩计算 2. 剪应力互等定理及剪切虎克定律	
3. 圆轴扭轴时的应力与强度条件 4. 圆轴扭轴时的变形与刚度条件 5. 圆柱形密圈螺旋弹簧的应力与变形	
6. 矩形截面杆扭转时的应力与变形	
解题示例.....	44
习题.....	56
第四章 平面图形的几何性质	60
内容提要.....	60
1. 静矩(面积矩)及形心 2. 惯性矩、惯性积和惯	

性半径 3. 平行移轴公式 4. 转轴公式 5. 主惯性轴和主惯性矩 6. 形心主惯性轴和形心主惯性矩	
解题示例	64
习题	71
第五章 弯曲内力	75
内容提要	75
1. 平面弯曲 2. 弯曲内力——剪力与弯矩	
3. 剪力图与弯矩图 4. 弯矩、剪力与载荷集度之间的微分关系 5. 叠加法作Q、M图	
解题示例	77
习题	89
第六章 弯曲应力	93
内容提要	93
1. 弯曲时的正应力及其强度条件 2. 弯曲时的剪应力及其强度条件 3. 弯曲中心	
解题示例	96
习题	108
第七章 弯曲变形	111
内容提要	111
1. 梁的挠曲线近似微分方程 2. 积分法求梁的变形 3. 叠加法求梁的变形 4. 共轭梁法求梁的变形	
解题示例	115
习题	126
第八章 应力应变分析基础	129
内容提要	129
1. 点的应力状态, 主平面和主应力 2. 平面应力状态下的应力分析 3. 三向应力状态下的应力 4. 平	

面应变分析 5. 用应变花求主应变 6. 广义虎克定律

7. 三向应力状态下单位体积的变形能——比能

解题示例137

习题147

第九章 强度理论152

内容提要152

1. 关于脆性断裂的强度理论 2. 关于塑性流动的
强度理论 3. 相当应力 4. 莫尔强度理论

解题示例155

习题162

第十章 组合变形167

内容提要167

1. 斜弯曲 2. 拉伸(压缩)与弯曲的组合变形
3. 弯曲与扭转的组合变形

解题示例173

习题188

第十一章 能量法193

内容提要193

1. 应变能与余能 2. 虚位移原理 3. 单位载荷
法(莫尔法) 4. 图形互乘法 5. 卡氏定理

解题示例198

习题209

第十二章 超静定系统213

内容提要213

1. 变形比较法 2. 力法 3. 最小应变能原理

解题示例215

习题230

第十三章 压杆稳定	234
内容提要	234
1. 临界力 P_{ij} 的确定 2. 压杆的稳定计算	
解题示例	238
习题	253
第十四章 动荷应力	257
内容提要	257
1. 作等加速运动时的动荷问题 2. 受冲击载荷时的动荷问题 3. 构件受到周期性变化的干扰力作用时的动荷问题。	
解题示例	259
习题	272
第十五章 综合题	276
解题示例	276
习题	292

第一章 拉伸与压缩

内 容 提 要

· 轴向拉（压）时的应力与强度条件

杆件受轴向拉伸或压缩时，横截面上只有正应力，且正应力沿整个横截面是均匀分布的（外力作用处附近的截面除外），如图1-1所示。

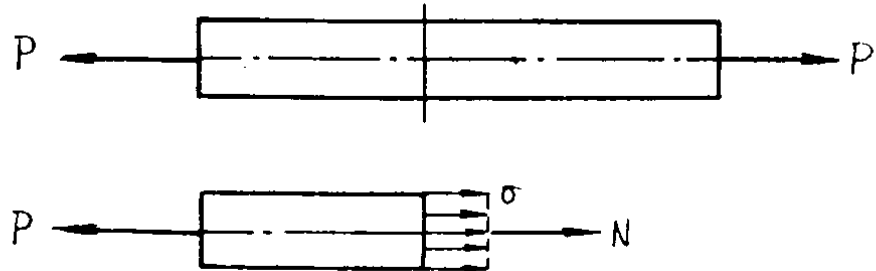


图 1-1

因此，正应力的计算公式为

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (1-1)$$

式中 N 为横截面上的轴力， A 为横截面面积。符号规则：拉应力为正，压应力为负。

杆件在轴向拉（压）时的强度条件为

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad (1-2)$$

式中 $[\sigma]$ 为材料的许用应力。且

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n}$$

式中 σ^0 为材料的危险应力。对于塑性材料，取其屈服极限 σ_s （或 $\sigma_{0.2}$ ）作为危险应力，对于脆性材料，取其强度极限 σ_b 作为危险应力， n 为安全系数。

2. 轴向拉（压）时的变形

实验表明，杆件承受轴向拉伸（压缩）时，如图 1-2 所示，在弹性范围内，杆件的轴向伸长（缩短）与轴力及杆长成正比，而与杆的横截面面积成反比。即

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad (1-3)$$

式中 E 为材料的弹性模量。它表示材料在拉（压）时抵抗变形的能力。上式也可以改写成杆件的正应力与轴向应变之间的正比关系。即

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1-4)$$

以上两式统称为单向虎克定律。

实验还表明，在弹性范围内，轴向应变 ε 与横向应变 ε' 之间成正比关系，但符号相反。即

$$\varepsilon = -\frac{\varepsilon'}{\mu} \quad (1-5)$$

式中 μ 称为横向变形系数或泊松比。

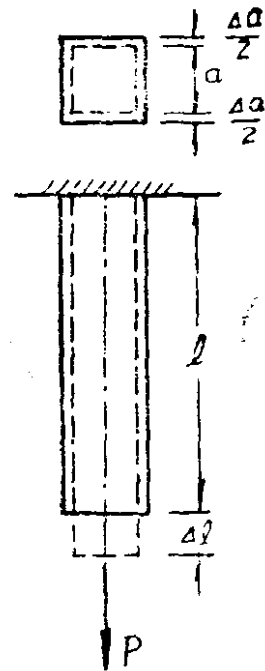


图 1-2

对于轴力 N 与横截面面积 A 沿杆轴变化的杆件，其轴向变形应分段计算，然后叠加，或按积分公式计算。即

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EA_i} \quad (1-6, a)$$

或

$$\Delta l = \int_l \frac{N(x) dx}{EA(x)} \quad (1-6, b)$$

3. 拉（压）时的超静定问题

在超静定问题中，对于维持平衡所必需的支座以外的支座或杆件称为多余约束，与多余约束相应的约束反力或内力称为多余未知力，多余未知力的个数称为超静定次数。

求解超静定问题时，单由静力平衡条件是不能确定其全部约束反力（或内力）的，必须寻找补充条件。为此，应研究杆件变形的几何关系，并考虑变形与力相互关系的物理条件，从而建立以多余未知力表示变形条件的补充方程式，然后与静力平衡方程式联立求解，即可求得全部未知力。

求解拉（压）超静定问题的一般步骤，大致是：

（1）分析结构的约束反力数与独立平衡方程数，以决定结构的多余约束反力数，即超静定次数。

（2）利用相应的多余未知约束反力代替多余约束，列出独立平衡方程。

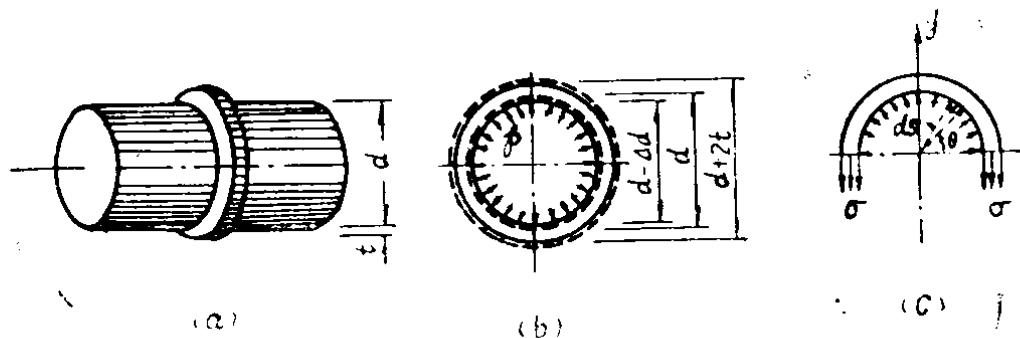
（3）根据多余约束的特点，建立变形几何方程，即变形协调条件。

（4）将物理条件代入几何方程，得到补充方程，然后与平衡条件联立求解。即可求得全部未知力。

解 题 示 例

例题1-1 为了在直径 $d = 300\text{mm}$ 的实心轴上紧套一厚度为 $t = 3\text{mm}$ 的薄壁圆环，制造时，使圆环的内径比轴径 d 小了 Δd ，如图（a）、（b）所示，然后加热使膨胀后的圆环套在轴上，冷却后二者互相压紧。若圆环材料的许用应力 $[\sigma] =$

160MPa, 试求 Δd 的最大值, 並求圆环与轴之间的最大压强 p (忽略实心轴的变形)。



例1-1图

解: (1) 分析薄壁圆环的周向应力

由图(c) $\Sigma Y = 0$

$$2\sigma t \cdot 1 = \int_0^\pi p \cdot \sin\theta \cdot 1 \cdot \frac{d}{2} d\theta = pd$$

$$\sigma = \frac{pd}{2t} \quad (a)$$

(2) 因 $t \ll d$, 故 $\sigma \ll p$, 在内压的作用下, 圆环膨胀, 则周向应变 (即圆环周长的相对变形) 为

$$\varepsilon = \frac{\pi d - \pi(d - \Delta d)}{\pi d} = \frac{\Delta d}{d}$$

而

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{pd}{2Et}$$

故

$$\Delta d = \frac{pd^2}{2Et} \quad (b)$$

这就是圆环内径的改变量。

(3) 根据圆环的强度条件

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta d}{d} \leq [\sigma]$$

故

$$\Delta d \leq \frac{d [\sigma]}{E} = \frac{0.3 \times 160 \times 10^6}{210 \times 10^9} = 2.29 \times 10^{-4} \text{ m}$$

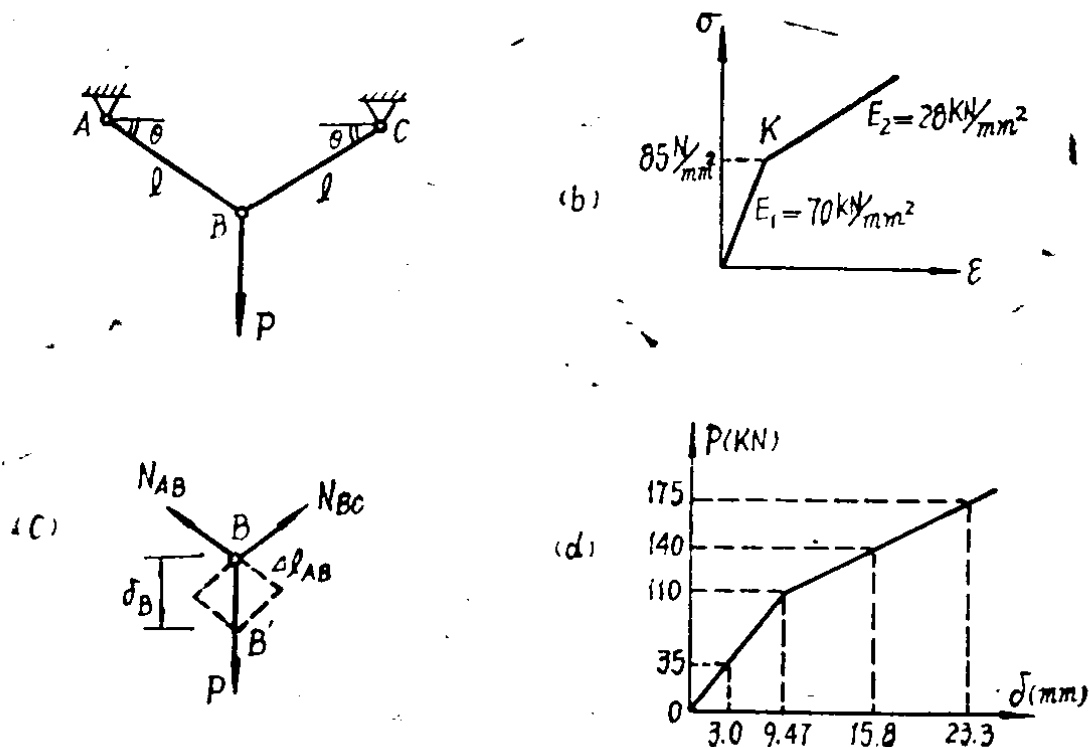
$$= 0.229 \text{ mm}$$

(4) 由(b)式可求得实心轴与圆环间的最大压强为

$$p_{\max} = \frac{2Et\Delta d}{d^2} = \frac{2 \times 3 \times 10^{-3} \times 210 \times 10^9 \times 2.29 \times 10^{-4}}{0.3^2}$$

$$= 3.21 \times 10^6 \text{ Pa} = 3.21 \text{ MPa}$$

例题1-2 两根相同的杆件AB和BC，在节点B承受一铅垂载荷P，如图(a)所示。杆件材料的应力—应变曲线可近似地用两根直线来表示，如图(b)。已知：两杆的横截面面积均为 $A = 1300 \text{ mm}^2$ ，杆长均为 $l = 3.9 \text{ m}$ ， $\theta = 30^\circ$ 。试求对应于载荷 $P = 35 \text{ kN}$ 、 70 kN 、 140 kN 及 175 kN 时节点B的铅垂位移 δ_B ，并绘出P与 δ_B 之间的关系图。



例1-2图

解: (1) δ_B 的计算

1. 考虑节点B的平衡

由图(b) $\Sigma X = 0, N_{AB} = N_{BC}$
 $\Sigma Y = 0, 2N_{AB}\sin 30^\circ = P$

故 $N_{AB} = N_{BC} = P$ (a)

2. 由变形几何关系 有

$$\delta_B = \frac{\Delta l_{AB}}{\sin 30^\circ} = 2\Delta l_{AB} \quad (b)$$

3. 由物理条件

①当 σ 小于转折点K的应力 $\sigma_k = 85\text{N/mm}^2$ 时, 得

$$\Delta l_{AB} = \frac{\sigma l}{E_1}$$

将上式代入(b)式, 得

$$\delta_B = \frac{2\sigma l}{E_1}$$

②当 σ 大于转折点K的应力 $\sigma_k = 85\text{N/mm}^2$ 时, Δl_{AB} 应分段计算, 由图(b), 有

$$\Delta l_{AB} = l \left(\frac{\sigma_K}{E_1} + \frac{\sigma - \sigma_K}{E_2} \right)$$

将上式代入(b)式, 得

$$\delta_B = 2l \left(\frac{\sigma_K}{E_1} + \frac{\sigma - \sigma_K}{E_2} \right)$$

4. δ_B 的计算

①当 $P = 35\text{kN}$ 时, 得到

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{35 \times 10^3}{1300} = 26.92\text{N/mm}^2 < 85\text{N/mm}^2$$

故

$$\delta_B = \frac{2\sigma l}{E_1} = \frac{2 \times 26.96 \times 3900}{70 \times 10^3} = 3.0\text{mm}$$

②当 $P = 140\text{kN}$ 时，得到

$$\sigma = \frac{N'}{A} = \frac{140 \times 10^3}{1300} = 107.68\text{N/mm}^2 > 85\text{N/mm}^2$$

故

$$\delta_B = 2l \left(\frac{\sigma_K}{E_1} + \frac{\sigma - \sigma_K}{E_2} \right) = 2 \times 3900 \left(\frac{85}{70 \times 10^3} - \frac{107.68 - 85}{28 \times 10^3} \right) = 15.8\text{mm}$$

(2) 绘制 P 与 δ_B 之间的关系图

将对应于 $P = 35\text{kN}$ 、 70kN 、 140kN 及 175kN 的节点B铅垂位移的计算结果，列表如下，并绘出 P 与 δ_B 的关系图如图(d)所示。

$P (\text{kN})$	35	70	105	140	175
$\sigma (\text{N/mm}^2)$	26.92	53.92	80.76	107.68	134.6
$\delta_B (\text{mm})$	3.0	6.0	9.0	15.8	23.3

例题1-3 刚性杆AB在C点由固定铰支座支承，并在两端A与B分别由连杆AE与BD约束，如图(a)所示。由于制造时AE杆比原设计的长度短了 $\Delta = 0.1\text{mm}$ ，同时安装后温度又下降了 $\Delta t = 10^\circ\text{C}$ 。若两连杆的截面面积相等，且均为钢材，已知钢的弹性模量 $E = 200\text{GPa}$ ，线膨胀系数 $\alpha = 12.5 \times 10^{-6}$ ，计算两连杆内所产生的应力。

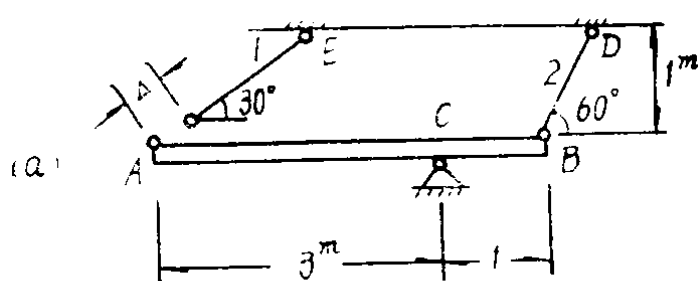
解：此结构为一次超静定问题。

(1) 平衡条件：考虑AB杆的平衡，由图(c)

$$\sum X = 0, \quad N_1 \sin 30^\circ \times 3 = N_2 \sin 60^\circ \times 1$$

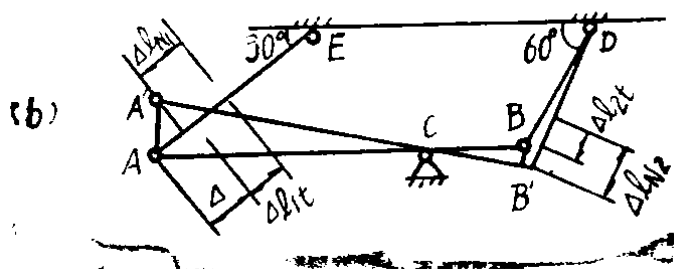
$$N_2 = \sqrt{3} N_1 \quad (\text{a})$$

(2) 变形几何条件：由于AE杆制造的不准确和温度下



降的影响，安装后，刚性杆AB转动到A'CB'的位置（如图b），于是有

$$\overline{AA'} = 3\overline{BB'} \quad (b)$$

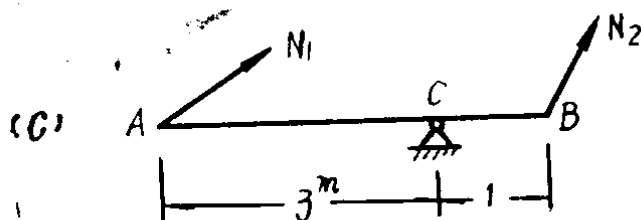


(3) 物理条件

AE杆:

$$\Delta + \alpha l_1 \Delta t - \overline{AA'} \sin 30^\circ$$

$$= \Delta l_{N_1} = -\frac{N_1 l_1}{EA}$$



例1-3图

$$\overline{AA'} = \frac{1}{\sin 30^\circ} \left(\Delta + \alpha l_1 \Delta t - \frac{N_1 l_1}{EA} \right)$$

$$= 2 \left(1 \times 10^{-4} + 2 \times 12.5 \times 10^{-6} \times 10 - \frac{2N_1}{EA} \right)$$

$$= 7 \times 10^{-4} - \frac{4N_1}{EA} \quad (c)$$

BC杆, $\overline{BB'} \sin 60^\circ + \alpha l_2 \Delta t = \Delta l_{N_2} = -\frac{N_2 l_2}{EA}$

$$\overline{BB'} = \frac{1}{\sin 60^\circ} \left(\frac{N_2 l_2}{EA} - \alpha l_2 \Delta t \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{N_2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}{EA} - \frac{2}{\sqrt{3}} \times 12.5 \times 10^{-6} \times 10 \right)$$

$$= \frac{4N_2}{3EA} - \frac{5}{3} \times 10^{-4} \quad (d)$$

(4) 应力计算: 将(c)与(d)式代入(b)式得

$$N_1 + N_2 = 3 \times 10^{-4} EA \quad (e)$$

解(a)与(e)式, 得

$$N_1 = \frac{3 \times 10^{-4}}{1 + \sqrt{3}} EA$$

故
$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{3 \times 10^{-4}}{1 + \sqrt{3}} E = 1.1 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^5$$

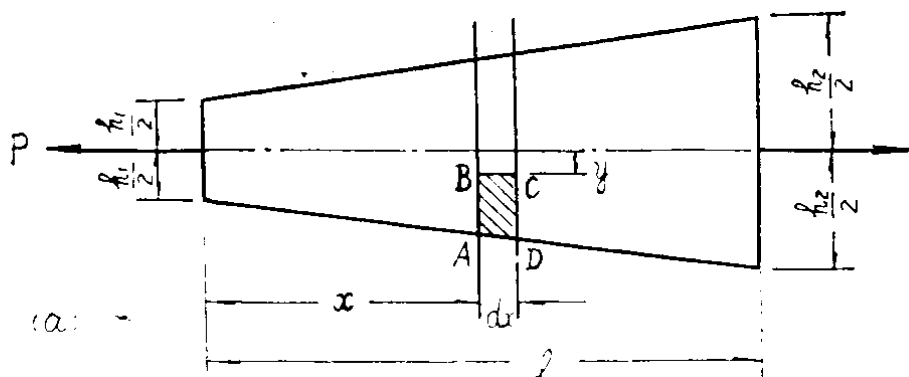
$$= 22 \text{ MN/m}^2 = 22 \text{ MPa}$$

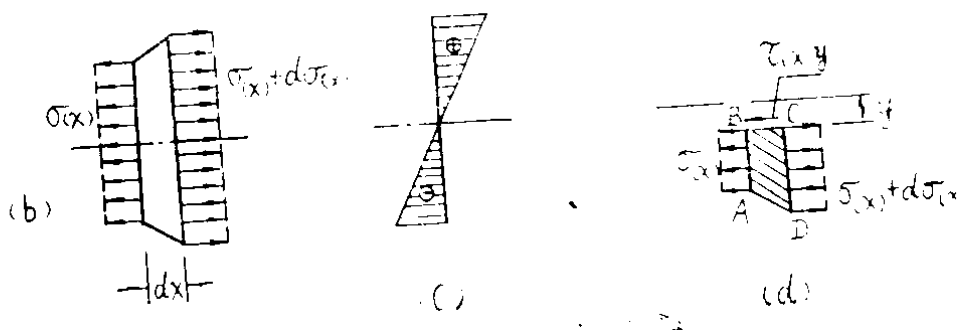
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{\sqrt{3}}{1} \frac{N_1}{A} = \sqrt{3} \sigma_1 = 38.1 \text{ MN/m}^2$$

$$= 38.1 \text{ MPa}$$

注意: 本题也可以按叠加原理计算。即分别求出由于制造不准确和温度改变引起的各杆应力, 然后代数相加。

例题1-4 图(a)所示为一长度为 l , 厚度 t 为常数的变截面矩形板条, 两端受轴向拉力 P 的作用, 且两端的高度分别为 h_1 和 h_2 ($l > h_2 > h_1 > t$)。设横截面上的正应力均匀分布, 试按材料力学方法, 求出 x 横截面上剪应力的分布规律, 并画出应力分布图。





例 1-4 图

解：（1）分析微段 dx 两相邻横截面上的应力
由图（a），利用相似关系，可得

$$h(x) = h_1 + \frac{x}{l} (h_2 - h_1) \quad (a)$$

则
$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{h_2 - h_1}{l} \quad (a)'$$

故微段左边截面上的应力为

$$\sigma(x) = \frac{P}{A(x)} = \frac{P}{h(x)t} \quad (b)$$

对上式微分，並將（a）'式代入，整理后，得

$$\begin{aligned} d\sigma(x) &= \sigma'(x)dx = -\frac{P}{h^2(x)t} h'(x)dx \\ &= -\sigma(x) \frac{h_2 - h_1}{h(x)l} dx \end{aligned}$$

于是，微段右边截面上的应力为

$$\sigma(x) + d\sigma(x) = \sigma(x) \left[1 - \frac{h_2 - h_1}{h(x)l} dx \right] \quad (c)$$

则微段 dx 上的应力情况，如图（b）所示。

（2）分析剪应力的变化规律

从板条中截取微分单元体 ABCD，如图（d），並考虑其平衡。由 $\sum X = 0$ ，