经 济 知 识 丛 书

现代经济数学基础

景 旭　　景体华

经 济 科 学 出 版 社

封面设计：习耀章
责任编辑：李爱屏
责任校对：段小青

现代经济数学基础
景旭　景体华
*
经济科学出版社出版　新华书店北京发行所发行
中国铁道出版社印刷厂印刷
*
787×1092 毫米　32 开　10.125 印张　192000 字
1987 年 8 月第一版　1987 年 8 月第一次印刷
印数：00001—12000 册
统一书号：4312·183　　定价：1.55 元

编者的话

自从党中央决定把全党工作的着重点转移到社会主义现代化建设上来以后，我国的经济工作已经取得巨大成绩。社会主义经济的发展对于建成具有中国特色的社会主义有决定的意义，因而理所当然地为全国人民所关注。为了在各自的岗位上对社会主义建设作出更大的贡献，现在除了从事经济理论研究和教学的同志外，越来越多的从事实际经济工作的同志、企业职工、机关干部、高校学生、社会青年等都要求学习经济科学知识。人们不但需要理论经济学，而且需要各种应用经济学；不但瞩目于我国经济生活的各种问题，而且也在关心着世界的经济形势。显然，经济科学知识的普及已经成为我们当代生活中一件大事。

《经济知识丛书》就是适应这样的形势编写出版的。它以具有中等文化水平的读者为对象，在写作中力求给读者以系统的知识，并力求做到深入浅出、文字通俗易懂。

这套丛书第一批计划出版一百种，书目涉及政治经济学基础理论，经济学说史，国内经济生活中人们普遍感兴趣的问题和经济科学中许多专门学科。我们希望丛书能够对广大读者掌握经济科学知识有一点帮助。丛书编写方面的不足之处，敬希读者批评。

这套丛书的编纂工作由中国经济团体联合会倡导和组织。从一开始就得到全国许多经济学团体和许多经济理论工作者、经济工作者的大力支持。它将由北京出版社、商务印书馆、四川人民出版社、上海学林出版社、天津人民出版社、经济科学出版社等合作出版。我们谨向所有为这套丛书的编写、出版、发行付出辛勤劳动的同志表示衷心的感谢。

《经济知识丛书》编辑部

序　　言

经济理论研究和经济管理中数量分析的重要性已经为人们所公认。那末，经济工作者是不是单纯地学习纯粹数学就行了呢？

著名力学家冯卡门在谈到有些科学家把数学看作“科学的侍女”时，曾发表了一些不同的意见。他认为，工程师并不感觉到纯粹数学是科学技术的侍女，他们需要应用数学家设计出解决工程技术问题所需要的数学工具。他举例说，任意一大堆机器、工具，并不能构成一个有效的、由机器组成的车间。数学的武器库中虽然有着强有力的工具，但是还没有造成解决工程问题所需要的那样一个车间。要使数学成为工程的工具，尚是一件很重要、很迫切的事情。①

经济学界面临同样的问题。近半个世纪以来，经济中运用的数学方法，几乎遍及所有的纯数学分支。然而又不是所有这些分支中的数学方法全都能用来描述经济问题，它只是运用了其中的某些工具。这些工具，有的并不为研究纯粹数学的人所重视，在整个数学大厦中，占不了什么重要位置。但是，在经济领域的应用却使它闪出了异样的光

① 参见《哲学研究》1979年第1期，第62页。

彩。学习纯粹数学不仅繁难，一旦用来解决经济问题，往往感到需要的部分学得太少，学到的知识闲置太多，即使是用到的东西，也还要根据经济问题的需要进行一番重新组合。总之，经济工作者也象工程师们一样，迫切需要从纯粹数学的庞大工具库中，巧取适应于经济问题的机器，构造一个解决经济问题的数学“车间”。自然，这意味着要对纯粹数学的理论成果进行再加工、再创造。这部分工作，无论是国内还是国外，已经有好多学者在做。我们这本书所介绍的，就是这方面的部分研究成果。

经济数学的进展，是人们对经济现象认识深化的重要标志。人们由认识单一的经济现象，到认识多因素相关的复杂经济关系，再到认识多层次的大经济系统，是一步又一步的飞跃。和这种飞跃相适应，三十年代以来，经济数学有了以下一些引人注目的变化：

1. 经济数学的传统方法，是把经济现象分割开来，假定其他条件不变，以研究两个变量的因果关系。随着社会化大生产的发展，经济现象的相互关联性越来越不容忽视。人们突破了以往的方法，逐步转向研究多变量多值的线性、非线性关系。

2. 经济研究中运用数学语言对于社会、经济部门及企业的整体性描述，显然在逐步深化，而这是以控制论方法、系统论方法向经济科学的渗透为“桥梁”的。

3. 依据经济理论和实际经验构造经济数学模型，是经济问题定量化研究的重要步骤。

4. 经济问题特别注重寻求特定条件之下的最佳效果。于是适合解决经济问题的最优化方法在理论研究和实际应用上，都成了近年来进展迅速的一个分支。

5. 电子计算机的广泛应用，不仅使包括几十个、上百个方程的经济问题的求解成为可能，使复杂经济系统的定量化研究变为现实，而且计算机模拟还给人们在经济研究中引进了科学的实验方法和分析方法。

本书力图通过一些适用于我国建设的经济数学方法，尽量通俗地向读者介绍这个学科的概貌。涉及高深数学的部分，主要讲清发展线索。读者循着线索摸下去，会知道深入钻研需要重点掌握什么数学知识，哪些知识可以略而不顾。

作　者

1985 年于北京

目　　录

第一章 矩 阵

经济现象的状态，它的发展变化，无不受多种因素以及这些因素不同构成、组合的影响。在这一章，我们将通过向量这个桥梁，建立多维空间的矩阵表示。

二十世纪四十年代以来，系统论进展很快，系统方法为很多学科所接受，成了进行整体性研究的科学方法。在以下几章中我们将看到，矩阵可以用来描述系统的整体性、联系性、有序性和动态性质。正是借助这样的数学工具，才使经济科学的定量研究从把复杂的经济有机体分解为许多简单的部分，步入了在各部分的有机联系中进行整体功能的定量研究。

第一节 矩阵的概念

定义 1.1 如把 mn 个数 a_{ij} (i=1,2,…,m j=1,2,…,n)排成一个矩形的表：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ 或 } A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

就叫做 m 行 n 列矩阵，简称为 $m\times n$ 矩阵。横的各排叫做矩阵的行；纵的各排叫做矩阵的列。a_{ij} 称为此矩阵第 i 行、第 j 列的数或元。通常我们以大写字母 A，B，…等代表矩阵。上述矩阵可记为 $A_{m\times n}$，或 $(a_{ij})_{m\times n}$。如果 $m=n$，则 A 可简称为正方矩阵或 n 阶矩阵。

这里必须提起注意的是，矩阵与行列式①是两个完全不同的概念。n 阶行列式是一个数，n 阶矩阵不是一个数，而是 n^2 个有顺序的元素排成的一个表。

矩阵 A 的行列式用 $|A|$ 表示。

由 $m\times n$ 矩阵 A 中某行的 n 个元组成的有序数组，叫做 A 的行向量；由 A 中某列的 m 个元组成的有序数组叫做 A 的列向量。一个 $m\times n$ 矩阵 A，就可以视为 n 个列向量或 m 个行向量的有序集合。只有一行或一列的矩阵，我们就叫做行向量或列向量。

例 1.1　某汽车厂生产四种不同类型的汽车，我们称它们为 I 型、II 型、III 型和 IV 型。若工厂管理人员要比较这四种不同型号汽车在消耗材料与劳力上的异同，习惯上就会列成下面的一个简单的表 1.1：

这样的一张表，为了计算的方便，可以写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} 10 & 13 & 15 & 20 \\ 5 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

---

① 行列式本书未作介绍，需要了解这部份知识的读者，请查高中代数。

表 1.1

	I 型	II 型	III 型	IV 型
材料单位	10	13	15	20
劳力单位	5	8	9	6

这个矩阵有二行四列，简称为 2×4 矩阵。

定义 1.2　向量组的最大线性无关组①所含向量的个数称为这个向量组的秩。矩阵行向量组的秩称为矩阵的行秩；矩阵列向量组的秩称为矩阵的列秩。

例如，矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 1\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

的行向量组是：

$$\alpha_1=(1\quad 2\quad -1)\qquad \alpha_2=(2\quad -3\quad 1)$$

$$\alpha_3=(4\quad 1\quad -1)$$

由于 $2\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3$，而 α_1 和 α_2 线性无关，所以，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 2，也就是说，矩阵 A 的行秩为 2。A 的列

① 一组 m 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，若存在一组不全为零的纯量 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$$

或简写为

$$\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i=0$$

则这组向量为线性相关向量。如果上述方程只有在所有纯量皆为零的情况下才成立，则这组向量称为线性无关或线性独立向量。

向量组是：

$$\beta_1 = (1 \quad 2 \quad 4) \qquad \beta_2 = (2 \quad -3 \quad 1)$$

$$\beta_3 = (-1 \quad 1 \quad -1)$$

由于 $\beta_3 = -\frac{1}{7}\beta_1 - \frac{3}{7}\beta_2$，$\beta_1$ 和 β_2 线性无关，所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的秩也为 2，即矩阵 A 的列秩为 2。

矩阵的行秩与列秩相等（证明从略），所以我们就统称其为矩阵的秩。

定义 1.3　矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

当 m＝n 时，我们称 A 为 n 阶矩阵。n 阶矩阵的秩如果是 n，叫做满秩矩阵，否则就叫做降秩矩阵。

一般齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

由它的系数组成的矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

我们称为系数矩阵，一般非齐次线性方程组：

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

其系数组成的矩阵：

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

仍叫做系数矩阵，而由其系数和常数项组成的矩阵：

$$
B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}
$$

则叫做增广矩阵。

定义 1.4　n×n 矩阵 A 内的元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 组成的集合，称为矩阵 A 的主对角线。主对角线以外的元素均为零的方阵称为对角矩阵。主对角线上各元素均等于 1 的对角矩阵称为单位矩阵，通常以 I_n 或 I 表示。例如：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

就是一个对角方阵。

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

就是一个单位矩阵。

定义 1.5　两矩阵 A 和 B，若两者同阶，且其中对应元素均相等，即 $a_{ij} = b_{ij}$ 时，则 A=B，称为两相等矩阵。

定义 1.6　每一元素都为零的矩阵，称为零矩阵，以 $O_{m\times n}$ 表示。在容易和纯量 O 相混的情况下，也可以用黑体 **0** 表示。

第二节　矩阵的运算

矩阵的运算规则，和向量相类似。

加法：

定义 1.7　设：

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots\\b_{m1}&\cdots&b_{mn}\end{pmatrix}$$

是两个 m×n 矩阵，把它们相对应位置的元素相加而得到的矩阵 C，叫做 A、B 的和，记为 A+B，即：

$$C=A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}+b_{m1}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

由于矩阵的加法归结为它们元素的加法，也就是数的加法，所以，不难验证，它有：

结合律：$A+(B+C)=(A+B)+C$ (1.1)

交换律：$A+B=B+A$ (1.2)

零矩阵 $0_{m\times n}$ 同任意 m×n 矩阵 A 的和，显然是 A 自身，即：

$$A+0=A \tag{1.3}$$

假设 A 中的元素均为非负，则 A 叫做非负矩阵，而矩阵

$$-A=\begin{pmatrix}-a_{11}&\cdots&-a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots\\-a_{m1}&\cdots&-a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的负矩阵。自然：

$$A+(-A)=0$$

所以，矩阵的减法可以定义为：