怎样解概率题

赵振威　范叙保　编著

北京师范大学出版社

怎样解概率题

赵振威　范叙保　编著

北京师范大学出版社

怎 样 解 概 率 题

赵振威　范叙保　编著

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

七二二六印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：7.875　字数：166千

1986年7月第1版　1986年7月第1次印刷

印数：1—25,000

统一书号：13243·87　定价：1.45元

内 容 提 要

本书试图从概率论的基础知识入手，从初学者的实际需要出发，通过对若干有代表性的例题的分析和解答，介绍解题的思路及解答各类典型题的具体规律，并提供一些常用的解题技能和技巧。全书共分六章：如何计数、事件和概率、古典概率的计算方法、几何概率的计算方法、条件概率和独立事件、随机变量。书中例题除解答外，一般还附有思考方法以及评注。各章末安排了一定数量的练习题，并在书末给出答案或提示。

本书可作为大专院校师生，中学数学教师和高中生，自学青年参考书。

基础知识和灵活的技能技巧。

就学习方法而论，初学者往往缺少以科学的思维方法作指导，解题时习惯于简单模仿，以为问题得解就万事大吉，忽视积累解题经验、总结解题规律。因而常常事倍功半，纵然头脑里装了一大堆定义和定理，也会如乱麻一团，理不出头绪，甚至连入径的门路也找不到。

唯物辩证法告诉我们，一切客观事物都是互相联系的和具有内部规律的。解答概率题，也是有端倪可辨，有规律可寻的。本书试图从概率论的基础知识入手，从初学者的实际需要出发，通过对若干有代表性例题的分析和解答，介绍解题的思想方法，给出解答各类典型概率题的具体规律，并提供一些常用的解题技能和技巧。在例题的安排上，力求体现一条斜线，由浅入深，由简单到复杂，组成一个结构紧密的知识网络。为了便于读者阅读和思考，书中的例题一般都附有思考方法，分析解题思路。并以评注的形式，对例题作进一步的探讨。根据例题的不同特点，在评注中有的侧重于介绍解题的有关基础知识；有的通过比较各种解法的优缺点，沟通知识间的内在联系；也有的是指出例题的特殊情形或一般形式，启示灵活运用例题的途径和进一步思考的问题。各章还安排了一定数量富有思维的练习题，供读者练习思考。

解答概率题是一个既有法，有时又无定法的问题，限于作者的学识和水平，缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正。本书如果能在入门引路，指导读者掌握解题方法，提高解题能力方面有所裨益，则将为之感到欣慰。

作　者　　一九八四年一月

目　录

第一章　如何计数

计数是解答概率题的一项重要基础知识。从一定意义上说，只有正确地数清各种可能情形，才能顺利地进行概率计算。

计数的基本工具，主要是两个基本原理和排列、组合方法。本章从加法原理和乘法原理入手，系统地讨论概率计算中常用的排列、组合应用题，分析基本类型，总结解题思路。

一、两个基本原理

加法原理和乘法原理是计数的两个基本原理，在配合、划分、抽样和建立模型等问题中，都有着广泛的应用。

加法原理和乘法原理，就具体内容而论，它们都比较简单；而从实际应用来说，却常常容易混淆。正确解题的关键，在于从实际问题的对比中，弄清两个基本原理的本质区别和适用范围。

例 1　开明戏院有前座 700 张，后座 500 张，问：

(1) 如果选购一张戏票，有多少种选法？

(2) 如果前、后座各选购一张，有多少种选法？

思考方法　选购一张戏票，可以选前座，也可以选后座；前座的 700 张中可以任选其一，后座的 500 张中也可以任选其一。也就是说，完成购票事件有两类办法，第一类办

法中有700种方法，第二类办法中有500种方法，各类办法中的每一种方法，都能达到完成事件的目的。所以可用加法原理求解。

前、后座戏票各一张，有个搭配问题。前座中的任何一张，都可与后座的任何一张搭配。选购前座和后座，可以看作两个步骤，第一步有700种方法，第二步有500种方法，两步依次连续完成，事件才算完成。因此，可用乘法原理求解。

解 （1）依加法原理，不同的选法有

$$700+500=1200\text{（种）}.$$

（2）依乘法原理，不同的选法有

$$700\times500=350000\text{（种）}.$$

评注 从本题可以看出，解题中何时用加法原理，何时用乘法原理，是由问题的性质和要求所决定的。概括起来，有

如果完成一事件有 n 类办法，每类办法有若干种不同的方法，而这些办法彼此是互相独立的，即不论用哪一类办法中的哪一种方法都能达到完成这一事件的目的，那么用加法原理求解，完成这事件的方法数就是各类办法的方法数之和。

如果完成一事件必须分几个步骤，每个步骤可以有若干种不同的方法，而这些步骤是互相依赖的，只有依次连续完成各个步骤，这一事件才算完成，那么用乘法原理求解，完成这事件的方法数就是各步骤的方法数之积。

例2 有不同的数学参考书6本，不同的物理参考书4本，不同的化学参考书3本。从中取出2本不同学科的参考书，有多少种不同的取法？

思考方法 2本不同学科的参考书，可以从数学、物理参考书中各取1本，也可以从物理、化学或化学、数学参考书中各取1本得到。这就是说，完成这一事件有3类办法，每一类办法中的每一种方法，都能达到完成事件的目的。所以，解答本题的途径是：先依乘法原理算出各类办法的方法数，再依加法原理推求不同取法的种数。

解 依加法原理和乘法原理，不同的取法有

$$6\times4+4\times3+3\times6=54\text{（种）}.$$

评注 本题是需要联合运用加法原理和乘法原理解答的抽样问题。解答这类问题，关键是细心审题，深入分析题中的各种数量关系，把原题分解成若干个能用加法原理或乘法原理求解的简单问题。

作为练习，读者可以在本题的基础上，深入考察下列问题：

有不同的数学参考书6本，不同的物理参考书4本，不同的化学参考书3本。按下述要求取书，有多少种不同的取法：

(1) 任取2本数学参考书；

(2) 任取2本参考书；

(3) 取出2本参考书，其中至少有一本是数学参考书；

(4) 取出2本参考书，其中至多有一本是数学参考书。

（答案：(1)15；(2)78；(3)57；(4)63.）

例3 在我国古代的历书中，把顺序排列着的甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸叫做天干；子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥叫做地支。人们从天干和地支的第一个元素开始，依次把一个天干和一个地支配合起来，以用来纪年，如甲子、乙丑、丙寅、…等等。问共有

多少种不同的配合？

思考方法 审题时要仔细体会“依次”的含义。这里天干有 10 个元素，地支有 12 个元素，也就是都有偶数个元素。所以依次地把一个天干和一个地支配合时，奇数位上的天干元素只能和奇数位上的地支元素相配合，偶数位上的天干元素只能和偶数位上的地支元素相配合。于是原题实际上就是问：从“甲、丙、戊、庚、壬”中任选一个排在首位，“子、寅、辰、午、申、戌”中任选一个排在末位；又从“乙、丁、己、辛、癸”中任选一个排在首位，“丑、卯、巳、未、酉、亥”中任选一个排在末位，共有多少种不同排法。经过这样的分析，本题就容易解出。

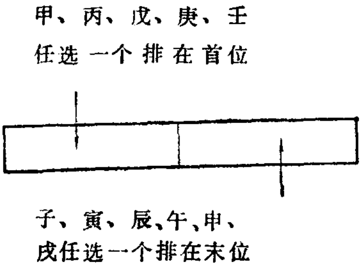


图 1-1

解 依题设条件，不同的配合可分为两类：

1°奇数位上的任一个天干元素和奇数位上的任一个地支元素相配合，依乘法原理（图 1-1），不同的配合有

$6\times5=30$（种）。

2°偶数位上的任一个天干元素和偶数位上的任一个地支元素相配合（图 1-2），不同的配合有

$6\times5=30$（种）。

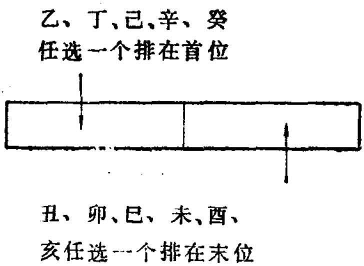


图 1-2

由于 1°、2° 两类配合是互不相干的，依加法原理，不同的配合共有

$$30+30=60\text{（种）}.$$

评注 解答本题时容易产生这样的错误：以为10个天干元素中任取一个，有10种方法；12个地支元素中任取一个，有12种方法，两相配合，依乘法原理，不同的配合方法有 $10\times12=120$（种）。产生错误的原因，主要是审题时忽视了“依次”的含义。这就告诉我们，只有充分审题，才有可能得到正确的解法。

例3给出了我国古代历书上的纪年方法。从结果可知，这种纪年经过六十年一个轮换。我国历史上的一些重大事件，常以这种纪年记载。例如，甲午战争、庚子风云、戊戌政变、辛亥革命等等。可见我国古代劳动人民，早就创造性地运用了有关配合的知识。

二、排　　列

排列和组合是计数的两个基本工具，在概率计算中有着广泛的应用。本节旨在讨论排列问题的解题规律。

排列问题，按照其元素的不同情况，可分为相异元素不许重复的排列问题、相异元素允许重复的排列问题和不尽相异元素的排列问题等三类；按照其排成的不同形状，可分为线状排列和环状排列两类。从排列的知识结构来看，相异元素不许重复的线状排列，是整个排列问题的基础。

解答排列（组合）应用题，一般包括三个相互联系的步骤：

1. 审题

审题，主要是弄清问题的题意，分析问题的条件，肯定问题的性质。它是解答应用题的基本出发点。

为此，必须深刻理解排列和组合的定义，正确判定所给应用题是排列问题，还是组合问题。排列和组合的区别，从定义上看是比较简单的，排列与元素的顺序有关，组合与元素的顺序无关。在处理实际问题时，可以从给定的一群元素里，按照问题的要求和条件，先确定某一种处理情况，然后交换这一处理情况中任意两个元素的位置进行观察。如果通过交换位置，使这一处理情况发生变化，说明它与顺序有关，便是排列问题；否则，便是组合问题。

2． 组题列式

组题列式，这是在审题的基础上，根据题设的条件和要求，把原题分成若干个比较简单的部分，找出它们之间的内在联系，并根据排列（组合）的定义，列出算式，确定演算步骤。

组题列式的基本原则，主要是不遗漏、不重复。也就是说，在解题时要对问题作周密的考察，使算式中包含的排列（组合）情形，与题设要求的排列（组合）情形完全一致，既不遗漏，又不重复。

有些结构比较复杂的应用题，对于题设的某些元素，或排列中的某些位置，常常带有若干特定的附加条件，在数学中，一般称之为特殊元素或特殊位置问题。求解这类问题，通常有两条基本思路：

（1） 直接法（求和法）。对特殊元素或特殊位置尽先处理，直接求出满足题设条件的种数。

（2） 间接法（求差法）。先撇开附加条件求出一个总

数，再扣除不合题意的种数。

有时，还可以把直接法和间接法结合起来使用，以尽快谋取合理的解题途径。

3. 计算作答

计算作答，这是根据所列出的式子，正确地进行计算，并给出原题的答案。

例 1 某厂技术科有 30 名技术人员，如果从中选调 10 名分别加强 10 个车间，问有多少种不同的分配方法？

思考方法 题设的数据较大，不便于把问题看清楚。为此，我们不妨用小的数目试一个特殊情况；比如先考察下面的简化问题：

某厂技术科有 5 名技术人员，如果从中选调 3 名分别加强 3 个车间，问有多少种不同的分配方法？

为了便于分析，我们把 5 名技术人员分别记作 a，b，c，d，e；3 个车间记作 1，2，3。由于只有三个车间能分配到技术人员，可以划分出三个位置，并在这三个位置的下面固定 1，2，3（图1-3）。

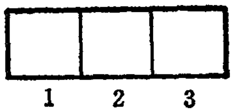


图 1-3

从 a，b，c，d，e 中，任意取出三名技术人员 a，b，d 排在这三个位置上，如图 1-4[1] 所示，表示 a 到 1 车间，b 到 2 车间，d 到 3 车间，它对应于一种分配方法；如果调换 b，d 的位置，如图 1-4[2]，则表示 a 到 1 车间，d 到 2 车间，b 到 3 车间，它对应于另一种分配方法。可见元素相同（都是 a，b，d），顺序不同，对应的分配方法也不同，这是一个排列问题。

a	b	d
1	2	3

〔1〕

a	d	b
1	2	3

〔2〕

图 1-4

经过上面的分析，就可把简化问题归结为从五个元素里，每次取出三个元素，按照一定顺序排成一列，求所有的排列种数的问题。由于简化问题与原题的结构完全一样，所以原题也就不难解出。

解 原题可归结为从 30 个元素里，每次选取 10 个元素的排列问题。所以，不同的分配方法有

$$\begin{aligned} P_{30}^{10} &= 30\times 29\times\cdots\times 21 \\ &= 109027350432000\ (\text{种}). \end{aligned}$$

评注 例 1 是排列中的简单问题。解答这类问题的关键，在于把问题正确地归结为排列问题，并分辨出排列数 P_n^m 中的 n 和 m。

由于排列数公式是由乘法原理推得的，所以排列问题也常常可以直接用乘法原理来求解。对于例 1，设 10 个车间的代号分别为 1，2，…，10，则 1 车间从 30 名技术人员中任选一名，有 30 种方法；2 车间从剩下的 29 名技术人员中任选一名，有 29 种方法；…；10 车间从最后剩下的 21 名技术人员中任选 1 名，有 21 种方法。10名技术人员选好，事件完成。依乘法原理，不同的分配方法有

$$30\times 29\times\cdots\times 21 = 109027350432000\ (\text{种}).$$

例 2 用 0 到 9 这十个数字，可以组成多少个没有重复数字的四位偶数？

思考方法 这是一个典型的特殊元素的排列问题。题中的附加条件是“没有重复数字的四位偶数”，它包含三层意思：一是数字不重复取用；二是数字 0 不能排在千位上；三是数字 0 、2、4、6、 8 之一必须排在个位上。据此，我们可以通过适当的划分，把原题转化为几个简单问题。

如果从个位上的数字入手，四位偶数可分为

$$\text{四位偶数}\begin{cases}\text{个位是 0 的四位偶数}\\ \text{个位是 2 、 4 、 6 、 8 的四位偶数}\end{cases}$$

由此可得解法一、二。

如果从千位上的数字入手，四位偶数可分为

$$\text{四位偶数}\begin{cases}\text{千位是 1 、 3 、 5 、 7 、 9 的四位偶数}\\ \text{千位是 2 、 4 、 6 、 8 的四位偶数}\end{cases}$$

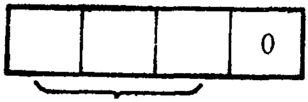
这样，就有解法三。

也可以从四位数入手来划分，有

$$\text{四位数}\begin{cases}\text{四位奇数}\\ \text{四位偶数}\end{cases}$$

从而又可得解法四。

解法一 当个位排 0 时，十位、百位、千位上的数字可从 1 到 9 这九个数字中任取三个来排(图 1-5)，所以个位是 0 的四位偶数有 P_9^3 个。



1-9选三个排在这三个位置上有 P_9^3 个

图 1-5

当个位排 2 、4、6、 8

中的任一个时，个位有 4 种排法；千位有 8 种排法（除去个位上已排定的那个数字及 0），中间有 P_8^2 种排法（除去个位、千位上已排定的两个数字）。因此，依乘法原理，个位是 2、4、6、8 的四位偶数有 $4 \cdot 8 \cdot P_8^2$ 个。

这样，依加法原理，可以组成的没有重复数字的四位偶数有

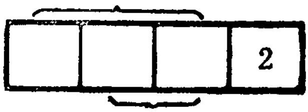
$$P_9^3 + 4 \cdot 8 \cdot P_8^2 = 2296\ (个).$$

解法二 依解法一，个位是 0 的四位偶数有 P_9^3 个。

又当 2 排个位时，十位、百位、千位上有 P_9^3 种排法，其中 0 排在千位上的有 P_8^2 种排法，所以个位是 2 的四位偶数有 $(P_9^3 - P_8^2)$ 个（图 1-6）。显然，4、6、8 排个位时也有相同的情况。

0、1、3、4、5、6、7、8、9

选三个排在这三个位置有 P_9^3 个



1、3、4、5、6、7、8、9 选

两个排在这两个位置有 P_8^2 个

图 1-6

因此，能组成的四位偶数有

$$P_9^3 + 4(P_9^3 - P_8^2) = 2296(个).$$

解法三 先考察千位是奇数的四位偶数。千位有 5 种排法（1，3，5，7，9 中的任一个），个位有 5 种排法（0，2，4，6，8 中的任一个），中间有 P_8^2 种排法。所以，千位是奇数的四位偶数有 $5 \cdot 5 \cdot P_8^2$ 个。

再来看千位是偶数的四位偶数。千位有 4 种排法（2，4，6，8 中的任一个），个位有 4 种排法（0，2，4，6，8 中除去千位上已排定的那个数字），中间有 P_8^2 种排法。于是，千位是偶数的四位偶数有 $4 \cdot 4 \cdot P_8^2$ 个。