



XIANXING DAISHU

线性代数

XIANXING DAISHU
XIANXING DAISHU

洪朝兴 陈小莹 陆子强 马东魁 编


$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

华南理工大学出版社

线 性 代 数

洪潮兴 陈小莹 编
陆子强 马东魁

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数/洪潮兴, 陈小莹, 陆子强, 马东魁编. —广州: 华南理工大学出版社, 2002.2

ISBN 7-5623-1779-8

I. 线… II. ①洪…②陈…③陆…④马… III. 线性代数-教材 IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 091277 号

总发行: 华南理工大学出版社

(广州五山华南理工大学 17 号楼, 邮编 510640)

发行电话: 020-87113487 87111048 (传真)

E-mail: scut202@scut.edu.cn

<http://www2.scut.edu.cn/press>

责任编辑: 胡元

印刷者: 广东农垦印刷厂

开本: 850×1168 1/32 印张: 8.25 字数: 207 千

版次: 2002 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

印数: 1—4000 册

定价: 15.00 元

版权所有 盗版必究

前 言

线性代数已成为高等院校的一门重要基础课程.它不仅在理工类专业普遍开设,甚至在一些财经、艺术类专业也已开设;不仅在本科阶段开设,甚至在专科开设.编写本书的目的是为线性代数课程提供一本既符合《高等工业院校线性代数课程教学基本要求》,又便于教学的教材.

本教材采用先讲矩阵后讲行列式的体系,这一方面突出了重点,另一方面,用矩阵来讲述行列式更简明而紧凑.矩阵方法既是本教程的基本内容之一,又是掌握其他内容的有力工具,因此本教材特别注意教会学生善于用矩阵来表示所要讨论的对象、所依据的原理以及所运用的方法,从而做到描述简明,方法规范,结论多用.

书中有部分定理的证明较长、较繁,虽然我们仍然写出了证明过程,但并非要求所有读者都掌握,对这部分内容我们用星号(*)表示出来,读者可以根据自己的实际情形适当选择.

本书的出版得到了华南理工大学网络教育学院的大力协助与支持,在此表示感谢.参加本书编写的有:洪潮兴、陈小莹、陆子强、马东魁,由洪潮兴统稿.洪碧玲为本书演算了大部分习题,并核算了所有习题答案.

由于我们水平有限,疏漏之处在所难免,敬希读者指正.

编者

2001 年 12 月

目 录

第一章 矩阵及其基本运算	1
1.1 矩阵的概念	1
1.1.1 矩阵的来源	1
1.1.2 矩阵的概念	3
1.2 矩阵的基本运算	6
1.2.1 矩阵的线性运算	6
1.2.2 矩阵的乘法	8
1.2.3 矩阵的转置	15
1.3 分块矩阵	18
1.3.1 分块矩阵的加法(减法)	20
1.3.2 分块矩阵的数乘及转置	20
1.3.3 分块矩阵的乘法	21
1.4 矩阵的初等变换	23
1.4.1 线性方程组的消元法	23
1.4.2 矩阵的初等变换	25
1.4.3 阶梯形矩阵	30
1.5 逆矩阵	32
1.5.1 逆矩阵的概念	32
1.5.2 用初等变换求逆矩阵	33
1.5.3 分块矩阵的逆矩阵	35
1.5.4 矩阵方程	37
习题	41

第二章 行列式与线性方程组	45
2.1 二阶、三阶行列式	45
2.1.1 方阵的可逆条件	45
2.1.2 二阶行列式	47
2.1.3 三阶行列式	48
2.2 n 阶行列式	50
2.2.1 排列与逆序	51
2.2.2 n 阶行列式的定义	53
2.3 行列式的性质	57
2.4 行列式的展开定理	67
2.4.1 余子式与代数余子式	67
2.4.2 行列式的展开定理	68
2.5 行列式的初步应用	74
2.5.1 n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件	74
2.5.2 克莱姆(Cramer)法则	76
2.6 矩阵的秩	79
2.6.1 秩的概念	79
2.6.2 求秩的方法	83
2.7 线性方程组	85
2.7.1 线性方程组的基本概念	85
2.7.2 高斯(Gauss)消元法	86
2.7.3 线性方程组解法讨论	90
习题	97
第三章 向量空间	103
3.1 向量的概念	103
3.1.1 向量的概念	103
3.1.2 由向量组线性表示向量	103
3.2 向量组的线性相关与线性无关	106

3.2.1	线性相关与线性无关的概念	106
3.2.2	基本定理	109
3.2.3	线性相关性判别法	113
3.3	两向量组间的相互关系	115
3.3.1	基本概念	115
3.3.2	基本定理	117
3.3.3	极大无关组	119
3.3.4	向量组的秩	120
3.4	线性方程组解的结构	124
3.4.1	齐次线性方程组解的结构	124
3.4.2	非齐次线性方程组解的结构	127
3.5	向量空间	130
3.5.1	向量空间的概念	130
3.5.2	向量空间的基、维数及向量坐标	132
3.5.3	坐标变换	133
3.6	内积空间	137
3.6.1	内积	137
3.6.2	正交向量组	139
3.6.3	正交矩阵及其性质	143
习题		145
第四章	特征值与特征向量	149
4.1	特征值与特征向量	149
4.1.1	特征值与特征向量的概念	149
4.1.2	特征值与特征向量的求法	151
4.1.3	特征值与特征向量的性质	155
4.2	相似矩阵	159
4.3	实对称矩阵的正交相似	166
习题		177

第五章 二次型	179
5.1 二次型的概念	179
5.2 用正交变换将二次型化为标准形	182
5.3 用合同变换将二次型化为标准形	186
5.3.1 合同的概念	187
5.3.2 将二次型化为标准形的配方法	188
5.3.3 惯性定理	193
5.4 二次型的正定性	195
习题.....	206
附录 习题解答	208

第一章 矩阵及其基本运算

线性代数是研究有限维线性空间与线性映射的关系. 矩阵是研究线性代数最基本的工具, 矩阵的最基本的运算方法是线性代数的基本运算方法. 本章从实例出发引入矩阵的概念、线性运算、乘法等基本运算, 并进一步介绍矩阵的初等变换等运算.

1.1 矩阵的概念

1.1.1 矩阵的来源

矩阵是一个排成若干行、若干列的长方形数表. 实际生活中有许多这样的数表.

例1 某公司有甲、乙、丙三个工厂, 生产 A、B、C、D 四种产品, 各个工厂生产各种产品的月产量如表 1.1 所示.

表 1.1

	A	B	C	D
甲	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
乙	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
丙	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

表中 a_{ij} 表示第 i 厂生产第 j 种产品的月生产量 ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$).

表 1.1 可以是月初的计划表, 也可以是月底的统计表. 如果要

求统计表与计划表完全一样,应是指所有 a_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$) 完全一样.

如果有两个月的一张统计表,如表 1.2(1 月份统计表)和表 1.3(2 月份统计表)所示,则可将它们相加,得 1、2 月份的总产量如表 1.4(1、2 月份的总和)所示.

表 1.2

	A	B	C	D
甲	30	46	54	70
乙	26	40	48	56
丙	32	50	60	68

表 1.3

	A	B	C	D
甲	22	30	40	48
乙	20	28	34	38
丙	21	34	46	49

表 1.4

	A	B	C	D
甲	52	76	94	118
乙	46	68	82	94
丙	53	84	106	117

加法的对应规则是:将各个对应数逐个对应相加.

如将表 1.2 看成是一个月计划表,拟将它连续施行一个季度,则可将数表乘以 3,如表 1.5(一季度的计划表)所示.

表 1.5

	A	B	C	D
甲	90	138	162	210
乙	78	120	144	168
丙	96	150	180	204

注: $\lambda = 3$.

数 3 乘以一个数表的规则是: 将数表中的每一个数都乘以 3.

如上所见, 矩阵来源于非常普通的实践过程, 它将一个数表作为一个整体对象进行运算.

1.1.2 矩阵的概念

定义 1 由 $m \times n$ 个数排成 m 个行(横向) n 个列(纵向)的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 $m \times n$ 矩阵. 其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列处的元素. 通常, 矩阵用大写黑斜体字母表示. 定义中的矩阵常用下述各种方法表示为:

$$A \stackrel{\text{或}}{=} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \stackrel{\text{或}}{=} (a_{ij})_{m \times n} \stackrel{\text{或}}{=} \mathbf{A}_{m \times n}$$

我们规定: 所有元素都等于零的矩阵叫做零矩阵, 记作

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

有时也简记为 $\mathbf{O}$ 或 0 .

若两个矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 及 $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$ 相等, 则定义为它们的各个对应元素都相等, 即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$$

并记作

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

本书如无特别声明, 矩阵中的各元素都是实数.

下面一些特殊矩阵是在今后的应用中经常遇到的.

(1) 若 $m = n$, 则 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 称为 n 阶方阵, 也叫 n 阶矩阵.

在 n 阶方阵中, 元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 位于主对角线上.

(2) 在 n 阶方阵 $\mathbf{R}$ 中, 若主对角线左下方所有元素全为零 (即 $r_{ik} = 0$, 其中 $i > k$), 如

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

称 $\mathbf{R}$ 为上三角形矩阵, 简称上三角阵.

(3) 在 n 阶方阵 $\mathbf{L}$ 中, 若主对角线右上方所有元素全为零 (即 $l_{kj} = 0$, 其中 $k < j$), 如

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

称 $\mathbf{L}$ 为下三角形矩阵, 简称下三角阵.

(4)若 n 阶方阵 D 既是上三角阵又是下三角阵,则称 A 为对角形矩阵,简称对角形.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

对角阵除主对角线上的元素外,其余元素全为零.主对角线上的元素为 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 的对角阵可简记为

$$\text{diag}[d_1, d_2, \cdots, d_n]$$

对角阵 $\text{diag}[d_1, d_2, \cdots, d_n]$ 中 $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = \lambda$, 则称之为纯量矩阵(或标量矩阵).

(5)在纯量矩阵中,若 $\lambda = 1$,记为 E ,即

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

称为单位矩阵.有时为了突出单位矩阵的阶数,将 n 阶单位矩阵记为 E_n .

(6)只有一行的矩阵 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)_{1 \times n}$ 叫做行矩阵,又

叫做行向量;只有一列的矩阵 $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 叫做列矩阵,又叫做列向量.

这种矩阵以后常用小写希腊字母表示.

(7)只有一行一列的一阶方阵实质上就是一个数,本来“数”与

“一阶方阵”应属不同概念,但在本书中我们不刻意去区分它们,而将它们等同看待。

例 2 某市有电力公司、石油公司和运输公司三个部门,电力公司每生产 1 万元产值,需消耗自身的电力 0.1 万元,消耗石油公司产品 0.35 万元,消耗运输公司运力 0.15 万元;石油公司单位产值需消耗电力公司电力 0.40 万元,消耗运输公司运力 0.20 万元;而运输公司的单位产值需消耗本身运力 0.05 万元,消耗电力公司电力 0.20 万元,消耗石油公司产品 0.45 万元. 以上三个部门间的相互消耗关系可以用数表(见表 1.6)表示为:

表 1.6

	电力	石油	运输
电力	0.1	0.35	0.15
石油	0.40	0	0.20
运输	0.20	0.45	0.05

深入研究这一数表,就成为规划部门协调三方面的投入产出的宏观调控的任务. 当然,一个城市的有关部门绝非仅仅三个,而是更多个.

1.2 矩阵的基本运算

1.2.1 矩阵的线性运算

矩阵的线性运算是指矩阵的加法与数乘矩阵. 在上一节中,我们已经给出这两种运算的原型,现分述如下.

1.2.1.1 矩阵的加法

定义 2 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 与 $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 是两个 $m \times n$ 矩阵,

定义一个新的 $m \times n$ 矩阵 C :

$$C = (c_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

称 C 为矩阵 A 与 B 的和, 记为

$$C = A + B$$

由定义 2 可知, 两个矩阵相加是将它们在同一位置的每一对数对应相加, 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

值得指出的是, 两个矩阵相加是有条件的, 即 A 与 B 必须都是 $m \times n$ 矩阵(称之为同型矩阵). 由此, 容易得出上述定义的加法满足下列性质(在可加的前提下):

(1) $A + B = B + A$ (交换律);

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (结合律);

(3) 对于任意 A , $A + 0 = A$;

(4) 对于任意 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 存在 $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$, 适合 $A + (-A) = 0$. $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$ 叫做矩阵 A 的负矩阵.

由性质(4)可以定义减法:

$$A - B \xrightarrow{\text{定义为}} A + (-B)$$

1.2.1.2 数乘矩阵

定义 3 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 是 $m \times n$ 矩阵, λ 是实数(记 $\lambda \in \mathbb{R}$), 定义一个新的 $m \times n$ 矩阵 C :

$$C = (c_{ij})_{m \times n} = (\lambda a_{ij})_{m \times n} = \lambda A$$

称 C 为数 λ 乘以矩阵 A , 记为 λA .

由定义 3 可知, 数 λ 乘以矩阵 A 是将数 λ 遍乘 A 的所有元素所得的新矩阵. 例如:

$$\lambda E_3 = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 6 & -12 & 18 \\ -4 & 8 & -12 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

由定义 3 容易验算数乘矩阵满足下列性质:

(1) 对于任意 A , $1 \cdot A = A$

(2) 对于任意 $\lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}$, 有 $\lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\lambda\mu)A$

(3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

(4) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

此外, 还容易得到:

$$0 \cdot A = 0 \quad -A = (-1)A$$

1.2.2 矩阵的乘法

例 1 (1) 若某厂生产一产品的产量为 a , 而生产该产品单位产量的成本为 b , 则该厂的总成本为 $c = a \cdot b$.

(2) 现设某公司有两个工厂(一厂、二厂)生产甲、乙、丙、丁 4 种产品. 其产量分配如表 1.7 所示.

表 1.7

	甲	乙	丙	丁
一厂	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
二厂	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}

将表 1.7 用矩阵表示为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

若我们考虑的经济效益指标不止成本一项而是Ⅰ：成本，Ⅱ：利润，Ⅲ：上税，并设每种产品单位产量所实现的效益如表 1.8 所示.

表 1.8

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
甲	b_{11}	b_{12}	b_{13}
乙	b_{21}	b_{22}	b_{23}
丙	b_{31}	b_{32}	b_{33}
丁	b_{41}	b_{42}	b_{43}

表中 b_{kj} 表示生产单位产量的第 k 种产品所实现的第 j 种效益.

现要求两个工厂的总效益如表 1.9 所示.

表 1.9

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
一厂	c_{11}	c_{12}	c_{13}
二厂	c_{21}	c_{22}	c_{23}

表中 c_{ij} 表示第 i 个厂实现第 j 种效益的总值. 如 c_{13} 表示第一个厂向国家交税的总额, c_{21} 表示第二个厂的总利润. 容易得出:

$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} + a_{14}b_{43}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + a_{24}b_{41}$$

等等. 一般地, 有

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + a_{i4}b_{4j} \quad (i=1,2; j=1,2,3)$$

这是本例(1)中乘法的推广, 故得定义如下:

定义 4 设 $A = (a_{ik})_{m \times l}$ 是 $m \times l$ 矩阵, $B = (b_{kj})_{l \times n}$ 是 $l \times n$ 矩阵, 则定义一个 $m \times n$ 矩阵 C :