XIANXING DAISHU

线性代数

XIANXING DAISHU

XIANXING DAISHU

洪朝兴 陈小莹 陆子强 马东魁 编

4

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

华南理工大学出版社

线性代数

洪潮兴　陈小莹
陆子强　马东魁　编

華南理工大學出版社
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/洪潮兴，陈小莹，陆子强，马东魁编.—广州：华南理工大学出版社，2002.2

ISBN 7-5623-1779-8

Ⅰ.线…　Ⅱ.①洪…②陈…③陆…④马…　Ⅲ.线性代数-教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 091277 号

总 发 行：华南理工大学出版社
（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scut202@scut.edu.cn
http://www2.scut.edu.cn/press
责任编辑：胡　元
印 刷 者：广东农垦印刷厂
开　　本：850×1168　1/32　**印张**：8.25　**字数**：207 千
版　　次：2002 年 2 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数：1—4000 册
定　　价：15.00 元

前 言

线性代数已成为高等院校的一门重要基础课程.它不仅在理工类专业普遍开设,甚至在一些财经、艺术类专业也已开设;不仅在本科阶段开设,甚至在专科开设.编写本书的目的是为线性代数课程提供一本既符合《高等工业院校线性代数课程教学基本要求》,又便于教学的教材.

本教材采用先讲矩阵后讲行列式的体系,这一方面突出了重点,另一方面,用矩阵来讲述行列式更简明而紧凑.矩阵方法既是本教程的基本内容之一,又是掌握其他内容的有力工具,因此本教材特别注意教会学生善于用矩阵来表示所要讨论的对象、所依据的原理以及所运用的方法,从而做到描述简明,方法规范,结论多用.

书中有部分定理的证明较长、较繁,虽然我们仍然写出了证明过程,但并非要求所有读者都掌握,对这部分内容我们用星号(*)表示出来,读者可以根据自己的实际情形适当选择.

本书的出版得到了华南理工大学网络教育学院的大力协助与支持,在此表示感谢.参加本书编写的有:洪潮兴、陈小莹、陆子强、马东魁,由洪潮兴统稿.洪碧玲为本书演算了大部分习题,并核算了所有习题答案.

由于我们水平有限,疏漏之处在所难免,敬希读者指正.

编者

2001 年 12 月

目　　录

第一章　矩阵及其基本运算

线性代数是研究有限维线性空间与线性映射的关系.矩阵是研究线性代数最基本的工具,矩阵的最基本的运算方法是线性代数的基本运算方法.本章从实例出发引入矩阵的概念、线性运算、乘法等基本运算,并进一步介绍矩阵的初等变换等运算.

1.1　矩阵的概念

1.1.1　矩阵的来源

矩阵是一个排成若干行、若干列的长方形数表.实际生活中有许许多多这样的数表.

例 1　某公司有甲、乙、丙三个工厂,生产 A、B、C、D 四种产品,各个工厂生产各种产品的月产量如表 1.1 所示.

表 1.1

	A	B	C	D
甲	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
乙	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
丙	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

表中 a_{ij}表示第 i 厂生产第 j 种产品的月生产量($i=1,2,3$;$j=1,2,3,4$).

表 1.1 可以是月初的计划表,也可以是月底的统计表.如果要

求统计表与计划表完全一样,应是指所有 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$完全一样.

如果有两个月的两张统计表,如表 1.2(1 月份统计表)和表 1.3(2 月份统计表)所示,则可将它们相加,得 1、2 月份的总产量如表 1.4(1、2 月份的总和)所示.

表 1.2

	A	B	C	D
甲	30	46	54	70
乙	26	40	48	56
丙	32	50	60	68

表 1.3

	A	B	C	D
甲	22	30	40	48
乙	20	28	34	38
丙	21	34	46	49

表 1.4

	A	B	C	D
甲	52	76	94	118
乙	46	68	82	94
丙	53	84	106	117

加法的对应规则是:将各个对应数逐个对应相加.

如将表 1.2 看成是一个月计划表,拟将它连续施行一个季度,则可将数表乘以 3,如表 1.5(一季度的计划表)所示.

表 1.5

	A	B	C	D
甲	90	138	162	210
乙	78	120	144	168
丙	96	150	180	204

注：$\lambda=3$.

数 3 乘以一个数表的规则是：将数表中的每一个数都乘以 3.

如上所见，矩阵来源于非常普通的实践过程，它将一个数表作为一个整体对象进行运算.

1.1.2 矩阵的概念

定义 1 由 $m\times n$ 个数排成 m 个行(横向) n 个列(纵向)的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵. 其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列处的元素. 通常，矩阵用大写黑斜体字母表示. 定义中的矩阵常用下述各种方法表示为：

$$\boldsymbol{A} \xlongequal{\text{或}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xlongequal{\text{或}} (a_{ij})_{m\times n} \xlongequal{\text{或}} \boldsymbol{A}_{m\times n}$$

我们规定：所有元素都等于零的矩阵叫做零矩阵，记作

$$
\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{m\times n}
$$

有时也简记为 $\boldsymbol{O}$ 或 0.

若两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 及 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 相等,则定义为它们的各个对应元素都相等,即

$$
a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)
$$

并记作

$$
\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}
$$

本书如无特别声明,矩阵中的各元素都是实数.

下面一些特殊矩阵是在今后的应用中经常遇到的.

(1)若 $m=n$,则 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为 n 阶方阵,也叫 n 阶矩阵. 在 n 阶方阵中,元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 位于主对角线上.

(2)在 n 阶方阵 $\boldsymbol{R}$ 中,若主对角线左下方所有元素全为零(即 $r_{ik}=0$,其中 $i>k$),如

$$
\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn}\end{bmatrix}
$$

称 $\boldsymbol{R}$ 为上三角形矩阵,简称上三角阵.

(3)在 n 阶方阵 $\boldsymbol{L}$ 中,若主对角线右上方所有元素全为零(即 $l_{kj}=0$,其中 $k<j$),如

$$
\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}l_{11} & 0 & \cdots & 0\\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn}\end{bmatrix}
$$

称 $\boldsymbol{L}$ 为下三角形矩阵,简称下三角阵.

(4)若 n 阶方阵 $\boldsymbol{D}$ 既是上三角阵又是下三角阵,则称 $\boldsymbol{A}$ 为对角形矩阵,简称对角形.

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

对角阵除主对角线上的元素外,其余元素全为零.主对角线上的元素为 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 的对角阵可简记为

$$\operatorname{diag}[d_1,d_2,\cdots,d_n]$$

对角阵 $\operatorname{diag}[d_1,d_2,\cdots,d_n]$ 中 $d_1=d_2=\cdots=d_n=\lambda$,则称之为纯量矩阵(或标量矩阵).

(5)在纯量矩阵中,若 $\lambda=1$,记为 $\boldsymbol{E}$,即

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

称为单位矩阵.有时为了突出单位矩阵的阶数,将 n 阶单位矩阵记为 $\boldsymbol{E}_n$.

(6)只有一行的矩阵 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)_{1\times n}$ 叫做行矩阵,又叫做行向量;只有一列的矩阵 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 叫做列矩阵,又叫做列向量.

这种矩阵以后常用小写希腊字母表示.

(7)只有一行一列的一阶方阵实质上就是一个数,本来“数”与

"一阶方阵"应属不同概念,但在本书中我们不刻意去区分它们,而将它们等同看待.

例 2 某市有电力公司、石油公司和运输公司三个部门,电力公司每生产 1 万元产值,需消耗自身的电力 0.1 万元,消耗石油公司产品 0.35 万元,消耗运输公司运力 0.15 万元;石油公司单位产值需消耗电力公司电力 0.40 万元,消耗运输公司运力 0.20 万元;而运输公司的单位产值需消耗本身运力 0.05 万元,消耗电力公司电力 0.20 万元,消耗石油公司产品 0.45 万元.以上三个部门间的相互消耗关系可以用数表(见表 1.6)表示为:

表 1.6

	电力	石油	运输
电力	0.1	0.35	0.15
石油	0.40	0	0.20
运输	0.20	0.45	0.05

深入研究这一数表,就成为规划部门协调三方面的投入产出的宏观调控的任务.当然,一个城市的有关部门绝非仅仅三个,而是更多个.

1.2 矩阵的基本运算

1.2.1 矩阵的线性运算

矩阵的线性运算是指矩阵的加法与数乘矩阵.在上一节中,我们已经给出这两种运算的原型,现分述如下.

1.2.1.1 矩阵的加法

定义 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$与$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$是两个 $m\times n$ 矩阵,

定义一个新的 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$：

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n} \quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

称 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$$

由定义 2 可知，两个矩阵相加是将它们在同一位置的每一对数对应相加，例如：

$$(1\quad 2\quad 3)+(2\quad -1\quad -2)=(3\quad 1\quad 1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

值得指出的是，两个矩阵相加是有条件的，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 必须都是 $m \times n$ 矩阵（称之为同型矩阵）. 由此，容易得出上述定义的加法满足下列性质（在可加的前提下）：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$（交换律）；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$（结合律）；

(3) 对于任意 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}+0=\boldsymbol{A}$；

(4) 对于任意 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，存在 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$，适合 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=0$. $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$ 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵.

由性质(4)可以定义减法：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\xlongequal{\text{定义为}}\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

1.2.1.2　**数乘矩阵**

定义 3　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 是 $m \times n$ 矩阵，λ 是实数（记 $\lambda \in \mathbf{R}$），定义一个新的 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$：

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}=\lambda\boldsymbol{A}$$

称 $\boldsymbol{C}$ 为数 λ 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$，记为 $\lambda\boldsymbol{A}$.

由定义 3 可知，数 λ 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是将数 λ 遍乘 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素所得的新矩阵. 例如：

$$\lambda \boldsymbol{E}_3 = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 6 & -12 & 18 \\ -4 & 8 & -12 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

由定义 3 容易验算数乘矩阵满足下列性质:

(1)对于任意 $\boldsymbol{A}, 1 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

(2)对于任意 $\lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}$,有 $\lambda(\mu \boldsymbol{A}) = \mu(\lambda \boldsymbol{A}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{A}$

(3)$\lambda(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \lambda \boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}$

(4)$(\lambda + \mu)\boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{A} + \mu \boldsymbol{A}$

此外,还容易得到:

$$0 \cdot \boldsymbol{A} = 0 \qquad -\boldsymbol{A} = (-1)\boldsymbol{A}$$

1.2.2 矩阵的乘法

例 1 (1)若某厂生产一产品的产量为 a,而生产该产品单位产量的成本为 b,则该厂的总成本为 $c = a \cdot b$.

(2)现设某公司有两个工厂(一厂、二厂)生产甲、乙、丙、丁 4 种产品.其产量分配如表 1.7 所示.

表 1.7

	甲	乙	丙	丁
一厂	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
二厂	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}

将表 1.7 用矩阵表示为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

若我们考虑的经济效益指标不止成本一项而是Ⅰ:成本,Ⅱ:利润,Ⅲ:上税,并设每种产品单位产量所实现的效益如表 1.8 所示.

表 1.8

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
甲	b_{11}	b_{12}	b_{13}
乙	b_{21}	b_{22}	b_{23}
丙	b_{31}	b_{32}	b_{33}
丁	b_{41}	b_{42}	b_{43}

表中 b_{kj} 表示生产单位产量的第 k 种产品所实现的第 j 种效益.

现要求两个工厂的总效益如表 1.9 所示.

表 1.9

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
一厂	c_{11}	c_{12}	c_{13}
二厂	c_{21}	c_{22}	c_{23}

表中 c_{ij} 表示第 i 个厂实现第 j 种效益的总值.如 c_{13} 表示第一个厂向国家交税的总额,c_{21} 表示第二个厂的总利润.容易得出:

$$c_{13}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}+a_{14}b_{43}$$

$$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}+a_{24}b_{41}$$

等等.一般地,有

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+a_{i4}b_{4j} \quad (i=1,2;j=1,2,3)$$

这是本例(1)中乘法的推广,故得定义如下:

定义 4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times l}$ 是 $m\times l$ 矩阵,$\boldsymbol{B}=(b_{kj})_{l\times n}$ 是 $l\times n$ 矩阵,则定义一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$: