经济应用数学基础

微 积 分

下 册

苏 醒 主编

中南工业大学出版社

微 积 分

苏 醒 主编

责任编辑：王嘉新

插图编辑：刘楷英

•

中南工业大学出版社出版发行

湘潭市东平印刷厂 印 装

湖 南 省 新 华 书 店 经 销

•

开本：787×1092 1/32 印张：20 字数：463千字

1990年12月第1版 1990年12月第1次印刷

印数：0001—5500

•

ISBN 7-81020-316-9/O·051

上下册共定价：8.00元

目　录

第六章　定积分

一元函数积分学包括了不定积分与定积分两大基本内容。本章讨论定积分。

我们先从几何与力学问题出发，引进定积分的定义，然后讨论它的性质，重点研究它的计算方法及应用。

§6.1　定积分的概念

和导数概念一样，定积分的概念也是由于实际问题的需要而引进的。作为概念的引入，我们先来讨论两个实际问题。

一、求曲边梯形的面积

如图 6-1 所示，在直角坐标系中的一个曲边梯形，它由连续曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、$x=b$ 及X轴围成。现在来求它的面积 S。

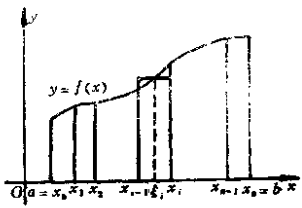

图6-1

由初等几何知识，我们只能求那些由直线段或圆弧所围成的规则平面图形的面积，如三角形、梯形、扇形等。至于由任意曲线所围成的图形，象图 6-1 那样的曲边梯形的面积又怎样求出它呢？难点就在于它有

一条边是不规则的曲边。我们采用下面的方法来解决。

第一步，用分点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i\cdots<x_n=b$把区间$[a, b]$任意分成$n$个小区间：

$[x_0, x_1]$、$[x_1, x_2]$、…、$[x_{i-1}, x_i]$、…、$[x_{n-1}, x_n]$，它们的长度依次为

$\Delta x_1=x_1-x_0$，$\Delta x_2=x_2-x_1$，…，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，…，$\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$。过各分点作x轴的垂线，将曲边梯形分成n个小曲边梯形。设小曲边梯形的面积依次为

$$\Delta S_1,\ \Delta S_2,\ \cdots,\ \Delta S_i,\ \cdots,\ \Delta S_n.$$

在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$（$i=1, 2, \cdots, n$）上任取一点ξ_i（$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$，$i=1, 2, 3, \cdots, n$），以$\Delta x_i$为底，$f(\xi_i)$为高作相应的小矩形，其面积为$f(\xi_i)\Delta x_i$。这样，各小区间上小曲边梯形的面积就近似地等于各相应的小矩形的面积，即

$$\Delta S_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$$

这叫做“以直代曲”。

第二步，将各小矩形的面积求和，得所求曲边梯形面积的近似值：

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n$$

显然，把区间$[a, b]$分得越细，每个小区间的长度越小，上述小矩形面积之和就越近似于所求曲边梯形的面积S。所以，当$n\to\infty$而$\|\Delta x\|\to 0$时（$\|\Delta x\|$表示Δx_i中的最大者），对上述和式取极限，便得到所求曲边梯形面积的精确值了。即

$$S=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

这叫做“从近似到精确”。

因此，以上两个步骤，实际上是做了“分小求近似”即

"化整为零"，到"求和取极限"即"积零为整"的工作。

二、求变速直线运动的距离

设某物体作变速直线运动，其速度V是时间t的连续函数：$V=V(t)$，要计算物体在时间区间$[T_1, T_2]$内所经过的距离S。

我们知道，对于匀速直线运动，有公式

$$距离=速度\times时间$$

但是，在我们的问题中，速度不是常量而是随时间变化的变量，因此，不能按匀速运动公式来求距离。然而，由于速度$V=V(t)$是连续变化的，那么，当时间间隔很短时，速度的变化也就很小，并且，当时间间隔无限缩短时，速度的变化也就无限地小，可以用"匀速"来代替"变速"。因此，我们可以将时间区间$[T_1, T_2]$分成许多小区间，在各小时间区间上，依匀速运动公式求得物体所经过的距离的近似值，通过求和、取极限，便可得所求距离的精确值了。

具体求法采取两个步骤：

第一步，用分点

$$T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_2$$

将时间区间$[T_1, T_2]$分成n个小区间：

$[t_0, t_1]$，$[t_1, t_2]$，$\cdots$，$[t_{i-1}, t_i]$，$\cdots$，$[t_{n-1}, t_n]$，

则每个小区间的长度分别为

$\Delta t_1=t_1-t_0$，$\Delta t_2=t_2-t_1$，$\cdots$，$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$，$\cdots$，$\Delta t_n=t_n-t_{n-1}$。

在每个小区间$[t_{i-1}, t_i]$上任取一时刻τ_i $(t_{i-1}\leqslant\tau_i\leqslant t_i$，$i=1, 2, \cdots, n)$，用物体在$\tau_i$点的速度$V(\tau_i)$来近似代替物体在$[t_{i-1}, t_i]$上各点的运动速度（也就是把物体在$[t_{i-1}, t_i]$上的运动看作是匀速的）。因此，乘积$V(\tau_i)\Delta t_i$就是物体在

$[t_{i-1}, t_i]$上运动距离 ΔS_i 的近似值，即

$$\Delta S_i \approx V(\tau_i)\Delta t_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

第二步，将各乘积 $V(\tau_i)\Delta t_i$ 求和，得物体在区间 $[T_1, T_2]$上运动距离S的近似值：

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} V(\tau_i)\Delta t_i = V(\tau_1)\Delta t_1 + V(\tau_2)\Delta t_2 + \cdots + V(\tau_n)\Delta t_n$$

再让分点数n无限增大且 $\|\Delta t\| \to 0$时（其中 $\|\Delta t\|$ 为 Δt_i 中最大者），则上述和式的极限就是物体从时刻 T_1 到时刻 T_2 这段时间内的运动距离，即

$$S = \lim_{\|\Delta t\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} V(\tau_i)\Delta t_i.$$

以上，我们讨论了曲边梯形的面积和变速直线运动的距离问题。撇开其具体意义，抓住其共同点，问题都是“积累问题”，即归结为求一和式的极限。另外，还有许多实际问题的解决也是归结于这类极限。为此，我们引进定积分这一概念。

三、定积分的定义

定义 6.1 设函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上有界，用点$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，将区间$[a, b]$分成 n 个小区间$[x_{i-1}, x_i]$$(i=1, 2, \cdots, n)$，其长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$，作乘积

$$f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

称为积分元素。作和式

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

称为积分和，也叫黎曼和。如果当n无限增大，且 Δx_i 中最大者 $\|\Delta x\| \to 0$ 时，积分和 S_n 的极限存在，且此极限与 $[a, b]$ 的

分法及ξ_i的取法无关，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是可积的，并将此极限值称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分，记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

即
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中 $f(x)$称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x为积分变量，$[a, b]$为积分区间，a为积分下限，b为积分上限。

依定积分定义，回头看我们所举的两个实例，可以表述为：

曲边梯形的面积等于曲边所对应的函数 $y=f(x)$在其底边所对应的区间$[a, b]$上的定积分：

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

变速直线运动所经过的距离是速度函数 $V=V(t)$在时间区间$[T_1, T_2]$上的定积分：

$$S=\int_{T_1}^{T_2} V(t)\mathrm{d}t$$

注意：(1) 在定积分的定义中，强调两个任意性：一是区间$[a, b]$的划分是任意的；二是每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上ξ_i点的取法是任意的。对于区间$[a, b]$的不同划分法与ξ_i点不同取法，就有不同的和式与之对应，因此，和式是一个变量，但是，当$\|\Delta x\|\to 0$（$n\to\infty$）时，这个变量的极限必须存在，才谈得上 $f(x)$ 在$[a, b]$上的积分存在。

(2) 由于定积分是一个和式的极限，故其结果是一个常数。它只与被积函数 $f(x)$ 和积分区间$[a, b]$有关，而与积分

变量用什么字母表示无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \tag{6.1}$$

(3) 如果被积函数在积分区间上无界时，我们总可以选取点 ξ_i，使 $f(\xi_i)$ 无限地大，从而使积分和为无限大，积分和的极限也就不存在了。因此，无界函数是不可积的。

(4) 在积分定义中，我们总是假定 $a<b$，如果 $a>b$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x \tag{6.2}$$

就是说，定积分的上下限互换时，定积分要变号。

特别地，如果 $a=b$ 时，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$$

这一结论我们不难从定积分的定义直接得出。

四、定积分存在定理

定理6.1 若 $f(x)$ 在$[a, b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a, b]$上的定积分存在。

简单说来，就是连续函数是可积的。

若被积函数在区间$[a, b]$上有界且只有有限个间断点，我们可将定义略加推广。如图6-2，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有这样一个间断点 $x=c$，则 $f(x)$ 在$[a, b]$上的积分可规定为两个

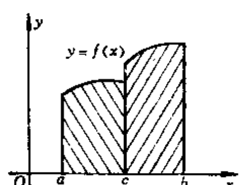

图6-2

部分区间上的积分和①：

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

五、定积分的几何意义

在区间 $[a,\ b]$ 上，当 $f(x)>0$ 时，我们知道，定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的几何意义是由曲线 $f(x)$、直线 $x=a$、$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积。即

$$\int_a^b f(x)\,dx=A$$

如图6-3所示。

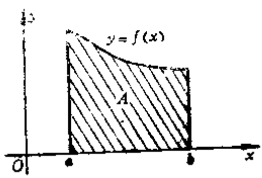

图6-3

显然，在区间 $[a,\ b]$ 上，若 $f(x)<0$，依定义，则有 $\int_a^b f(x)\,dx<0$，这时，定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 就表示了图6-4所示的曲边梯形的面积加上负号，即

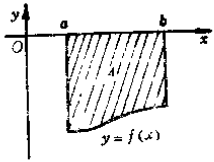

图6-4

①在区间 $[a,\ c]$ 及 $[c,\ b]$ 的端点 c 处，分别取左极限 $f(c-0)$ 及右极限 $f(c+0)$ 为函数值，使得函数在这两个闭区间上都连续。

$$\int_a^b f(x)\,dx = -A$$

如果曲线 $y=f(x)$ 在$[a, b]$上和x轴有交点，如图 6-5 所示，那么．由以上讨论可知，定积分$\int_a^b f(x)\,dx$ 表示了x轴上下几部分面积的代数和。即

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$$

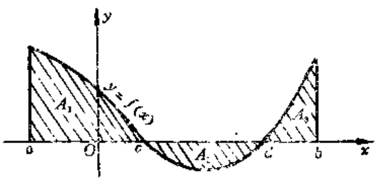

图6-5

§6.2 定积分的基本性质

从定积分的定义出发，可以直接推出定积分的一些性质。在下面的讨论中，我们总假没函数在所讨论的区间上都是可积的。

性质1 常数因子可以提到积分号前．即

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad (k\text{为任意常数}) \qquad (6.3)$$

这是因为

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= k \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= k \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

性质2 两个函数代数和的积分等于两个函数的积分的代数和，即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (6.4)$$

因为 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x$

$$= \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$$

$$= \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

这一性质可以推广到有限个的情形。

性质3 若积分区间$[a, b]$被点c分成两个部分区间$[a, c]$与$[c, b]$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (6.5)$$

因为定积分的存在与区间$[a, b]$的分法无关。所以我们在划分$[a, b]$时，总可以将c做为一个分点，这样，函数在$[a, b]$上的积分就是$[a, c]$和$[c, b]$这两部分区间上的积分的和。另外，从几何意义上解释也是明显的，如图 6-6 所示，曲边梯形 $aABb$ 的面积等于曲边梯形 $aADc$ 的面积与曲边梯形 $cDBb$ 的面积之和，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

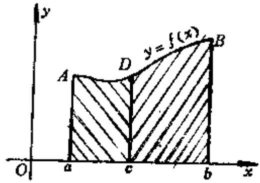

图6-6

注意，当c不介于a、b之间时，等式（6.5）仍然是成立的。如图6-7所示，$a<b<c$，只要$f(x)$在$[a, c]$上可积，则由（6.5）式可得

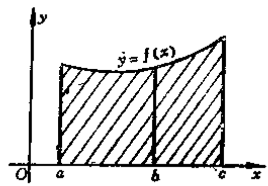

图 6-7

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

移项，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

这在几何直观上同样是显而易见的。

这一性质说明定积分对于积分区间具有可加性。它也可以推广到有限个分点的情形。

性质4 设在$[a, b]$上 $f(x)\equiv 1$，则

$$\int_a^b 1\cdot dx=\int_a^b dx=b-a \tag{6.6}$$

从定积分的定义或几何意义都很容易理解这一性质。

性质5 若在$[a, b]$上 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx \quad (a<b) \tag{6.7}$$

因为 $\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx$

$$=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}[g(\xi_i)-f(\xi_i)]\Delta x_i$$

由于 $g(\xi_i)-f(\xi_i)\geqslant 0$，$\Delta x_i>0$，$(i=1, 2, \cdots, n)$

故 $\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx\geqslant 0$ 即

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx$$

性质6 设M与m分别是连续函数 $f(x)$ 在$[a, b]$上的最大值与最小值，则有如下定积分估计公式：

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a) \quad (a<b) \tag{6.8}$$

因为对一切$x\in[a, b]$，均有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M$$

所以由性质5得

$$\int_a^b m dx\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b M dx$$

再由性质1与性质4得

$$m\int_a^b dx\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M\int_a^b dx$$

即

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)$$

如图6-8所示，曲边梯形$aABb$的面积介于二矩形$aCDb$、$aEFb$面积之间。

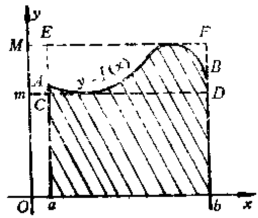

图6-8

性质7（定积分中值定理） 设$f(x)$在$[a, b]$上连续，则在$[a, b]$上至少存在一点ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b) \qquad (6.9)$$

证 设M、m分别表示$f(x)$在$[a, b]$上的最大值与最小值，由性质6有

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

于是
$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a} \leqslant M$$

可见$\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}$是介于$m$与$M$之间的一个定值，由介值定理：函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则在$[a, b]$上至少存在一点$\xi$，使得函数在$\xi$点的值与这个值相等，即