数值方法在工程中的应用

〔美〕J. H. 费尔齐格 著

机械工业出版社

本书系统地论述了数值方法的基本理论及其实际应用。其中约有一半篇幅用来对偏微分方程的数值方法进行深入研究。许多独到的见解，弥补了目前一些数值方法著作中存在的不足。特别是本书通过许多实例对常用的方法进行演算，并用图表作出分析比较，以利读者熟悉它们的特点。对于一些常用的方法，还给出了用高级语言编制的程序。因此，特别适合在工程中想应用数值方法的读者，也适合于从事研究数值方法的工作者。

本书是美国斯坦福大学及其它几所著名大学数值方法课程的教材。全书共分四章：插值法，数值积分，常微分方程的数值计算方法和偏微分方程的数值计算方法。

本书可作为高等学校应用数学专业参考书，或作为高等学校研究生及计算机应用专业本科生的教材，也可作为工程技术人员和数值方法研究者的参考书。

Numerical Methods for Engineering Application

Joel H. Fergiger

John Wileg & Sous, Inc. 1981

* * *

数值方法在工程中的应用

〔美〕 J. H. 费尔齐格 著

潘任先 王晖夫 译

朵 英 贤 校

*

责任编辑：邱锦来　　责任校对：刘志文

封面设计：郭景云　　版式设计：乔　玲

责任印制：张俊民

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

机械工业出版社京丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・新华书店经售

*

开本 $850\times1168^{1}/_{32}$・印张$8^{5}/_{8}$・字数 223 千字

1990年11月北京第一版・1990年11月北京第一次印刷

印数 0,001— 1,750・定价： 8.80 元

*

ISBN 7-111-01647-5/TP・97

译 者 的 话

美国斯坦福大学J.H.费尔齐格教授的这部名著，自初版迄今，已多次再版。本书为该校及其它几所著名大学数值计算课程的教材，深受读者欢迎。作者将主要篇幅用于研究和评价常微分方程及偏微分方程的各种数值方法，说明作者对这一领域，特别是偏微分方程数值方法的理论与实际应用有着丰富的知识。因而弥补了目前一些数值方法著作中的不足。书中通过实例对常用的方法进行演算，并用图表给出具体比较，阐明其特点和适用场合。因而，想在工程实际问题中应用数值方法的读者，会从本书的论述中得到有益的启示。对于从事应用数学的工作者，本书确实是数学和应用之间的桥梁。

全书共分四章：插值法，数值积分，常微分方程的数值计算方法和偏微分方程的数值计算方法。各节讲述都有实例，并附FORTRANS程序。译者曾将书中主要计算方法及程序引入自己的教学实践，使学生更直观地掌握各种数值方法的特点，收到了良好效果。

本书前言、第一章、第三章及附录由潘任先同志翻译；第二章、第四章由王晖夫同志翻译；第四章中第13节至第22节由王忠民同志翻译。全书由潘任先、王晖夫共同整理。特别感谢朵英贤研究员对译稿给予认真、细致的审阅，提出了许多宝贵意见。对译文中的多处疑难问题给予了具体的指导，在此表示衷心感谢。

限于水平，译文不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

前　言

近30年来，工程中许多传统的领域经历了巨大的变革。工程技术人员发现他们自己更频繁地使用以基本理论为基础，并由此导出方程的那些方法来代替曾一度通用的查手册的方法。其主要原因是技术发展速度增长迅速，以致简直无法提供出传统方法所需要的那些资料。

技术变革的关键因素之一是电子计算机的发展。尽管它的问世仅有30年的历史，而那时最好的机器也很难和今天廉价而适用的手用计算器相竞争。计算机的发展虽已经取得很大的成就，但没有理由认为它的发展已到了尽头。在过去的30年中，计算机的计算能力每10年提高约两个数量级，而使用它的费用却不是按两个数量级的比率升高。其结果，计算的有效费用每十年减少一个数量级以上。在费用一时间曲线上、有效费用有停滞增长的趋势，而且至少在下一个10年期间这种趋势预料会继续保持着。

使用计算机的总成本是硬件（机器）和软件（人）费用的总和。在许多工程应用中，硬件费用只占总成本的很少部分，这将引起计算机行业发生某种形式的变革。然而，在工程技术人员感兴趣的某些工程应用中，硬件费用仍占主导成分。这意味着，使用计算机的费用相对其它工程项目的费用来说，或许将会继续减少。因此，可以预料，许多传统工程任务的计算费用将保持继续减少的趋势，这种趋势将不同程度地涉及工程的所有领域。

并不是所有的工程师在他们的工作中大量地使用着计算机，但是，相当数量的工程技术人员愿意选修一些有关计算机应用方面的课程，这些课程对于现代工程领域中某些问题的求解是必不可少的。这些课程通常设置在数学系或计算机科学系，适用于各类工科专业的学生。当然工科有多种专业，每个专业中各个学生

的需要也不尽相同，只设置一些单一性质的课程很难满足他们的不同要求，目前，趋向于将一些数学或计算机科学方面的课程由工科各系自己讲授。

本书取材于作者在斯坦福大学机械系所讲授过的一些课程，已经证实，这些课程对与此有关的学生也是会感兴趣的。作者已讲授的四门课程按顺序是：线性代数，包括它的数值运算方法及在非线性问题中的应用；求解偏微分方程的解析法；常微分方程与偏微分方程的数值解法；以及数值计算法在流体力学中的应用。另一门数值方法课程，如有限单元法也在其它系讲授过。

本书是由上述的第三门课及第四门课的一部分内容汇编而成。主要内容是常微分方程和偏微分方程的数值计算方法(注意，其它内容可参考作者的另一些著作)。本书是面向使用数值方法而不是只研究新方法的读者。在实际应用过程中，着重从直观方面使读者领会怎样选用最佳的数值计算方法，并通过与其它数值方法的比较领会如何鉴别其优、劣，而不是方法本身的理论分析。特别是本书对某些特殊方法的精度和稳定性分析不如数值分析专著详细，尽管它是数值计算的中心议题。本书给出某些例题的正确答案，对其冗长的分析没有推导而只加以引用。当然不是说这些分析不重要。本书通常适合于不需了解证明过程而只采用其结论的读者，只要该结论的证明是存在的。

本书的内容按习惯的顺序编排。首先是插值法，因为它是数值计算法的基础。其次是积分法，它为工程技术人员所大量使用。第三章是常微分方程的数值计算法，前半部集中讨论初值问题，后半部研究边值问题。最后一章专门研究偏微分方程的数值计算方法。

全书采用承前启后的方法论述，因为这样可以使学生通过学习毫无联系的各种方法，了解它们之间的相互关系。同时，也便于学生掌握课程的全部内容。

书中内容是按作者的观点认为是“好”的方法取舍的（“好”方法定义为那些便于应用的有效方法）。根据“少而精”原则，本书

没有包括各种方法的梗概，而专门研究几种精选出来的有关方法，考虑教学上的需要，或便于学习和分析或较为通用的一些方法。当然，公认为较好的方法（其它教科书也有介绍）已经包括在本书中。

J.H.费尔齐格

目　录

第一章　插　值　法

插值法是寻求表中各行之间读数的方法，或是对一系列有限数据拟合出一条平滑曲线的过程。我们首先研究插值法有许多原因，其中最明显的原因是该方法经常被用来估算表格中的数据。更重要的是很多数值微分和积分的方法就是通过先应用插值法构造出一条光滑匀整的逼近曲线，然后再微分或积分其结果而推导出来的。

按照所提供数据的类别及期望得到结果的型式，将插值法分为两类。标准插值法就是通过所给的各数据点。构造出一条平滑曲线。而最小二乘插值法，则是当所给的各数据点间没有确定关系时，构造一条平滑曲线充分靠近这些数据点。在标准插值法中，逼近曲线方程必须具有与所给点数相同的参数；而在最小二乘插值法中，拟合参数通常比已知数据点少得多。我们只讨论标准插值法。最小二乘法拟合是个重要的课题，特别在实验中应用广泛，但是，因篇幅有限本章不再赘述。

插值法的基本问题阐述如下：给出一组数据点 (x_i, y_i)，$i = 1, 2, \cdots n$，要求构造出一平滑曲线 $f(x)$，使其通过这些数据点。对插值曲线应有如下要求：

（1）由问题的陈述，必须满足

$$f(x_i)=y_i \qquad i = 1, 2, \cdots n \tag{1.1}$$

（2）函数必须容易定值。

（3）应该容易进行微分和积分。

（4）应具有线性可调参数（以简化寻求参数的问题）。

插值函数的选择不仅取决于平滑性，而且取决于被逼近的函数。可用的插值函数很多，其中最常用的是各种类型的多项式，因为它们比其它任何函数能更好地满足上述要求（2）和（3）。尽

管多项式插值函数有各种形式，我们首先讨论最简单的一种——拉格朗日插值函数。

1. 拉格朗日（Lagrange）插值法

在拉格朗日插值法中，我们构造一个尽可能低阶次的多项式，使其通过几个给定数据点。由于需要几个参数，要求多项式阶次为（$n-1$）次，所以

$$f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots a_1x+a_0 \tag{1.1.1}$$

只要将方程（1.1.1）代入方程（1.1）中，就可直接求出各系数。得到

$$a_{n-1}x_i^{n-1}+a_{n-2}x_i^{n-2}+\cdots a_1x_i+a_0=y_i \qquad i=1,2,\cdots n \tag{1.1.2}$$

由于x_i和y_i为已知，上式表示具有几个未知数$a_0, a_1, \cdots a_{n-1}$的n阶线性代数方程组。它可用典型的线性方程解法求解，但这不是一种好方法，因为，（1）当$n>4$或$n>5$时求它要借助于计算机；（2）$n>5$时，方程（1.1.2）可能变为病态；（3）最好能具有紧凑格式的表达式（我们所指的病态方程组，即该方程组的解对于数据的微小变化很敏感。当求解某一个病态方程组时，很小的误差会被扩大而导致其结果包含较大的误差。极端情况下，其解完全失效）。

还有另外一种近似法，从方程（1.1.2）中我们看到各系数$a_0, a_1, \cdots a_{n-1}$必须为y_i的线性组合。最一般的表达式是用每一个y_i和一个含x的（$n-1$）次多项式乘积的线性组合，即

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} L_k(x)y_k \tag{1.1.3}$$

其中 $L_k(x)$是（$n-1$）次多项式，$k=1,2,\cdots n$.

现在的问题是如何构造出$L_k(x)$。应当注意到$L_k(x)$与y_k的值无关。因此我们要审慎地选取y_k，以使问题得到简化。特别是

若令 $$y_k=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}$$

那么将方程（1.1.3）代入方程（1.1）中，得出

$$L_j(x_i)=\delta_{ij} \qquad i=1,2,\cdots n \quad (1.1.4)$$

其中 δ_{ij}称为Kronecker符号：

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \qquad (1.1.5)$$

在方程（1.1.4）中，j的选用是任意的，所以，它取任何值，上式均成立。可见$L_j(x_i)$是这样一个（$n-1$）次多项式：当$x_i=x_1,x_2,\cdots x_{j-1},x_{j+1},\cdots x_n$时，$L_j(x_i)=0$；当$x_i=x_j$时，$L_j(x_i)=1$。任何一个$n$次多项式可以被分解为一个常数与$n$个因子（$x-x_l$）的乘积，其中，$x_l$是多项式的根。由于$L_j(x_i)$是（$n-1$）次多项式，且已知其（$n-1$）个根，它必须有如下形式

$$L_j(x)=C_j(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{j-1})$$
$$(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n) \qquad (1.1.6)$$

其中，C_j为常数，其值通过$L_j(x_j)=1$不难确定。于是

$$C_j=(x_j-x_1)^{-1}(x_j-x_2)^{-1}\cdots(x_j-x_{j-1})^{-1}$$
$$\cdot(x_j-x_{j+1})^{-1}\cdots(x_j-x_n)^{-1} \qquad (1.1.7)$$

所以

$$L_j(x)=\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} \qquad (1.1.8)$$

为以后应用方便，引入一个n次多项式

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \qquad (1.1.9)$$

用$F(x)$表示方程（1.1.8），可得

$$L_j(x)=\frac{C_jF(x)}{x-x_j} \qquad (1.1.10)$$

根据定义，对于所需要计算的某些问题，任何一种数值方法均能给出一种近似解。实际上，一般很少需要某一数量的精确值，而总是需要最小允许误差的近似值。因此，需要知道所选的方法是否能给出所要求的精度。用拉格朗日插值法来回答这个问题，假定平滑函数$y(x)$在$x_1,x_2,\cdots x_n$各点给出精确值，则$f(x)$—

$y(x)$是在n个节点处为零的函数。同样，$F(x)$也是在那些节点处为零的多项式。现在考虑函数

$$g(x)=y(x)-f(x)-AF(x) \tag{1.1.11}$$

其中　A为常数。我们根据在某一点x_0，$x_1<x_0<x_n$，使$g(x)=0$的原则选用A。于是，$g(x)$至少具有（$n+1$）个根$x_0,x_1,\cdots x_n$。由于$g(x)$是平滑的函数，则在每一对根之间必然有极小值或极大值。因此，$g'(x)$至少具有n个根，而$g''(x)$至少具有（$n-1$）个根，…，以此类推，$g^{(n)}(x)$至少具有一个根。若令ξ为此根，则$g^{(n)}(\xi)=0$。又由于$f(x)$是一个（$n-1$）次多项式，所以$f^{(n)}(x)=0$。同样对方程（1.1.9）进行微分，我们求得$F^{(n)}(x)=n!$

则
$$g^{(n)}(\xi)=y^{(n)}(\xi)-An!=0 \tag{1.1.12}$$

解出A
$$A=\frac{y^{(n)}(\xi)}{n!} \tag{1.1.13}$$

于是得出

$$y(x)=f(x)+\frac{y^{(n)}(\xi)}{n!}F(x) \tag{1.1.14}$$

其中　$x_1<\xi<x_n$，上式最后一项即为拉格朗日插值法所期望的误差估计值。可以预料，$y^{(n)}(\xi)$值愈大，则函数平滑度愈差，插值误差愈大。同样，从$F(x)$的定义，我们得出节点间距愈大，误差愈大，而且，插值点位于两端点x_1与x_n附近处较位于区间中部所引起的误差为大。这个结论与将要讨论的实例情况是一致的。

下面我们给出几个实例，用来阐述拉格朗日插值法的特性。这些精心选择的实例说明一些重要的概念，在而后讲到其它插值法时也将得到应用。

例1.1　选用e^x，$0<x<1$，作为第一个例子。这是一个平滑函数，选用任何一种插值法都能很好地与它拟合。现仅选三个点即$x_1=0$、$x_2=0.5$和$x_3=1$进行手算，这样做是有益的。由$x_1=0$、$x_2=0.5$、$x_3=1$的插值公式得出

$$f(x)=f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$
$$+f(x_3)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

在 $x=0.25$ 处的插值

$$f(0.25)=1\frac{(-0.25)(-0.75)}{(-0.5)(-1)}+(1.648721)\frac{(0.25)(-0.75)}{(0.5)(-0.5)}$$
$$+(2.718282)\frac{(0.25)(-0.25)}{(1)(0.5)}=0.375000$$
$$+1.236541-0.339785=1.271756$$

函数的精确值为$e^{0.25}=1.2840254$，因此，实际误差是0.0123，或约为1%。

比较误差估计值〔用方程(1.1.14)计算〕与实际误差值将是有趣的。但这样做出现一些困难。首先，我们不知道 ξ 值该选取多大才能满足方程（1.1.14)。为安全起见，可选用给出最大误差估计值的 ξ（假定我们能够找到它！)。更麻烦的问题是所需要的 n 阶导数$y^{(n)}(\xi)$通常很难计算。在本例中，由于函数十分简单，求导并无困难。为了安全，选用 $\xi=1$，估计的误差将是

$$\varepsilon=\frac{e^1}{3!}F(0.25)=\frac{2.71828}{6}(0.25)(-0.25)(-0.75)$$
$$=0.0212$$

这个值约等于实际误差的两倍。实际上不算太坏；有时这种类型的误差估计值比这更差。

整个插值区间 $0<x<1$ 的实际误差如图1.1所示。正如所料，误差在各数据点之间波动，而且均匀分布着（在各数据点上其值为零)。这是非常典型的实例。

在选用更多的节点以前，让我们先讨论怎样用拉格朗日插值法外推求值。在 $x=-0.25$处，求得$f(x)=0.83345$，与$e^{-0.25}$的精确值0.77880比较，误差等于0.055。该值为 $x=0.25$处插值绝对误差的四倍多，若以相对误差表示，其误差更大。十分清楚，拉格朗日插值法用于外推较内插求值将冒更大风险。这是数值分

析中值得重视的一个事实。

对函数e^x用五点插值比用三点插值要好，其结果如图1.2所示。正如所料，误差均较小，仍发生波动分布，误差最大值出现在插值区间两端点附近。这一结论与预料一致。

图1.3给出了e^x的拉格朗日插值法得到的最大误差相对于所用插值节点数的变化曲线。虚线是根据前述的误差估计值方程(1.1.14)绘出的。由图中看出，当n较小时误差估计值与实际值比较一致，但当n较大时，估计值远低于实际值，因为对于较大的n，误差估计值远小于舍入误差（参见附录A中有关舍入误差的简短讨论）。这时，计算中的舍入误差变为主要误差，而误差估计值(不包含舍入误差）则变得没有意义。在计算时若所使用的计算机具有约10^{-7}的相对精度；换句话说，计算结果若能显示七位有效数字，那么所得出的误差值不会小于10^{-7}。如果想得到更高阶的精度，那么数值运算次数和舍入误差将随之增大，实际上，随着n的增大，误差值也相应增大。这就启发我们不能过分强调高精度的计算方法。一名工程技术人员不应该选用精度远高于所用计算机精度的计算方法。否则，不但费用增加，其精度也得不到提高。

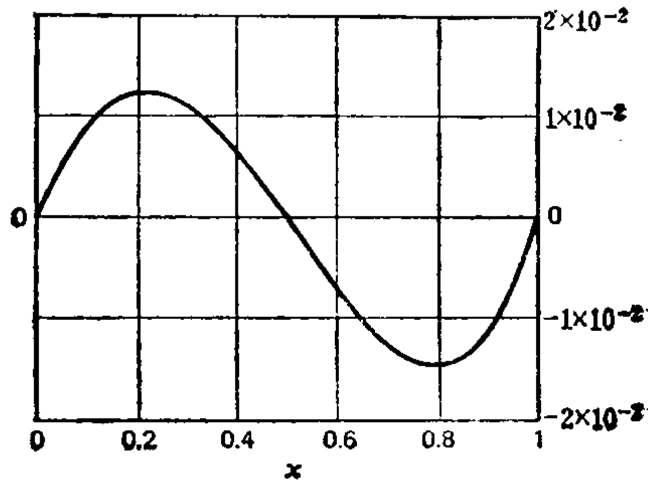

图1.1　函数e^x的三点拉格朗日插值法误差

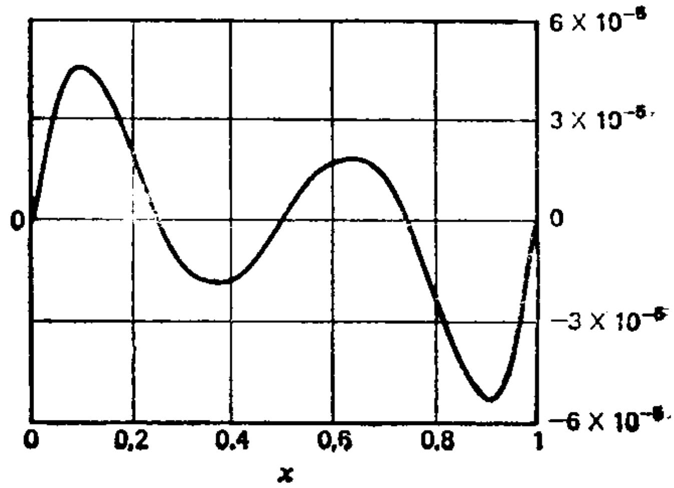

图1.2　函数e^x的五点拉格朗日插值法误差

例1.2　作为第二种情况，我们选用正弦函数$\sin 2\pi x$，在0

$<x<1$ 区间的插值问题，要描述该函数的一个周期至少需要多少个点？注意到，若仅选两个或三个节点，则所给出的误差值均为零（或相位不为零时，则给出另外某一常数），插值法将失去意义。图1.4和图1.5分别给出具有四节点和七节点的结果。其最大误差值远大于指数函数的最大误差值。这正是我们直观预料到的情况——用多项式插值函数拟合波动函数比拟合其它平滑函数要困难得多。

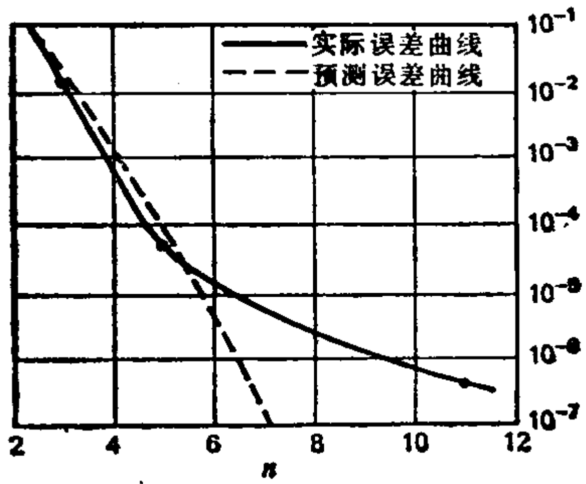

图1.3　函数e^x用拉格朗日插值法的最大误差（相对于插值节点数）㊀

相对于插值节点数的最大误差曲线如图1.6所示，该图显示的变化趋势稍有特殊。所观察到的误差曲线并不是一条平滑曲线。原因是在正弦曲线上节点位置的选择非常重要。这个实例说明，同一种插值法对某种情况是较好的方法，而对另一种情况则可能欠佳。关键在于要选择适用于具体问题的数值计算方法。

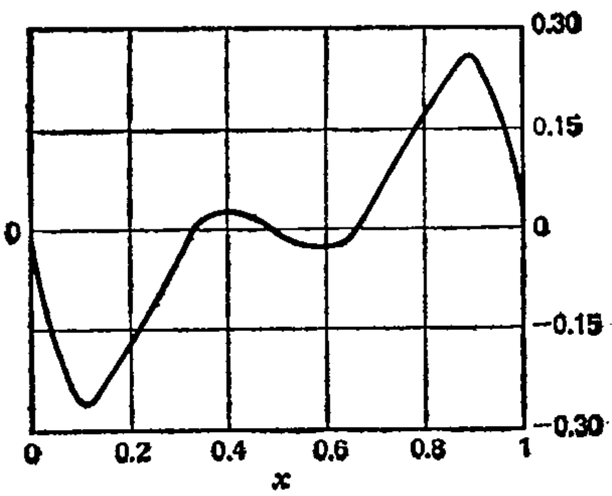

图1.4　函数sin2πx的四点拉格朗日插值法误差

例1.3　第三个例子阐述插值过程中另一种困难问题，即具有密集曲率函数的情况。一个典型的例子是所谓超椭圆方程

$$y=(1-x^m)^{1/m}$$

若$m=2$，该方程表示为一个圆；当m取较大时，曲线几乎

㊀ 原文横坐标误用x，后面类似图形亦然，均已改为n。——译者

表示一个正方形。超椭圆方程被用于圆形截面与正方形截面间的整形。这族曲线的另外一个特征是在$x = 1$处，它们变成了垂线，很难用多项式来表示。对于$m = 2$㊀的圆方程，插值计算误差如图1.7和1.8所示。其误差值仍远大于指数函数的误差值，在这种情况下，误差集中于$x = 1$附近。这正是从该函数特性所能预料到的。从图1.9可以看到，随着节点数的增加最大误差下降得很慢。其原因是在对$x = 1$附近各节点进行插值计算时，使多项式较准确地拟合这一邻域内具有大斜率的曲线是很困难的。正如图中所示，其结果并不令人满意。

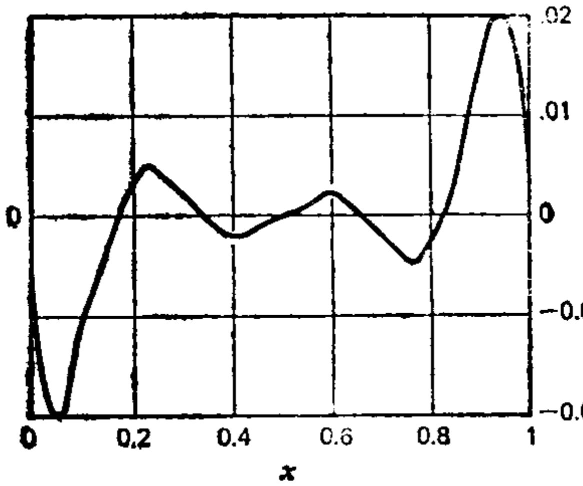

图1.5　函数sin2πx的七点拉格朗日插值法误差

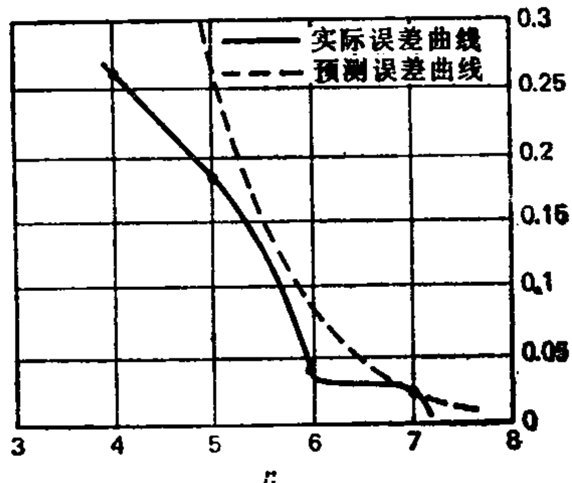

图1.6　函数sin2πx用拉格朗日插值法的最大误差（相对于插值节点数）

对于$m = 4$㊁的情况示于图1.10～1.12，其结果类似于$m = 2$㊂所得出的规律，但是，误差更加增大。而且更集中在曲率大的区域内，随着节点数增加，其最大误差曲线愈加缓慢下降。

由于误差被集中在$x = 1$的附近，我们期望选用不等距网格点，使$x = 1$的邻域内有较多的节点，以提高插值的精度。但事实上改进并不十分明显。而应用分段拉格朗日插值法却能获得很

㊀　原书误写为$n = 2$。——译者

㊁　原书误写为0.8。

㊂　原书误写为$n = 4$，$n = 2$。——译者

大的改善。我们选用低阶多项式分段拟合来代替用一个单一的高阶多项式对整个曲线的拟合。这种方法具有很大的灵活性，当在大曲率或高斜率的那些区段采用小节距，计算的结果一般较为满意。最简单的分段拉格朗日插值法就是惯用的分段线性插值法(又称连点法)。正如以后将指出的结论，分段拉格朗日插值法奠定了许多最常用的数值计算方法的基础。

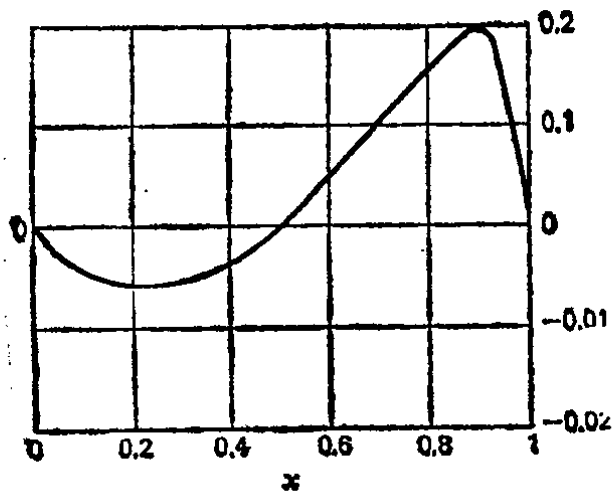

图1.7　函数 $(1-x^2)^{1/2}$的三点拉格朗日插值法误差

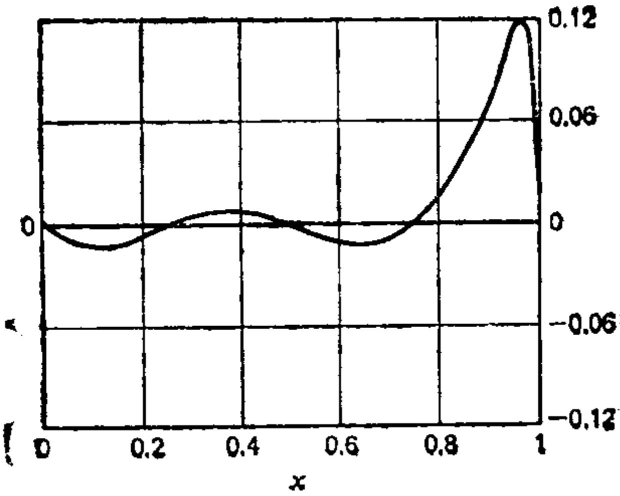

图1.8　函数 $(1-x^2)^{1/2}$的五点拉格朗日插值法误差

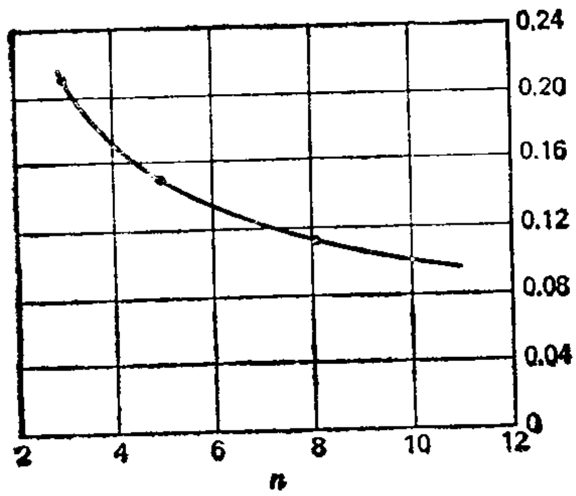

图1.9　函数 $(1-x^2)^{1/2}$用拉格朗日插值法的最大误差（相对于插值节点数）

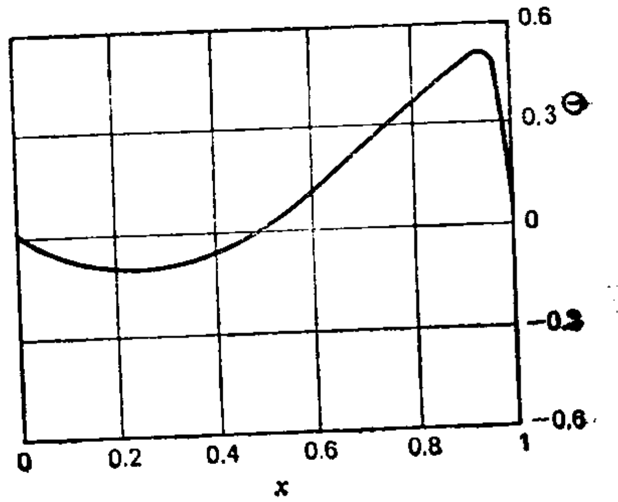

图1.10　函数 $(1-x^4)^{1/4}$的三点拉格朗日插值法误差

以上这些例子说明了多项式插值法的许多重要特性。插值曲线势必在精确值附近上下波动，逼近平滑函数较逼近波动函数或