创新版奥林匹克竞赛丛书

Olympic Games

中国华罗庚学校数学课本

初二年级

总策划 何 舟
本册主编 邓 均

最新理念

最强阵容

最优结构

吉林教育出版社

中国华罗庚学校数学课本

为寻求智力和潜能得到开发的学生提供契机

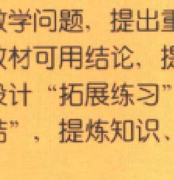
——总主编的心愿

最新的理念 涵盖《大纲》要求，又不拘泥于大纲；使青少年懂得数学探究的过程，拓展研究成果和思维空间；形成创造性学习的优势，获得可持续发展。

最优的结构 每章创设有探索价值的开放性数学问题，提出重难点所在，指点解决的方法、策略；每节给出教材可用结论，提出拓展的“探究目标”，展示“探究过程”，设计“拓展练习”，让学生参与、体验、发展；章末的“本章小结”，提炼知识、规律、能力、方法、观点，揭示应注意的问题。

最强的阵容 丛书各册主编与撰稿人均为知名专家和奥林匹克教练，具有长期从事开发3%左右智力超常青少年潜能的经验，善于创设数学背景问题，引导学生探究，走向成功。

中国华罗庚学校数学课本 · 小学一年级
中国华罗庚学校数学课本 · 小学二年级
中国华罗庚学校数学课本 · 小学三年级
中国华罗庚学校数学课本 · 小学四年级
中国华罗庚学校数学课本 · 小学五年级
中国华罗庚学校数学课本 · 小学六年级
中国华罗庚学校数学课本 · 初一年级
中国华罗庚学校数学课本 · 初二年级
中国华罗庚学校数学课本 · 初三年级
中国华罗庚学校数学课本 · 高一年级
中国华罗庚学校数学课本 · 高二年级
中国华罗庚学校数学课本 · 高三年级



ISBN 7-5383-4337-7

9 787538 343373 >

ISBN 7-5383-4337-7/G · 3958
定价：13.80元

创新版奥林匹克竞赛丛书

中国华罗庚学校数学课本

初二年级

吉林教育出版社

中国华罗庚学校数学课本

初二年级

总策划 何 舟
总主编 马传渔
本册主编 邓 均
撰 稿 李 宁 刘建业 鲍敬谊

吉林教育出版社

（吉）新登字 02 号
封面设计：杨　蕙
责任编辑：王世斌　李建军

创新版

奥林匹克竞赛丛书

中国华罗庚学校数学课本

初二年级

总 策 划　何　舟
本册主编　邓　均

吉林教育出版社 出版 发行
山东省桓台永信印刷有限公司印刷　新华书店经销

开本：880×1230 毫米　1/32　印张：10.75　字数：318 千字
2002 年 6 月吉林第 1 版　2002 年 6 月山东第 1 次印刷
本次印数：20000 册

ISBN 7－5383－4337－7/G·3958
定价：13.80 元

凡有印装问题，可向承印厂调换

总主编的话

第31、35届I.M.O.选题委员会委员
南京大学数学系教授、享受国务院政府津贴
马传渔

由我国著名数学家华罗庚、苏步青两位教授于1956年负责举办的全国部分省、市高中数学竞赛,为我国数学竞赛拉开了序幕。历经近50年方方面面的努力,各层次的数学竞赛已在全国开展得红红火火、蓬蓬勃勃,它为开发广大学生的智力,为培养数学奥林匹克师资队伍,为国际数学奥林匹克(I. M. O.)选拔人才,为早期发现与培养现代杰出科技苗子产生了巨大的作用。

为缅怀华罗庚教授的光辉业绩,弘扬华罗庚教授的敬业精神,全国最早由中国科学院华罗庚实验室、中国科技大学和中国人民大学附中联合创办了北京市华罗庚学校,经过近20年的发展,小学、初中、高中三个层次的华罗庚学校已遍布全国各地,各种版本华罗庚学校的教材已相映生辉,令人目不暇接。我们这套《中国华罗庚学校数学课本》丛书,愿为漫步在数学奥林匹克殿堂中的广大读者铺路。

本丛书体现了知识点的增加、知识面的扩大和知识框架的更新,强化了新世纪教学思想的介绍与渗透,突出了数学方法的总结和应用,具有可读性、启迪性和实用性。

1. 本丛书是一套**规范的系列奥林匹克培训**

教材，小学包含 1～6 年级 6 个分册，中学包含初一到高三年级 6 个分册，共计 12 本。本丛书不仅体现了小学、初中、高中三个层次内容上的衔接，而且强调了解题方法上的衔接。

2. 本丛书**源于教学**，系参照现行中小学《数学教学大纲》编写而成，既覆盖了相应教材中的各个知识点，与现行教材同步，又增添了不少解题方法的篇章。

3. 本丛书**高于教学**，紧扣各级数学竞赛大纲，每册读本既详尽地介绍各级数学竞赛的内容和题型，又由浅而深地引入竞赛中经常使用的各种数学思想和数学方法。本书“**本章小结**”栏目，对每章相关的知识点、解题方法、问题的规律、应用的范围、伸展与拓广、创新与灵感作了总结与提炼。

4. 本丛书以趣例引入，具有浓厚的**趣味性**；以生活实例作背景介绍数学内容，具有广泛的**应用性**；以探索性、操作性范例作展示，具有丰富的**启迪性**，能激发广大中小学生学习数学的兴趣。

5. 本丛书注意到**与各级数学竞赛接轨**，强调数学技能与解题能力的循序渐进的训练与培养，“**探究过程**”栏目中所提供的实例题意新颖、内容丰富，十分贴近各级数学竞赛试题，能帮助数学特长生在数学竞赛中获胜，为个别数学特长生冲刺奥林匹克金牌架设桥梁。

6. 本丛书由名牌大学**数学教授**、**命题专家**、**特级教师**、**学科带头人**、**奥林匹克教练员**编写而成，既可作为一本课外读物，也可作为数学辅导书及数学培训班、数学兴趣小组的试用教材与参考书，还可作为中小学教师培训奥林匹克的教本。

“千里之行，始于足下。”愿《中国华罗庚学校数学课本》陪伴广大数学爱好者在汗水中积累知识，在灵感中启迪智慧，在玩乐中迎接成功。

中国华罗庚学校数学课本

编 委 会

结识名师

邓均

毕业于北京大学数学力学系。现在北京大学附中任教，中学高级教师，海淀区学科带头人，国家奥林匹克一级教练。

由于在奥林匹克竞赛辅导中成绩突出，被评为北京市数学会优秀学会工作者。主编了《海淀名题》《海淀题链——解题思维能力发散训练》等十多种助考、助学读物。

目录

第一章　因式分解

第二章　分　式

初二数学

第三章 二次根式

第四章 分式方程(组)的解法及应用

第五章 不定方程(组)

第六章 三角形

华罗庚学校

第一章　因式分解

把多项式化为几个整式乘积的形式称为因式分解．因式分解是代数式的一种重要的变形方法．因式分解不仅用于计算、代数式的化简、求值、解方程和不等式等代数内容，而且在几何、三角等解题与证明中扮演着重要角色，在高等数学中也有一定的应用，它是解决许多数学问题的有力工具．所以掌握因式分解的方法并会灵活运用这种方法，是一项重要的数学技能．

例如：设 a,b,c 都是正数，且有 $a^2+b^2-c^2+2ab=0$，则分别以 a,b,c 为长度的三条线段，是否能作为三角形的三条边？作出判断并说明理由．

解决上述问题，应将 $a^2+b^2-c^2+2ab$ 分解因式．将原等式 $a^2+b^2-c^2+2ab=0$ 适当变形，找到某两条边的和（差）与第三条边的关系，从而作出判断．

本章的知识主要是掌握因式分解的方法和因式分解的一些应用．

第一节　因式分解的基本方法

在因式分解中，一定要把一个多项式分解为几个不能再分的因式的乘积．这里的"不能再分"是指相对于系数所在的数域而言的．若无特殊说明，一般指在实数域中作因式分解．

一般地，把一个多项式分解因式，可按下列步骤进行：

(1)整理多项式，如果各项有公因式，应先提取公因式；

(2)对于各项没有公因式的二项式或三项式，可以联想有关公式；

(3)对于二次三项式，常可考虑用完全平方公式或十字相乘法分解；

(4)如果运用上述方法都不能分解时，再看能否用分组分解法分解．

探究目标

掌握因式分解的基本方法：

1．提公因式法．$ma+mb+mc=m(a+b+c)$．

2．运用公式法．把乘法公式反过来可以作因式分解的公式．

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2.$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2).$$

3. 十字相乘法. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

某些特殊的二次三项式,可以通过分析系数关系的方法,化为两个一次二项式的乘积.

4. 分组分解法. 分组后应能提公因式或运用公式,组间能继续用提公因式或公式.

探究过程

1. 提公因式法分解因式.

怎样确定多项式中各项的公因式?

公因式的系数是多项式中各项系数的绝对值的最大公约数;公因式中字母的幂是多项式中各项都含有的字母的幂中次数最低的.

建议:用提公因式法进行因式分解要注意下面几点:

a. 公因式要提尽;

b. 将公因式提到括号外时,留在括号内的多项式的首项为正;

c. 因式分解的结果,单项式要写在多项式的前面,相同的因式要写成幂的形式.

例1 把下列各式分解因式.

(1) $25x^2y(m-2n)^2-10xy^2(2n-m)^3$;

(2) $(a+x)^{m+1}(b+x)^{n-1}-(a+x)^m(b+x)^n$;

(3) $by(y-x)^{2n}+b(x-y)^{2n+1}$;

(4) $2a^2b(a-b)+ab(b-a)^2+2ab^2(b-a)$.

解:(1)
$$\begin{aligned}&25x^2y(m-2n)^2-10xy^2(2n-m)^3\\&=5xy(m-2n)^2[5x+2y(m-2n)]\\&=5xy(m-2n)^2(5x+2my-4ny);\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(a+x)^{m+1}(b+x)^{n-1}-(a+x)^m(b+x)^n\\&=(a+x)^m(b+x)^{n-1}[a+x-(b+x)]\\&=(a+x)^m(b+x)^{n-1}(a-b);\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&by(y-x)^{2n}+b(x-y)^{2n+1}\\&=b(x-y)^{2n}[y+(x-y)]\\&=b(x-y)^{2n}\cdot x\\&=bx(x-y)^{2n};\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&2a^2b(a-b)+ab(b-a)^2+2ab^2(b-a)\\&=ab(a-b)[2a+(a-b)-2b]\end{aligned}$$

$=ab(a-b)(3a-3b)$

$=3ab(a-b)^2$.

2. 运用公式法分解因式.

运用公式法分解因式，关键是通过观察，掌握所要分解的多项式的特点，并把原多项式转化为满足某个因式分解公式左端的形式.

建议：对下列公式应该熟练掌握：

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$;

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$;

$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$;

$a^3+b^3+3ab(a+b)=(a+b)^3$;

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$;

$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+\cdots+(-1)^{2n-1}ab^{2n-1}+(-1)^{2n}b^{2n})$.

讨论：分析上述公式的特点，用公式法分解因式，一般有下面几种常用类型.

a. 可化为$(\quad)^n-(\quad)^n$或$-(\quad)^n+(\quad)^n$型；

特别当$n=2,3$时，

$(\quad)^2-(\quad)^2$或$-(\quad)^2+(\quad)^2$型.

$(\quad)^3-(\quad)^3$或$-(\quad)^3+(\quad)^3$型；

b. 可化为 $(\quad)^2\pm2(\quad)(\quad)+(\quad)^2$型；

(或化为$-(\quad)^2\pm2(\quad)(\quad)-(\quad)^2$型)

c. 可化为$(\quad)^{2n+1}+(\quad)^{2n+1}$型.

证明：上述因式分解公式，只要将等式右边用多项式乘法法法则乘出来，再合并同类项就能得到等式左边.

例2 把下列各式分解因式.

(1)$25(m+n-3)^2-9(3m-2n)^2$;

(2)$-(2x-1)^3+x^3$;

(3)$16m^4-72m^2+81$;

(4)$64x^2y^2-(x^2+16y^2)^2$;

(5)$-(a+1)^2-2(a^2-1)-(a-1)^2$.

解：(1) $25(m+n-3)^2-9(3m-2n)^2$

$=[5(m+n-3)]^2-[3(3m-2n)]^2$

$=(5m+5n-15)^2-(9m-6n)^2$

$=(5m+5n-15+9m-6n)(5m+5n-15-9m+6n)$

$= -(14m-n-15)(4m-11n+15)$;

(2) $-(2x-1)^3+x^3$

$= x^3-(2x-1)^3$

$= [x-(2x-1)][x^2+x(2x-1)+(2x-1)^2]$

$= (-x+1)(x^2+2x^2-x+4x^2-4x+1)$

$= -(x-1)(7x^2-5x+1)$;

(3) $16m^4-72m^2+81$

$= (4m^2)^2-2\cdot(4m^2)\cdot 9+9^2$

$= (4m^2-9)^2$

$= (2m-3)^2(2m+3)^2$;

(4) $64x^2y^2-(x^2+16y^2)^2$

$= (8xy)^2-(x^2+16y^2)^2$

$= (8xy+x^2+16y^2)(8xy-x^2-16y^2)$

$= -[(x^2+8xy+(4y)^2)][(x^2-8xy+(4y)^2)]$

$= -(x+4y)^2(x-4y)^2$;

(5) $-(a+1)^2-2(a^2-1)-(a-1)^2$

$= -[(a+1)^2+2(a+1)(a-1)+(a-1)^2]$

$= -[(a+1)+(a-1)]^2$

$= -4a^2$.

例3 把下列各式分解因式.

(1) $x^{6n+2}-2x^{3n+2}+x^2$;

(2) $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)-bc+ca-ab$;

(3) $2(a^2+b^2)(a+b)^2-(a^2-b^2)^2$;

(4) $(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^2-x^5$.

解:(1) $x^{6n+2}-2x^{3n+2}+x^2$

$= x^2[(x^{3n})^2-2x^{3n}+1]$

$= x^2(x^{3n}-1)^2$

$= x^2[(x^n)^3-1]^2$

$= x^2(x^n-1)^2(x^{2n}+x^n+1)^2$;

(2) $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)-bc+ca-ab$

$= \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-2bc+2ca-2ab)$

华罗庚学校

$$=\frac{1}{2}(a-b+c)^2;$$

(3) $2(a^2+b^2)(a+b)^2-(a^2-b^2)^2$

$$\begin{aligned}&=2(a^2+b^2)(a+b)^2-(a+b)^2(a-b)^2\\&=(a+b)^2[2a^2+2b^2-(a-b)^2]\\&=(a+b)^2(2a^2+2b^2-a^2+2ab-b^2)\\&=(a+b)^2(a+b)^2\\&=(a+b)^4;\end{aligned}$$

(4) $(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^2-x^5$

$$\begin{aligned}&=\frac{(x^6-1)^2}{(x-1)^2}-\frac{x^5(x-1)^2}{(x-1)^2}\\&=\frac{x^{12}-2x^6+1-x^7+2x^6-x^5}{(x-1)^2}\\&=\frac{x^{12}-x^7-x^5+1}{(x-1)^2}\\&=\frac{(x^7-1)(x^5-1)}{(x-1)\cdot(x-1)}\\&=(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1).\end{aligned}$$

3. 十字相乘法分解因式.

十字相乘法是二次三项式进行因式分解的重要方法.这种方法的要领可以概括成16个字“头尾分解,交叉相乘,求和凑中,试验筛选”.

建议:十字相乘法只适用于二次三项式的因式分解,有些多项式为了能用十字相乘法分解,一般需经过下面两个步骤:

1. 将多项式按某一个字母降幂排列,将这个多项式看成是关于这个字母的二次三项式;

2. 若系数为分数,设法提出一个为分数的公因数,使括号内的多项式成为整系数,再利用十字相乘法分解.

证明:如果一个二次三项式 px^2+qx+r 分解成 $(ax+b)(cx+d)$(取 $p>0,a>0,c>0$).

由多项式乘法计算过程可知

$px^2+qx+r=acx^2+(ad+bc)x+bd$,比较 x 的系数可知 $\begin{cases}ac=p,\\bd=r,\\ad+bc=q,\end{cases}$

即用十字相乘法表示成:

$$\begin{array}{c} p\ \begin{matrix} a & & b \\ & \times & \\ c & & d \end{matrix}\ r \\ \hline ad\ +\ bc=q \end{array}$$