报考研究生复习丛书

YAN JIU SHENG

刘其昌 主编

材料力学复习纲要

中国质望出版社

编 辑 说 明

《报考研究生丛书》是为了帮助广大青年复习有关课程，应考硕士研究生，约请有丰富教学经验的教师，根据部颁教学大纲和报考研究生的要求而编写的，力求使同学们通过学习，进一步掌握基本原理，明确基本概念，提高分析问题和解决问题的能力。本丛书可作为在校学生和社会青年的辅导读物，也可供有关教师和工程技术人员参考。

本丛书包括：《大学政治理论课纲要》、《大学英语复习指导》、《高等数学复习纲要》、《大学物理复习纲要》、《物理化学复习纲要》、《化工原理复习纲要》、《理论力学复习纲要》、《材料力学复习纲要》、《结构力学复习纲要》、《电工基础复习纲要》。

本套丛书由宋权、席庆义主编.

材料力学复习纲要

刘其昌 主编

*

中国质检出版社 出版

（北京西城区太平桥大街4号）

合肥东方印刷厂印刷

北京新华书店发行

开本787×1092毫米 1/32 印张 9.5

218.88千字 1985年9月北京第1版

第1次印刷 1—20,000册

统一书号:7271·084 定价:1.80元

前　　言

《材料力学复习纲要》是宋权、席庆义主编的《报考研究生复习丛书》之一，旨在帮助广大青年学生系统地有重点地复习材料力学课程，进一步掌握基本原理，明确基本概念，提高分析问题和解题的能力。

本书共分十五章，内容有：拉伸与压缩、剪切、扭转、平面图形性质的几何性质、弯曲内力、弯曲变形、应力变形分析基础、强度理论、组合变形、能量法、超静定系统、压杆稳定、动荷应力及综合题。每章均有内容提要、解题示例及习题三大部分，习题附有答案。本书由刘其昌编写第一、二章及全部内容提要；殷尔禧编写第三、四、五、六、七章；张衍华编写第八、九、十、十四章；柯文波编写第十一、十二、十三、十五章，最后由刘其昌与柯文波统编定稿，刘其昌主编，郑定国审阅。

由于我们水平所限，书中难免有不当之处，敬希读者批评指正。

编　者

一九八五年七月

目　　录

第一章　拉伸与压缩

内 容 提 要

. 轴向拉（压）时的应力与强度条件

杆件受轴向拉伸或压缩时，横截面上只有正应力，且正应力沿整个横截面是均匀分布的（外力作用处附近的截面除外），如图1-1所示。

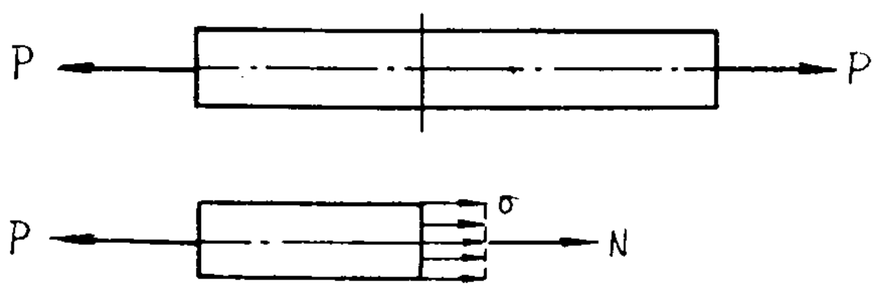


图 1-1

因此，正应力的计算公式为

$$\sigma = \frac{N}{A} \qquad (1\text{-}1)$$

式中N为横截面上的轴力，A为横截面面积。符号规则：拉应力为正，压应力为负。

杆件在轴向拉（压）时的强度条件为

$$\sigma = \frac{N}{A} \leqslant [\sigma] \qquad (1\text{-}2)$$

式中 $[\sigma]$ 为材料的许用应力。且

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n}$$

式中σ^0为材料的危险应力。对于塑性材料，取其屈服极限σ_s（或$\sigma_{0.2}$）作为危险应力，对于脆性材料，取其强度极限σ_b作为危险应力，n为安全系数。

2．轴向拉（压）时的变形

实验表明，杆件承受轴向拉伸（压缩）时，如图1-2所示，在弹性范围内，杆件的轴向伸长（缩短）与轴力及杆长成正比，而与杆的横截面面积成反比。即

$$\Delta l=\frac{Nl}{EA} \qquad (1\text{-}3)$$

式中E为材料的弹性模量。它表示材料在拉（压）时抵抗变形的的能力。上式也可以改写成杆件的正应力与轴向应变之间的正比关系。即

$$\sigma=E\varepsilon \qquad (1\text{-}4)$$

以上两式统称为单向虎克定律。

实验还表明，在弹性范围内，轴向应变ε与横向应变ε′之间成正比关系，但符号相反。即

$$\varepsilon=-\frac{\varepsilon'}{\mu} \qquad (1\text{-}5)$$

式中μ称为横向变形系数或泊松比。

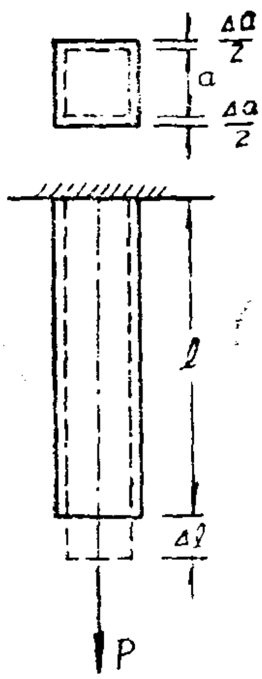


图 1-2

对于轴力N与横截面面积A沿杆轴变化的杆件，其轴向变形应分段计算，然后叠加，或按积分公式计算。即

$$\Delta l=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i l_i}{EA_i} \qquad (1\text{-}6,\ a)$$

或

$$\Delta l=\int_{l}\frac{N(x)\,dx}{EA(x)} \qquad (1\text{-}6,\ b)$$

3. 拉（压）时的超静定问题

在超静定问题中，对于维持平衡所必需的支座以外的支座或杆件称为多余约束，与多余约束相应的约束反力或内力称为多余未知力，多余未知力的个数称为超静定次数。

求解超静定问题时，单由静力平衡条件是不能确定其全部约束反力（或内力）的，必须寻找补充条件。为此，应研究杆件变形的几何关系，并考虑变形与力相互关系的物理条件，从而建立以多余未知力表示变形条件的补充方程式，然后与静力平衡方程式联立求解，即可求得全部未知力。

求解拉（压）超静定问题的一般步骤，大致是：

（1）分析结构的约束反力数与独立平衡方程数，以决定结构的多余约束反力数，即超静定次数。

（2）利用相应的多余未知约束反力代替多余约束，列出独立平衡方程。

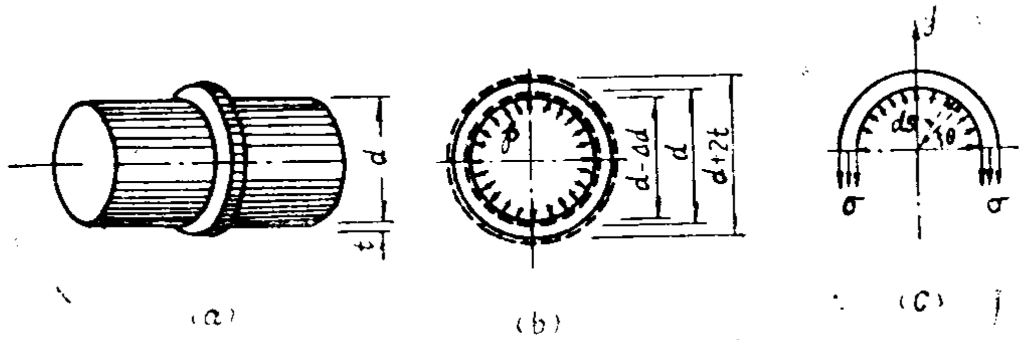
（3）根据多余约束的特点，建立变形几何方程，即变形协调条件。

（4）将物理条件代入几何方程，得到补充方程，然后与平衡条件联立求解。即可求得全部未知力。

解 题 示 例

例题1-1 为了在直径$d=300$mm的实心轴上紧套一厚度为$t=3$mm的薄壁圆环，制造时，使圆环的内径比轴径d小了Δd，如图（a）、（b）所示，然后加热使膨胀后的圆环套在轴上，冷却后二者互相压紧。若圆环材料的许用应力 $[\sigma]=$

160MPa，试求Δd的最大值，并求圆环与轴之间的最大压强p（忽略实心轴的变形）。



例1-1图

解：（1）分析薄壁圆环的周向应力

由图（c）　　$\Sigma Y=0$

$$2\sigma t\cdot 1=\int_0^{\pi} p\cdot\sin\theta\cdot 1\cdot\frac{d}{2}d\theta=pd$$

$$\sigma=\frac{pd}{2t} \qquad (a)$$

（2）因t<<d，故σ<<p，在内压的作用下，圆环膨胀，则周向应变（即圆环周长的相对变形）为

$$\varepsilon=\frac{\pi d-\pi(d-\Delta d)}{\pi d}=\frac{\Delta d}{d}$$

而

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}=\frac{pd}{2Et}$$

故

$$\Delta d=\frac{pd^2}{2Et} \qquad (b)$$

这就是圆环内径的改变量。

（3）根据圆环的强度条件

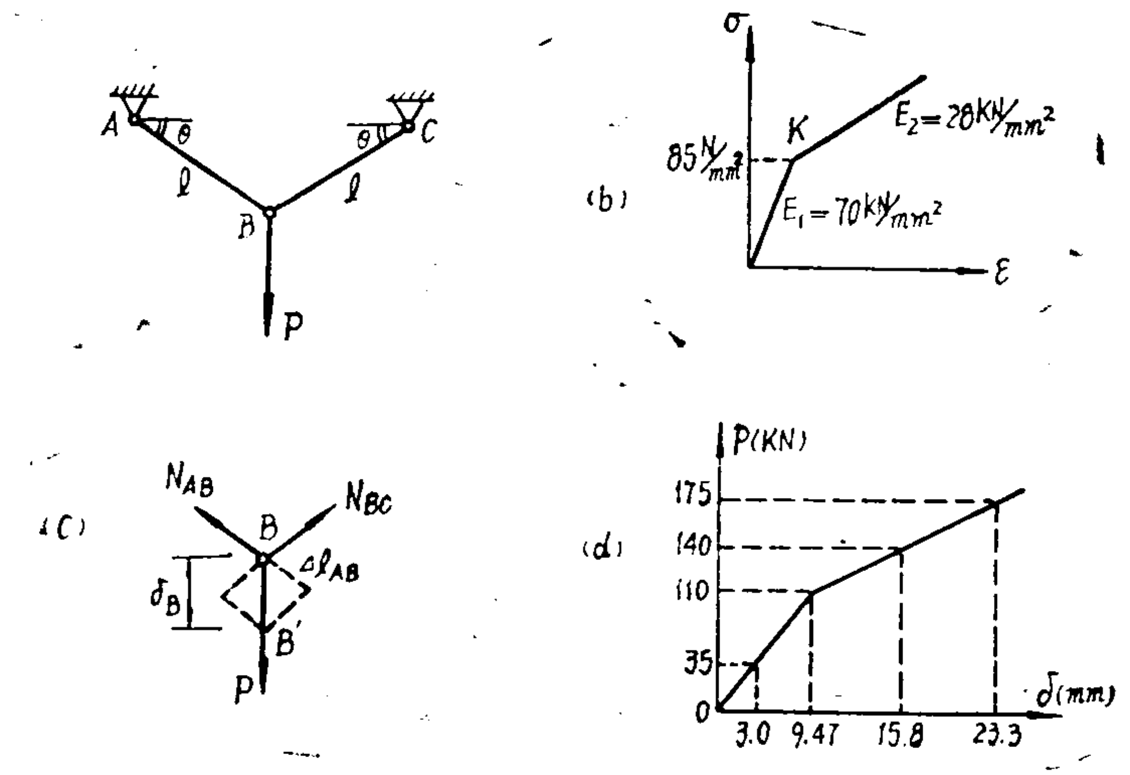
$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta d}{d} \leqslant [\sigma]$$

故
$$\Delta d \leqslant \frac{d\ [\sigma]}{E} = \frac{0.3 \times 160 \times 10^6}{210 \times 10^9} = 2.29 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$$
$$= 0.229\,\mathrm{mm}$$

（4）由（b）式可求得实心轴与圆环间的最大压强为

$$p_{max} = \frac{2Et\Delta d}{d^2} = \frac{2 \times 3 \times 10^{-3} \times 210 \times 10^9 \times 2.29 \times 10^{-4}}{0.3^2}$$
$$= 3.21 \times 10^6\,\mathrm{Pa} = 3.21\,\mathrm{MPa}$$

例题1-2 两根相同的杆件AB和BC，在节点B承受一铅垂载荷P，如图（a）所示。杆件材料的应力—应变曲线可近似地用两根直线来表示，如图（b）。已知：两杆的横截面面积均为$A = 1300\mathrm{mm}^2$，杆长均为$l = 3.9\mathrm{m}$，$\theta = 30°$。试求对应于载荷$P = 35\mathrm{kN}$、$70\mathrm{kN}$、$140\mathrm{kN}$及$175\mathrm{kN}$时节点B的铅垂位移δ_B；并绘出P与δ_B之间的关系图。



例1-2图

解：（1）δ_B的计算

1，考虑节点B的平衡

由图（b）　$\Sigma X=0$，$N_{AB}=N_{BC}$

$\Sigma Y=0$，$2N_{AB}\sin 30°=P$

故　$N_{AB}=N_{BC}=P$　（a）

2．由变形几何关系　有

$$\delta_B=\frac{\Delta l_{AB}}{\sin 30°}=2\Delta l_{AB} \tag{b}$$

3．由物理条件

①当σ小于转折点K的应力$\sigma_k=85N/mm^2$时，得

$$\Delta l_{AB}=\frac{\sigma l}{E_1}$$

将上式代入（b）式，得

$$\delta_B=\frac{2\sigma l}{E_1}$$

②当σ大于转折点K的应力 $\sigma_k=85N/mm^2$时，Δl_{AB}应分段计算，由图（b），有

$$\Delta l_{AB}=l\left(\frac{\sigma_K}{E_1}+\frac{\sigma-\sigma_K}{E_2}\right)$$

将上式代入（b）式，得

$$\delta_B=2l\left(\frac{\sigma_K}{E_1}+\frac{\sigma-\sigma_K}{E_2}\right)$$

4．δ_B的计算

①当$P=35kN$时，得到

$$\sigma=\frac{N}{A}=\frac{35\times10^3}{1300}=26.92N/mm^2<85N/mm^2$$

故　$$\delta_B=\frac{2\sigma l}{E_1}=\frac{2\times26.96\times3900}{70\times10^3}=3.0mm$$

②当$P=140\text{kN}$时，得到

$$\sigma=\frac{N'}{A}=\frac{140\times10^3}{1300}=107.68\text{N/mm}^2>85\text{N/mm}^2$$

故

$$\delta_B=2l\left(\frac{\sigma_K}{E_1}+\frac{\sigma-\sigma_K}{E_2}\right)=2\times3900\left(\frac{85}{70\times10^3}-\frac{107.68-85}{28\times10^3}\right)$$

$$=15.8\text{mm}$$

（2）绘制P与δ_B之间的关系图

将对应于$P=35\text{kN}$、70kN、140kN及175kN的节点B铅垂位移的计算结果，列表如下，并绘出P与δ的关系图如图（d）所示。

P（kN）	35	70	105	140	175
$\sigma(\text{N/mm}^2)$	26.92	53.92	80.76	107.68	134.6
δ_B（mm）	3.0	6.0	9.0	15.8	23.3

例题1-3 刚性杆AB在C点由固定铰支座支承，并在两端A与B分别由连杆AE与BD约束，如图（a）所示。由于制造时AE杆比原设计的长度短了$\Delta=0.1\text{mm}$，同时安装后温度又下降了$\Delta t=10℃$。若两连杆的截面面积相等，且均为钢材，已知钢的弹性模量$E=200\text{GPa}$，线膨胀系数$\alpha=12.5\times10^{-6}$，计算两连杆内所产生的应力。

解：此结构为一次超静定问题。

（1）平衡条件：考虑AB杆的平衡，由图（c）

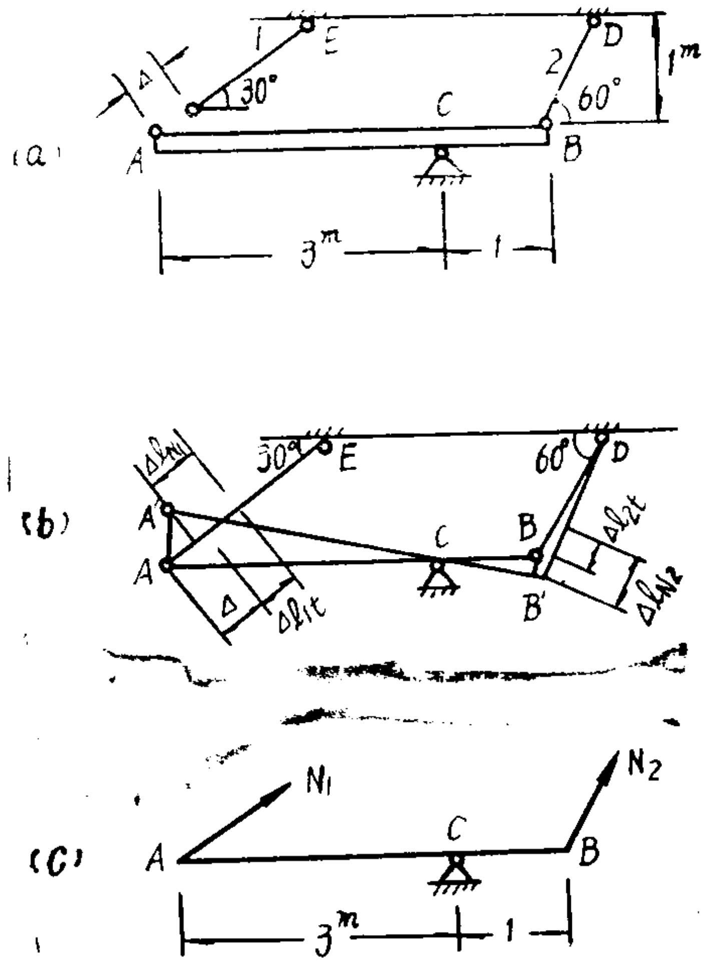
$\Sigma X=O$，　$N_1\sin30°\times3=N_2\sin60°\times1$

$$N_2=\sqrt{3}N_1 \tag{a}$$

（2）变形几何条件：由于AE杆制造的不准确和温度下

降的影响，安装后，刚性杆AB转动到A′CB′的位置（如图b），于是有

$$\overline{AA'} = 3\overline{BB'} \qquad \text{(b)}$$



（3）物理条件

AE杆：

$$\Delta + \alpha l_1 \Delta t - \overline{AA'}\sin 30^\circ$$

$$= \Delta l_{N1} = \frac{N_1 l_1}{EA}$$

例1-3图

$$\overline{AA'} = \frac{1}{\sin 30^\circ}\left(\Delta + \alpha l_1 \Delta t - \frac{N_1 l_1}{EA} \right)$$

$$= 2\left(1\times 10^{-4} + 2\times 12.5\times 10^{-6}\times 10 - \frac{2N_1}{EA}\right)$$

$$= 7\times 10^{-4} - \frac{4N_1}{EA} \qquad \text{(c)}$$

BC杆： $\overline{BB'}\sin 60^\circ + \alpha l_2 \Delta t = \Delta l N_2 = \frac{N_2 l_2}{EA}$

$$\overline{BB'} = \frac{1}{\sin 60^\circ}\left(\frac{N_2 l_2}{EA} - \alpha l_2 \Delta t\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{N_2\cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}{EA} - \frac{2}{\sqrt{3}}\times 12.5\times 10^{-6}\times 10\right)$$

$$= \frac{4N_2}{3EA} - \frac{5}{3} \times 10^{-4} \tag{d}$$

（4）应力计算： 将（c）与（d）式代入（b）式得

$$N_1 + N_2 = 3 \times 10^{-4} EA \tag{e}$$

解（a）与（e）式，得

$$N_1 = \frac{3 \times 10^{-4}}{1+\sqrt{3}} EA$$

故

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{3 \times 10^{-4}}{1+\sqrt{3}} E = 1.1 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^5$$

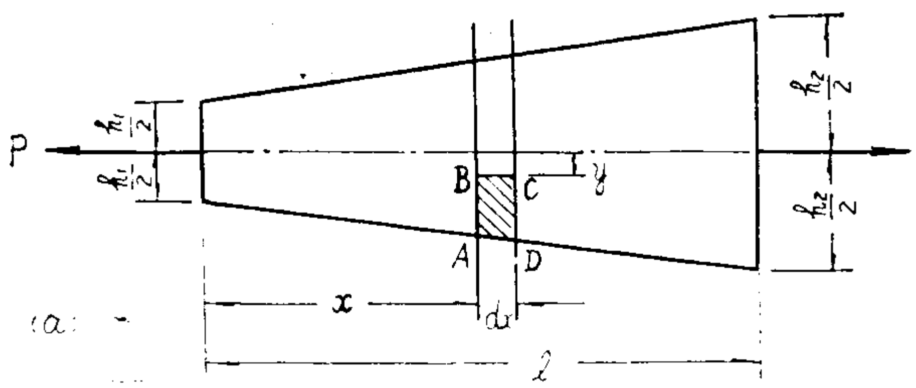
$$= 22\text{MN/m}^2 = 22\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{\sqrt{3}\ N_1}{A} = \sqrt{3}\ \sigma_1 = 38.1\text{MN/m}^2$$

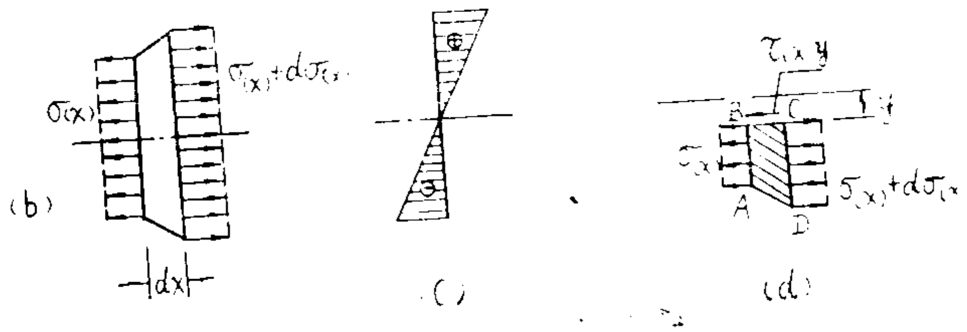
$$= 38.1\text{MPa}$$

注意：本题也可以按叠加原理计算。即分别求出由于制造不准确和温度改变引起的各杆应力，然后代数相加。

例题1-4 图（a）所示为一长度为 l，厚度 t 为常数的变截面矩形板条，两端受轴向拉力 P 的作用，且两端的高度分别为 h_1 和 h_2（$l > h_2 > h_1 > t$）。设横截面上的正应力均匀分布，试按材料力学方法，求出 x 横截面上剪应力的分布规律，并画出应力分布图。



(a)



例1-4图

解：（1）分析微段dx两相邻横截面上的应力

由图（a），利用相似关系，可得

$$h(x)=h_1+\frac{x}{l}(h_2-h_1) \tag{a}$$

则
$$\frac{dh(x)}{dx}=\frac{h_2-h_1}{l} \tag{a'}$$

故微段左边截面上的应力为

$$\sigma(x)=\frac{P}{A(x)}=\frac{P}{h(x)t} \tag{b}$$

对上式微分，并将（a）′式代入，整理后，得

$$d\sigma(x)=\sigma'(x)dx=-\frac{P}{h^2(x)t}h'(x)dx$$

$$=-\sigma(x)\frac{h_2-h_1}{h(x)l}dx$$

于是，微段右边截面上的应力为

$$\sigma(x)+d\sigma(x)=\sigma(x)\left[1-\frac{h_2-h_1}{h(x)l}dx\right] \tag{c}$$

则微段dx上的应力情况，如图（b）所示。

（2）分析剪应力的变化规律

从板条中截取微分单元体ABCD，如图（d），并考虑其平衡。由$\Sigma X=0$，