高等学校教学用书

空间啮合原理及应用

（上 册）

胡来瑢 编

煤炭工业出版社

内 容 提 要

本书包括三篇，分上、下册出版。

第一篇为空间啮合数学基础，包括向量运算、矩阵及坐标变换、曲线论、曲面论和包络论等。这是用现代解析方法研究空间啮合问题的基本数学工具。

第二篇为空间啮合基本理论，包括相对运动、共轭曲面、诱导法曲率、平面啮合和多自由度啮合等。这是研究空间啮合问题的基础理论。平面啮合可视为空间啮合的特例。

第三篇为空间啮合理论的应用，包括圆弧齿圆柱蜗杆副、直线齿环面蜗杆副、斜平面二次包络环面蜗杆副、角修正直平面二次包络环面蜗杆副、圆弧点啮合圆柱齿轮副以及弧齿锥齿轮副等。这是空间啮合理论在各种齿轮传动中的应用，也是理论联系实际的重要体现。

本书为高等院校机械工程学科研究生的教学用书，也可作本科同类专业高年级学生开设选修课程使用。对于工厂、科研单位从事齿轮研究的工程技术人员也有参考价值。

责任编辑　王 树 范

高等学校教学用书

空间啮合原理及应用

上　册

胡来瑢编

*

煤炭工业出版社　出版

（北京安定门外和平里北街21号）

煤炭工业出版社印刷厂　印刷

新华书店北京发行所　发行

*

开本787×1092mm 1/16　印张16 1/2

字数391千字　印数1—1,470

1987年10月第1版　1987年10月第1次印刷

ISBN 7-5020-0019-4/TD·20

统一书号15035·2932　定价2.75元

前　　言

空间啮合理论是用现代解析方法研究齿轮传动啮合性能的基础，也是设计新齿形齿轮传动和研究其他共轭曲面问题的依据。随着生产和科学技术的进步，世界各国都在探索新的啮合方式，从而推动了空间啮合理论的研究和发展。

近年来，由于许多高等院校、科研单位以及广大科学技术人员的共同努力，我国在空间啮合理论的研究方面已经摆脱了长期处于落后状态的局面，达到了世界先进水平。

在空间啮合理论的研究中，由于采用不同的数学工具和处理方法，国内外形成多种学派。本书从中精选和整理最基本的研究成果，使之成为较系统的、理论和应用并重的教学用书。

本书是为高等院校机械工程学科研究生的教学需要而编写的，也可供本科同类专业高年级学生开设选学课程使用。

坐标变换是研究空间啮合问题的重要工具，为把空间标架底矢的变换运算和点向量坐标的变换运算系统化，书中将坐标的旋转变换与平移变换分开表述，并引用了向量和矩阵的代数运算方法。这对初学读者会有很大方便。

本书收集了国内外大量的文献和资料，在此特向这些作者表示诚挚的敬意，同时对支持编写和出版本书的国内同行学者表示衷心的感谢。

由于时间短促和水平所限，书中难免有缺点和欠妥之处，敬请读者批评指正。

编　　者

一九八六年元旦

目　录

第二篇　空间啮合基本理论

第一篇　空间啮合数学基础

第一章　向　量　运　算

第一节　向　量　代　数

一、向量的坐标表示

自然界存在着多种不同的量，如数量、向量、张量等。数量只有大小，可用数值表示，又称纯量，如体积、温度、电量等。向量既有大小又有方向，又称矢量，如力、位移、速度等。张量是更复杂更广义的量，如应力张量等。当向量的大小等于1时，称为单位向量，又称单位矢或么矢。如向量只有大小和方向，而无位置要求，就称为自由向量。当向量既有大小和方向，又有固定位置要求时，称为点向量或位置向量。

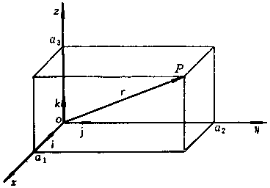

图 1-1

设在欧氏三维空间任取一右手直角坐标系 $Oxyz$，用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 表示沿坐标轴 x、y、的单位向量，如图1-1所示。由 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 构成的直角坐标系又称为标架，通常用 σ 表示，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 称为标架底矢。

由 σ 中任取一点 P，该点对坐标原点 O 的径矢 $\boldsymbol{r}$ 称为 P 点的位置向量或点向量，设用 a_1、$_2$、a_3 依次表示径矢 $\boldsymbol{r}$ 在坐标轴 x、y、z 上的投影，有

$$\boldsymbol{r} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

式（1-1）表明，在直角坐标系中，径矢 $\boldsymbol{r}$ 可分解为三个分量，其中 a_1、a_2、a_3 分别为这三个分量的大小。

二、向量的和与差

设向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$$

这两个向量的和与差为

$$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = (a_1 \pm b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 \pm b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 \pm b_3)\boldsymbol{k} \tag{1-2}$$

两个向量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的和或差可按平行四边形法则相加或相减，如图1-2所示，有

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$$
$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C}$$

式中　$\boldsymbol{C}$ 是以向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{A}$ 和（$-\boldsymbol{B}$）为边的平行四边形的对角线向量。

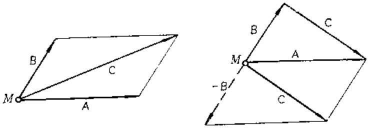

图 1-2

三、二个向量的数积

1．向量数积的定义

设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$为两个任意向量，它们的数积为向量$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$的模$|\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{B}|$及其夹角余弦的乘积，又称为内积或点积，用$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$表示，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\cos\theta \tag{1-3}$$

式中，θ为向量$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$之间的夹角，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$。

2．平行向量的数积

当$\boldsymbol{A}\parallel\boldsymbol{B}$时，$\theta=0°$，令$\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{A}$，代入式（1-3），有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\lambda\cdot\boldsymbol{A}^2=\lambda|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}|\cos0°=\lambda\cdot|\boldsymbol{A}|^2$$

设$\boldsymbol{A}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，代入上式，得

$$\boldsymbol{A}^2=|\boldsymbol{A}|^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2 \tag{1-4}$$

因而，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$可表示为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\lambda\cdot\boldsymbol{A}^2=\lambda|\boldsymbol{A}|^2=\lambda(x_1^2+y_1^2+z_1^2) \tag{1-5}$$

令$\boldsymbol{a}_0$为$\boldsymbol{A}$的单位向量，设$\boldsymbol{a}_0=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}$，有

$$\boldsymbol{A}=A\cdot\boldsymbol{a}_0 \tag{1-6}$$

利用式（1-4），得

$$\boldsymbol{a}_0^2=|\boldsymbol{a}_0|^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2=1 \tag{1-7}$$

3．垂直向量的数积

当$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$时，$\theta=90°$，代入式（1-3），有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\cos90°=0 \tag{1-8}$$

可见，两向量相互垂直的条件是它们的数积等于零。

4．向量数积的坐标表示

设$\boldsymbol{A}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$　$\boldsymbol{B}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，当向量$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$之间的夹角为$\theta$时，向量$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$的数积可用坐标表示为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \tag{1-9}$$

5．任意么矢的数积

设$\boldsymbol{a}_0$和$\boldsymbol{b}_0$分别为向量$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$的么矢，有

$$\boldsymbol{a}_0=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|},\qquad \boldsymbol{b}_0=\frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}$$

利用式（1-3），得

$$\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{b}_0=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}=\cos\theta \tag{1-10}$$

即两么矢的数积等于它们夹角的余弦。

6．标架底矢的数积

设$\sigma=[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$，利用式（1-7）和式（1-8），得

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1\\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0\end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

7．任意么矢和标架底矢的数积

设任意么矢$\boldsymbol{a}_0$与标架底矢$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$的夹角分别为α、β、γ，令$\boldsymbol{a}_0=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}$，由式（1-10）得

$$\left.\begin{aligned}x_0=\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{i}=\cos\alpha\\ y_0=\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{j}=\cos\beta\\ z_0=\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{k}=\cos\gamma\end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

因而，在σ中，单位向量$\boldsymbol{a}_0$又可表示为

$$\boldsymbol{a}_0=[\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma] \tag{1-13}$$

8．向量和并矢的数积

两个向量相并列称为并矢。设由三个向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$任取二个向量相并列，便组成以下形式的并矢：

$$\boldsymbol{ab},\ \boldsymbol{bc},\ \boldsymbol{ca},\ \boldsymbol{ba}\cdots\cdots$$

并矢中前一个向量称为前元或前元矢，后一个向量称为后元或后元矢。

并矢是两个向量并列的一种排列方式，几个并矢符号的和称为并矢式，如

$$\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}$$

向量与并矢的数积或并矢与向量的数积，规定以下运算法则：

当把向量与并矢式作数积运算时，就是把向量与并矢式中的前元向量作数积，并把该数积作为对应的后元向量的系数求向量和，如

$$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2)=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{b}_1+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{b}_2 \tag{1-14}$$

当把并矢式与向量作数积运算时，就是把并矢式中的后元向量与向量作数积，并把该数积作为对应的前元向量的系数求向量和，如

$$(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2)\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}_1+(\boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}_2 \tag{1-15}$$

以上两种运算结果都是向量，但向量与并矢的数积和并矢与向量的数积一般是不同的，它们的顺序是不能随意调换的。例如，从以上两种运算法则知

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{ab}\\ \boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{ba}\end{aligned}\right\} \tag{1-16}$$

同样，对于并矢式，有

$$(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2)\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_2) \tag{1-17}$$

但是，当并矢中的前元和后元是同一个向量时，有

$$(\boldsymbol{aa}+\boldsymbol{bb})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{aa}+\boldsymbol{bb}) \tag{1-18}$$

向量与并矢的数积运算在研究曲面理论和共轭曲面问题中得到广泛的应用。

四、二个向量的矢积

1．向量矢积的定义

设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为两个任意向量，它们的矢积是一个新的向量，其大小等于$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$的模$|\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{B}|$和它们夹角正弦的乘积，方向垂直于$\boldsymbol{A}$及$\boldsymbol{B}$，而且与$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$组成右手系，如图1-3所示。向量的矢积又称为外积或×积，一般用$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$表示。

设θ为向量$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$之间的夹角，$\boldsymbol{n}$为同时垂直于$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$的单位向量，并与$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$组成右手系，向量$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$的矢积$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$可表示为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\sin\theta)\boldsymbol{n} \tag{1-19}$$

式中　$0\leqslant\theta\leqslant\pi$。

根据向量矢积的定义，有

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\sin\theta \tag{1-20}$$

可见，矢积$A\times B$的模等于以A、B为边的平行四边形的面积。

2．平行向量的矢积

当$A\parallel B$时，$\theta=0°$，代入式（1-19），有

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\sin0°)\boldsymbol{n}=0 \tag{1-21}$$

可见，两向量平行的条件是它们的矢积等于零。

3．垂直向量的矢积

设$\boldsymbol{A}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，　$\boldsymbol{B}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，当$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$时，$\theta=90°$，代入式（1-19），得

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin90°)\boldsymbol{n}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{n}$$

或表示为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\sqrt{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)}\boldsymbol{n} \tag{1-22}$$

4．标架底矢的矢积

设$\sigma=[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$，有

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0\\&\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\end{aligned}\right\} \tag{1-23}$$

5．向量矢积的坐标表示

设$\boldsymbol{A}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，　$\boldsymbol{B}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，在$\sigma=[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$中，有

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix} \tag{1-24}$$

或表示为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(y_1z_2-y_2z_1)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\boldsymbol{k}$$

6．向量的平移和向量矩

如图1-4所示，将空间任一向量$\boldsymbol{\Omega}$由K点平移到O点，得一新的向量$\boldsymbol{\Omega}'$和向量矩$\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{\Omega})$。这个新向量$\boldsymbol{\Omega}'$与原向量$\boldsymbol{\Omega}$大小相等且方向相同，即$\boldsymbol{\Omega}'=\boldsymbol{\Omega}$。设$K$点对$O$点的径矢用$\boldsymbol{r}_k$表示，该向量矩$\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{\Omega})$可表示为

$$\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{\Omega})=\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{\Omega} \tag{1-25}$$

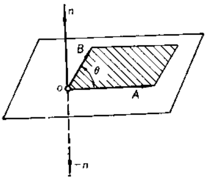

图 1-3

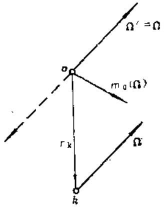

图 1-4

可见，当向量平移时，新向量的大小和方向与原向量相同，且与平移点位置的选择无关，而向量矩的大小和方向随平移点位置不同而改变。

五、向量代数运算律

设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$为任意向量，λ、μ为任意纯量，向量代数的基本运算符合以下规律：

1．结合律

$$\left.\begin{aligned}&\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}\\&(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\\&(\lambda\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}=\lambda(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\\&(\lambda\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B}=\lambda(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\end{aligned}\right\}\tag{1-26}$$

2．交换律

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\\&\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}\end{aligned}\right\}\tag{1-27}$$

必须指出，向量的矢积运算不符合交换律，即$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$。

3．分配律

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}\\&\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}\\&\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\\&\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}\end{aligned}\right\}\tag{1-28}$$

六、三个向量的混合积

1．向量混合积的定义

设$\boldsymbol{r}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{r}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{r}_3=x_3\boldsymbol{i}+y_3\boldsymbol{j}+z_3\boldsymbol{k}$为三个任意向量，纯量$\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)$或$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3$称为三个向量的混合积，通常记为$(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)$。利用式(1-9)和式（1-24），三个向量混合积的坐标表示为

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)=\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$$

$$=x_1(y_2z_3-y_3z_2)+y_1(z_2x_3-z_3x_2)+z_1(x_2y_3-x_3y_2)$$

或表示为

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)=\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix} \tag{1-29}$$

2．向量混合积的性质

三个向量的混合积运算有以下性质：

1）混合积中将三个向量依次轮换，混合积的值不变；当其中任意两个向量互换时，混合积的值变号，例如

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)=(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_1)=-(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_3)=-(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_2) \tag{1-30}$$

2）混合积中将“×”和“·”互换，混合积的值不变，例如

$$\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)=-\boldsymbol{r}_3\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_1)=-(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{r}_3=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3 \tag{1-31}$$

3）混合积$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)$的绝对值相当于以$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$为棱的平行六面体的体积；而且，当$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$组成右手系时，$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)>0$，当组成左手系时，$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)<0$。

因而，当$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$共面时，有

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)=0 \tag{1-32}$$

4）混合积中，当有两个向量相同时，混合积的值为零，如

$$\boldsymbol{r}_2\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_2)=0$$

3．标架底矢的混合积

设$\sigma=[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$，有

$$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})=\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1 \tag{1-33}$$

可见，标架底矢的混合积恒等于1。

七、三个矢量的重矢积

设$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$为任意三个向量，向量$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3$称为三个向量的重矢积，其展开式为

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3=(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_2-(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_1 \tag{1-34}$$

在σ中，令$\boldsymbol{r}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{r}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{r}_3=x_3\boldsymbol{i}+y_3\boldsymbol{j}+z_3\boldsymbol{k}$，将$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$代入式（1-34）两端，并按式（1-24）和式（1-9）展开，该式便获得验证。

同理，将重矢积$\boldsymbol{r}_1\times(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)$展开，有

$$\boldsymbol{r}_1\times(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)=-(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)\times\boldsymbol{r}_1=(\boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{r}_2-(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{r}_3$$

设$\lambda_{12}=\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2$、$\lambda_{23}=\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3$、$\lambda_{31}=\boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_1$，代入上式，三个向量的重矢积也可表示为

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3=\lambda_{31}\boldsymbol{r}_2-\lambda_{23}\boldsymbol{r}_1\\ \boldsymbol{r}_1\times(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)=\lambda_{31}\boldsymbol{r}_2-\lambda_{12}\boldsymbol{r}_3\end{aligned}\right\} \tag{1-35}$$

可见，若干向量的重矢积一定是向量，而若干向量的重数积不一定是纯量。

八、向量拉格朗日恒等式

设用任一向量$\boldsymbol{r}_4$与三个向量的重矢积$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3$作数积运算，由式（1-31），有

$$\boldsymbol{r}_4\cdot[(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3]=[(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3]\cdot\boldsymbol{r}_4=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_4)$$

将式（1-34）代入，得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_4)&=[(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3]\cdot\boldsymbol{r}_4\\&=[(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_2-(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_1]\cdot\boldsymbol{r}_4\end{aligned}$$

将右端乘开，便得拉格朗日恒等式，即

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_4)=(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_4)-(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_4)(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3) \qquad (1\text{-}36)$$

当$\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_1$及$\boldsymbol{r}_4=\boldsymbol{r}_2$时，有

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)^2=\boldsymbol{r}_1^2\cdot\boldsymbol{r}_2^2-(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2)^2 \qquad (1\text{-}37)$$

第二节　向量的回转

一、向量回转的定义式

设空间一点向量$\boldsymbol{A}$绕一单位轴向量ω回转θ角，得一新点向量$\boldsymbol{a}$，如图1-5所示。原向量转角θ的符号按右手定则确定，即迎着ω看去，逆时针回转为正，顺时针回转为负。这种点向量的变换方式称为向量的回转，并表示为

$$\boldsymbol{a}=(\theta\omega)\otimes\boldsymbol{A} \qquad (1\text{-}38)$$

式中　$\otimes$表示向量回转的符号。

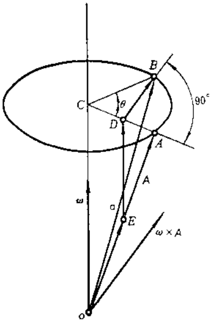

图 1-5

二、向量回转的性质

在向量回转的变换中，根据向量回转的定义可推出新向量$\boldsymbol{a}$和原向量$\boldsymbol{A}$存在以下三个独立的基本性质：

1．原向量$\boldsymbol{A}$绕ω回转为新向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}$或$\boldsymbol{A}$的大小保持不变，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} \qquad (1\text{-}39)$$

2．原向量$\boldsymbol{A}$绕ω回转为新向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}$或$\boldsymbol{A}$与ω的夹角保持不变，即

$$\omega\cdot\boldsymbol{a}=\omega\cdot\boldsymbol{A} \qquad (1\text{-}40)$$

3．原向量$\boldsymbol{A}$绕ω回转为新向量$\boldsymbol{a}$，向量$\omega\times\boldsymbol{a}$与$\omega\times\boldsymbol{A}$的夹角为$\theta$，即

$$\cos\theta=\frac{(\omega\times\boldsymbol{a})\cdot(\omega\times\boldsymbol{A})}{|\omega\times\boldsymbol{a}|\,|\omega\times\boldsymbol{A}|}$$

或表示为

$$\cos\theta=\frac{(\omega\times\boldsymbol{a})\cdot(\omega\times\boldsymbol{A})}{\sqrt{(\omega\times\boldsymbol{a})(\omega\times\boldsymbol{a})}\cdot\sqrt{(\omega\times\boldsymbol{A})(\omega\times\boldsymbol{A})}} \qquad (1\text{-}41)$$

三、新向量和原向量的数积

根据向量的拉格朗日等式（1-36），并将式（1-40）代入，有

$$(\omega\times\boldsymbol{a})\cdot(\omega\times\boldsymbol{A})=(\omega\cdot\omega)(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A})-(\omega\cdot\boldsymbol{A})(\omega\cdot\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A})-(\omega\cdot\boldsymbol{A})^2$$

$$|\omega\times\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\omega\times\boldsymbol{a})(\omega\times\boldsymbol{a})}=\sqrt{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})-(\omega\cdot\boldsymbol{a})^2}$$

$$|\omega\times\boldsymbol{A}|=\sqrt{(\omega\times\boldsymbol{A})(\omega\times\boldsymbol{A})}=\sqrt{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})-(\omega\cdot\boldsymbol{A})^2}$$

将以上各式代入式（1-41），并利用式（1-39）及式（1-40），经整理后得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\cos\theta+(1-\cos\theta)(\omega\cdot\boldsymbol{A})^2 \qquad (1\text{-}42)$$

四、向量回转的展开式

如图1-5所示，取向量$\boldsymbol{A}$、ω和$\omega\times\boldsymbol{A}$作为斜标架，在这个斜标架的三维空间中，新点

向量$\boldsymbol{a}$可表示为这三个向量的线性组合，即

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{A}+a_2\omega+a_3(\omega\times\boldsymbol{A}) \tag{1-43}$$

式中 a_1、a_2、a_3为待定系数。

为确定待定系数，根据图中几何关系，由B点作$\overline{CA}$的垂线，交D点，再由D点作$\overline{OC}$的平行线，交$\overline{OA}$于E点。这时，新点向量$\boldsymbol{a}$可表示为

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}$$

在$\triangle OAC$和$\triangle EAD$中，由于$\overline{ED}\parallel\overline{OC}$，有

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}=\cos\theta$$

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{CA}-\overline{CD}}{\overline{CA}}=1-\frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}=1-\cos\theta$$

因而，得

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}\cdot\cos\theta=\cos\theta\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\overrightarrow{ED}=\overline{OC}\cdot\omega\cdot(1-\cos\theta)=(1-\cos\theta)(\omega\cdot\boldsymbol{A})\omega$$

同时，在$\triangle BCD$中，由于$\overline{BD}\perp\overline{CA}$，有

$$\overline{DB}=\overline{CB}\cdot\sin\theta=\overline{CA}\cdot\sin\theta=|\omega\times\boldsymbol{A}|\cdot\sin\theta$$

得

$$\overrightarrow{DB}=\overline{DB}\frac{\omega\times\boldsymbol{A}}{|\omega\times\boldsymbol{A}|}=\sin\theta\cdot(\omega\times\boldsymbol{A})$$

将$\overrightarrow{OE}$、$\overrightarrow{ED}$和$\overrightarrow{DB}$代入上式，得向量回转的展开式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=(\theta\omega)\otimes\boldsymbol{A}\\&=\cos\theta\cdot\boldsymbol{A}+(1-\cos\theta)(\omega\cdot\boldsymbol{A})\omega+\sin\theta\cdot(\omega\times\boldsymbol{A})\end{aligned} \tag{1-44}$$

将式（1-44）和式（1-43）比较，得

$$\left.\begin{aligned}a_1&=\cos\theta\\a_2&=(1-\cos\theta)(\omega\cdot\boldsymbol{A})\\a_3&=\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{1-45}$$

五、向量回转的运算律

在向量回转变换中，当向量或转角作代数运算时，利用式（1-44）可推得以下运算规律：

1．一点向量绕自身回转，不管转角多大，所得的新点向量与原向量相同，即

$$(\theta\omega)\otimes\omega=\omega \tag{1-46}$$

根据式（1-44），将$\boldsymbol{A}=\omega$代入，该式便可获证。

2．任一点向量$\boldsymbol{A}$先放大m倍再回转与先回转再放大m倍，当转角相同时，所得的新点向量也相同，即

$$(\theta\omega)\otimes(m\boldsymbol{A})=m[(\theta\omega)\otimes\boldsymbol{A}] \tag{1-47}$$

根据式（1-44），将$m\boldsymbol{A}$代入，展开后便可获证。但应注意，将一点向量的转角放大m倍，不等于将原向量回转所得的新点向量放大m倍，即

$$(m\theta\omega)\otimes\boldsymbol{A}\neq m[(\theta\omega)\otimes\boldsymbol{A}]$$

3．两个点向量$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$先加或减再回转与先回转再加或减，当转角相同时，所得的新点

向量也相同，即

$$(\theta\omega)\otimes(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=(\theta\omega)\otimes\boldsymbol{A}\pm(\theta\omega)\otimes\boldsymbol{B} \tag{1-48}$$

根据式（1-44），将（$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}$）代入便可获证。

4．任一点向量$\boldsymbol{A}$绕同一单位轴向量ω先后作几次回转，当总转角相同时，最后所得的新点向量与原向量先后回转的次序和次数无关，即

$$(\theta_1\omega)\otimes[(\theta_2\omega)\otimes\boldsymbol{A}]=(\theta_2\omega)\otimes[(\theta_1\omega)\otimes\boldsymbol{A}]=[(\theta_1+\theta_2)\omega]\otimes\boldsymbol{A} \tag{1-49}$$

根据式（1-44），将式（1-49）两边展开便可获证。

5．当点向量$\boldsymbol{A}$的转角很小时，可将新点向量与原点向量之间的增量简单地视为（$\omega\times\boldsymbol{A})d\theta$，而在ω或$\boldsymbol{A}$的方向上可认为无增量，即

$$(d\theta\omega)\otimes\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+(\omega\times\boldsymbol{A})\cdot d\theta \tag{1-50}$$

根据式（1-44），将$d\theta$代入，并取$\cos(d\theta)\approx1$，$\sin(d\theta)\approx d\theta$，便可获证。

6．任一点向量$\boldsymbol{A}$绕单位轴向量ω先回转再同该轴向量作矢积，与原点向量先同该轴向量作矢积再绕ω回转，当转角相同时，所得的新点向量也相同，即

$$\omega\times[(\theta\omega)\otimes\boldsymbol{A}]=(\theta\omega)\otimes(\omega\times\boldsymbol{A}) \tag{1-51}$$

根据式（1-44），将式（1-51）两边展开便可获证。

7．两个点向量$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$绕同一单位轴向量ω回转同一转角后作数积运算，与这两个向量的数积相等，即

$$[(\theta\omega)\otimes\boldsymbol{A}]\cdot[(\theta\omega)\otimes\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \tag{1-52}$$

根据式（1-44），将式（1-52）两边展开后作数积运算，便可获证。

第三节　向量回转的螺旋运动

一、简单螺旋运动

设一点向量$\boldsymbol{R}$绕一单位轴向量ω回转，同时它的终点又沿ω方向移动。当点向量$\boldsymbol{R}$绕ω回转θ角时，其终点沿ω方向移动的距离为$\sigma(\theta)$，得一新点向量$\boldsymbol{r}$，如图1-6所示。这种点向量的变换方式称为点向量的简单螺旋运动，一般记为[θ，$\sigma(\theta)$]。该新点向量$\boldsymbol{r}$可表示为

$$\boldsymbol{r}=(\theta\omega)\otimes\boldsymbol{R}+\sigma(\theta)\omega \tag{1-53}$$

显然，利用式（1-46）和（1-48），有

$$\boldsymbol{r}=(\theta\omega)\otimes\boldsymbol{R}+\sigma(\theta)\omega=(\theta\omega)\otimes[\boldsymbol{R}+\sigma(\theta)\omega]$$

这表明，任一点向量$\boldsymbol{R}$先绕ω回转再沿ω方向移动，与先沿ω方向移动再绕ω回转，当转角θ和移距$\sigma(\theta)$分别相同时，所得的新点向量也相同。

二、双次螺旋运动

如图1-7所示，设一点向量$\boldsymbol{R}_1$绕一单位轴向量ω_1作简单螺旋运动[θ_1，$\sigma_1(\theta_1)$]，得一新点向量$\boldsymbol{r}_1$，有

$$\boldsymbol{r}_1=(\theta_1\omega_1)\otimes\boldsymbol{R}_1+\sigma_1(\theta_1)\omega_1 \tag{1-54}$$

设在O_2点另取一单位轴向量ω_2，用$\boldsymbol{r}_2$表示$\boldsymbol{r}_1$的终点M_1对O_2点的径矢，令$\xi=\overrightarrow{O_1O_2}$，点向量$\boldsymbol{r}_2$与$\boldsymbol{r}_1$之间的关系为

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1-\xi \tag{1-55}$$

将式（1-54）代入，有

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1-\xi=(\theta_1\omega_1)\otimes\boldsymbol{R}_1+\sigma_1(\theta_1)\omega_1-\xi \tag{1-56}$$

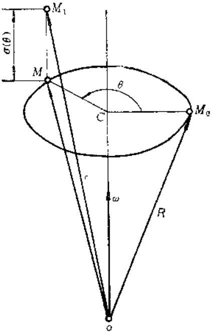

图 1-6

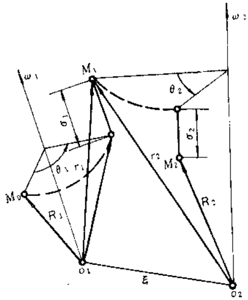

图 1-7

现将点向量$\boldsymbol{r}_2$绕单位轴向量ω_2作又一次简单螺旋运动$[-\theta_2(\theta_1),\ -\sigma_2(\theta_2)]$，得另一新点向量$\boldsymbol{R}_2$为

$$\boldsymbol{R}_2=(-\theta_2\omega_2)\otimes\boldsymbol{r}_2-\sigma_2(\theta_2)\omega_2$$

将式（1-56）代入，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_2&=(-\theta_2\omega_2)\otimes(\boldsymbol{r}_1-\xi)-\sigma_2(\theta_2)\omega_2\\&=(-\theta_2\omega_2)\otimes[(\theta_1\omega_1)\otimes\boldsymbol{R}_1+\sigma_1(\theta_1)\omega_1-\xi]-\sigma_2(\theta_2)\omega_2\end{aligned}\tag{1-57}$$

由于点向量$\boldsymbol{R}_2$是原点向量$\boldsymbol{R}_1$经过两次简单螺旋运动得到的新点向量，这种点向量的变换方式称为双次螺旋运动。

因而，根据式（1-44），向量回转的双次螺旋运动的展开式为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1&=\cos\theta_1\cdot\boldsymbol{R}_1+(1-\cos\theta_1)(\omega_1\cdot\boldsymbol{R}_1)\omega_1+\sin\theta_1(\omega_1\times\boldsymbol{R}_1)+\sigma_1(\theta_1)\omega_1\\\boldsymbol{R}_2&=\cos\theta_2\cdot\boldsymbol{r}_2+(1-\cos\theta_2)(\omega_2\cdot\boldsymbol{r}_2)\omega_2-\sin\theta_2(\omega_2\times\boldsymbol{r}_2)-\sigma_2(\theta_2)\omega_2\end{aligned}\right\}\tag{1-58}$$

显然，当$\sigma_1(\theta_1)=\sigma_2(\theta_2)=0$时，这种双次螺旋运动便转化为向量的双次回转。

〔例1-1〕 试用向量回转法求圆弧回转面上变距螺旋线的向量方程（图1-8）。

〔**解**〕 如图1-8所示，设圆弧回转面Σ上M_0点对O_1点的径矢为$\boldsymbol{R}_1$，当$\boldsymbol{R}_1$绕单位轴向量ω_1回转θ_1角时，所得的新点向量$\boldsymbol{r}_1$为

$$\boldsymbol{r}_1=(\theta_1\omega_1)\otimes\boldsymbol{R}_1\tag{1-59}$$

另设$\boldsymbol{r}_1$的终点M_1对O_2点的径矢为$\boldsymbol{r}_2$，由O_2点沿圆弧回转面的轴线取一单位轴向量ω_2，当$\boldsymbol{r}_2$绕ω_2回转θ_2角时，所得的新点向量$\boldsymbol{R}_2$为

$$\boldsymbol{R}_2=(-\theta_2\omega_2)\otimes\boldsymbol{r}_2$$

式中 $\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1+\xi$，$\xi=\overrightarrow{O_2O_1}$。

将上式代入，有

$$\boldsymbol{R}_2=(-\theta_2\omega_2)\otimes[(\theta_1\omega_1)\otimes\boldsymbol{R}_1+\xi]\tag{1-60}$$

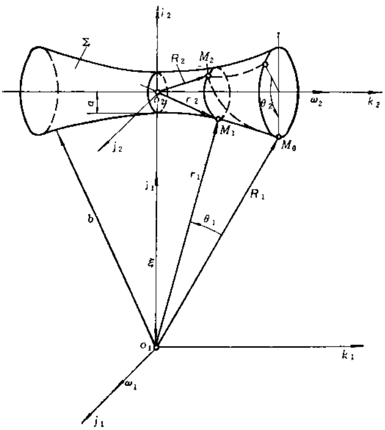

图 1-8

在这种情况下，当$\theta_2=i\theta_1$和$i=\text{const}$时，M_0点在圆弧回转面Σ上将描出一条变距螺旋线。因而，将式（1-59）和式（1-60）展开，得该螺旋线的向量方程为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{r}_1=\cos\theta_1\cdot\boldsymbol{R}_1+(1-\cos\theta_1)(\boldsymbol{\omega}_1\cdot\boldsymbol{R}_1)\boldsymbol{\omega}_1+\sin\theta_1(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{R}_1)\\&\boldsymbol{R}_2=\cos\theta_2\cdot(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{\xi})+(1-\cos\theta_2)[\boldsymbol{\omega}_2\cdot(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{\xi}_1)]\boldsymbol{\omega}_2-\sin\theta_2\cdot[\boldsymbol{\omega}_2\times(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{\xi})]\end{aligned}\right\}\quad(1\text{-}61)$$

第四节　直线和平面的向量表示

一、空间直线

1. 直线的向量方程

如图1-9所示，在$\sigma=[O;\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}]$中，由空间任意给定一点$P_0$和一个非零定向向量$\boldsymbol{V}$，设$P_0$点的径矢$\boldsymbol{r}_0$和向量$\boldsymbol{V}$表示为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_0&=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}\\\boldsymbol{V}&=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}\end{aligned}\right\}\quad(1\text{-}62)$$

为求过P_0点且平行于向量$\boldsymbol{V}$的直线方程，由P_0作一直线L平行于$\boldsymbol{V}$，并在该直线上任取一点P，用$\boldsymbol{r}$表示P点的径矢，直线L的向量方程可表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{V}t\quad(1\text{-}63)$$

式中　t为直线L上P点的参变量。

2. 直线方程的坐标形式

在σ中，设$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，将式（1-62）代入式（1-63），经整理后，得直线方程的坐标形式为

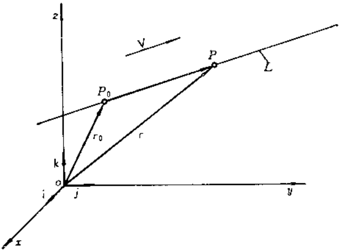

图 1-9

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+Xt\\y&=y_0+Yt\\z&=z_0+Zt\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}64)$$

3. 空间直线的共面条件

设有两条空间直线L_1和L_2，如图1-10所示，给定直线L_1和L_2的向量方程为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1&=\boldsymbol{r}_{01}+\boldsymbol{V}_1t_1\\\boldsymbol{r}_2&=\boldsymbol{r}_{02}+\boldsymbol{V}_2t_2\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}65)$$

式中　$\boldsymbol{r}_{01}$、$\boldsymbol{r}_{02}$——直线L_1和L_2上P_{01}、P_{02}点对O点的径矢；

$\boldsymbol{V}_1$、$\boldsymbol{V}_2$——直线L_1和L_2方向的定向向量；

t_1、t_2——直线L_1和L_2上任一点P_1、P_2的参变量。

显然，作向量$\overrightarrow{P_1P_2}$，这两条直线共面的条件是向量$\overrightarrow{P_1P_2}$与向量$\boldsymbol{V}_1$、$\boldsymbol{V}_2$共面。由于$\overrightarrow{P_1P_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$，根据式（1-32），有

$$(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{V}_1,\ \boldsymbol{V}_2)=0\qquad(1\text{-}66)$$

设
$$\boldsymbol{r}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{r}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{V}_1=X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{V}_2=X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k}$$

代入式（1-29），得

$$(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{V}_1,\ \boldsymbol{V}_2)=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\X_1 & Y_1 & Z_1\\X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}=0\qquad(1\text{-}67)$$

4. 空间相错直线的最短距离

当两条空间直线相错时，它们的最短距离应沿公垂线方向。为确定公垂线的位置，经其中任一条直线作一平面平行于另一条直线，再过另一条直线作一平面垂直于前一个平面。该平面与第一条直线的交点便是公垂线上的一点，再在后一个平面上由该点作第二条直线的垂线，就是这两条直线的公垂线。

显然，空间两相错直线的公垂线必同时垂直于两定向向量$\boldsymbol{V}_1$及$\boldsymbol{V}_2$，即垂直于两定向向量所决定的平面。这表明，两相错直线的公垂线方向可用向量$\boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{V}_2$表示。设用$\boldsymbol{a}_0$表