平面解析几何

人民教育出版社

平面解析几何

*

人民教育出版社编辑出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷一厂印装

*

1966年第1版　1978年2月第2版
1978年5月第1次印刷
书号13012·0172　定价0.30元

前　言

当前，各类业余学校的学生以及广大知识青年，在党的十一大精神鼓舞下，决心为在本世纪内把我国建设成为伟大的社会主义强国，努力学习，把自己培养成为又红又专的社会主义建设人才．为了适应这些学校的学生和广大知识青年学习数学基础知识的需要，我们将一九六六年编写的一套没有正式出版的数学教材，作了一些必要的修改后出版，供业余学校选作教材，也可供中等专科学校师生选用和广大知识青年自学之用．

这套书包括«代数»三册、«几何»两册、«三角»一册、«平面解析几何»一册、«微积分初步»一册．

由于这套书编写时间较久，有些方面可能不适应现在的情况，也难免有缺点和错误，希望读者批评指正．

人民教育出版社

一九七八年一月

目　　录

前　　言

第一章　直角坐标系、曲线和方程 …… 1

　Ⅰ．直角坐标系 …… 1

　Ⅱ．曲线和方程 …… 11

第二章　直线 …… 19

第三章　圆锥曲线 …… 46

　Ⅰ．圆 …… 46

　Ⅱ．椭圆 …… 50

　Ⅲ．双曲线 …… 60

　Ⅳ．抛物线 …… 69

第四章　坐标变换 …… 84

第五章　极坐标 …… 103

第六章　参数方程 …… 117

一九七八年十二月十一日

第一章　直角坐标系、曲线和方程

Ⅰ．直角坐标系

1.1 平面直角坐标系　在代数里，我们知道，利用直角坐标系，可以用一对有序实数来表示平面内一个点的位置．就是说，对于坐标平面内任意一点 P（图 1.1），我们可以得出唯一的一对有序实数 (x, y) 和它对应．反过来，对于任何一对有序实数 (x, y)，在平面内就能确定一个唯一的点，使它的坐标是 (x, y)．这样，平面内所有的点和所有的有序实数对 (x, y) 之间就建立了一一对应的关系．

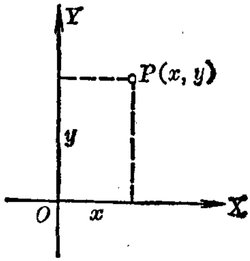


图　1.1

通过坐标系的建立，可以把平面内的点和有序实数对联系起来，从而就可以把几何问题和代数问题联系起来进行研究．

直角坐标系在实际工作中也常要用到．例如，镗床可以利用直角坐标系来确定镗孔的位置，炮兵观察所可以利用直角坐标系来确定射击目标的位置，航海时可以利用经纬度（近似地看作直角坐标系）来确定船只的位置．

下面我们先来举例说明有关坐标的一些计算．

例 1　一个边长是 a 的等边三角形，取一边 AB 所在的直线作 x 轴，并且取这边的中点 O 作原点，射线 OB 为 x 轴的正半轴，求这个三角形三个顶点的坐标．

解　顶点 A 的坐标是 $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$，顶点 B 的坐标是 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$．

顶点 C 的坐标有两种情况.

(1) 如果顶点 C 落在 y 轴的正半轴上(图 1.2 甲), 那么 C 的坐标是$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

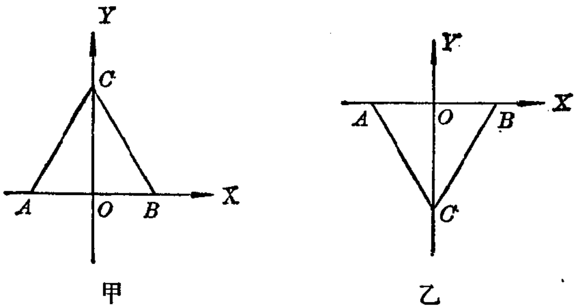


图 1.2

(2) 如果顶点 C 落在 y 轴的负半轴上(图 1.2 乙), 那么 C 的坐标是$\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

例 2 已知两点 P_1 和 P_2 的坐标分别是 $(5, -2)$ 和 $(-6, 7)$, 求线段 P_1P_2 在两条坐标轴上的投影的长度.

解 从 P_1 和 P_2 分别向 x 轴和 y 轴作垂线 P_1M_1, P_2M_2, P_1N_1, P_2N_2(图 1.3).

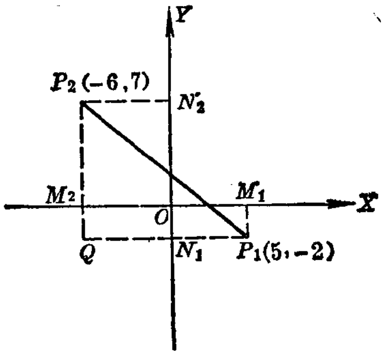


图 1.3

线段 P_1P_2 在 x 轴上的投影是 M_1M_2, 在 y 轴上的投影是 N_1N_2. 从图上可以得出 M_1M_2 和 N_1N_2 的长度分别是:

$$|M_1M_2|^{*}=|5-(-6)|=11,$$
$$|N_1N_2|\ \ =|7-(-2)|=9.$$

一般地说，如果 P_1 和 P_2 的坐标分别是 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，那么线段 P_1P_2 在 x 轴和 y 轴上的投影的长度分别是 $|x_1-x_2|$ 和 $|y_1-y_2|$.

1.2 两点间的距离 已知两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$(图 1.4)，我们用这两点的坐标来表示这两点间的距离 $|P_1P_2|$.

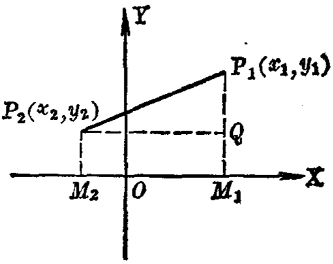


图 1.4

从 P_1、P_2 分别向 x 轴作垂线 P_1M_1、P_2M_2，并且作 $P_2Q\perp P_1M_1$，那么 P_1P_2 就是直角三角形 P_1P_2Q 的斜边，它的长就可以用两条直角边的长来表示：

$$|P_1P_2|^2=|P_2Q|^2+|QP_1|^2.$$

$$\because\quad |P_2Q|=|M_2M_1|=|x_1-x_2|,\ |QP_1|=|y_1-y_2|,$$

$$\therefore\quad |P_1P_2|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2.$$

由此得到两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 间的距离公式：

$$\boxed{|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.}$$

例 1 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(-a, 0)$、$B(a, 0)$ 和 $C(0, \sqrt{3}a)(a>0)$，求证这个三角形是等边三角形(图 1.5)。

证明 $|AB|=\sqrt{(-a-a)^2+(0-0)^2}=2a,$

$$|BC|=\sqrt{(a-0)^2+(0-\sqrt{3}a)^2}=2a,$$

---

* 本书中用 $|M_1M_2|$ 表示线段 M_1M_2 的长度。

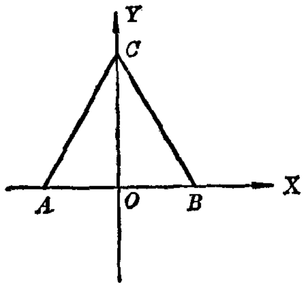


图 1.5

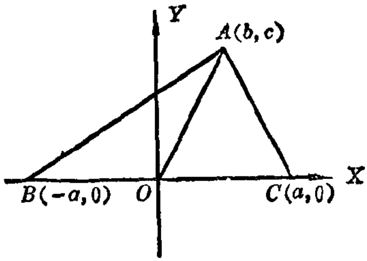


图 1.6

$$|CA|=\sqrt{[0-(-a)]^2+(\sqrt{3}a-0)^2}=2a.$$

∴ $|AB|=|BC|=|CA|$，即$\triangle ABC$是等边三角形.

例2 $\triangle ABC$中，AO是BC边上的中线，求证

$$|AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2).$$

证明 取线段BC所在的直线作x轴(图1.6)，BC的中点O作原点. 设C点的坐标是$(a,0)$，那么B点的坐标就是$(-a,0)$. 再设A点的坐标是(b,c).

那么 $|AO|^2=b^2+c^2,\ |OC|^2=a^2.$

∴ $2(|AO|^2+|OC|^2)=2(a^2+b^2+c^2).$

又 $|AB|^2=(b+a)^2+(c-0)^2,$

$|AC|^2=(b-a)^2+(c-0)^2.$

∴ $|AB|^2+|AC|^2=2(a^2+b^2+c^2).$

∴ $|AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2).$

从上面的例2可以看到，通过建立坐标系可以用代数方法来研究几何图形. 在应用这种方法时，如果坐标系选取适当，研究起来就比较简便. 例如，选取图形中的一个点作原点，就能使这点的横坐标和纵坐标都是零；选取图形中的一条直线作x轴

或者 y 轴，就能使这条直线上的点的纵坐标或者横坐标是零；如果图形有两条互相垂直的直线，那么把它们选作 x 轴和 y 轴，就能使一条直线上点的纵坐标是零，另一条上点的横坐标是零。

1.3 线段的定比分点 已知线段 P_1P_2 的两个端点是 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，P 点把 P_1P_2 分成有已知比 λ 的两条线段 P_1P 和 PP_2（图 1.7），我们用 P_1、P_2 的坐标和已知比来表示分点 P 的坐标。

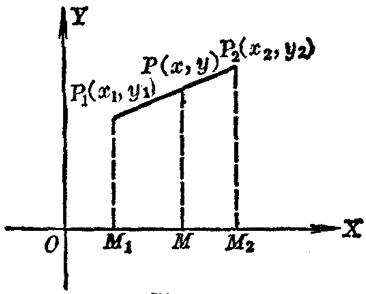


图 1.7

设P点的坐标是(x, y)，那么$\dfrac{|P_1P|}{|PP_2|}=\lambda$。从$P$、$P_1$、$P_2$分别向 x 轴作垂线 PM、P_1M_1 和 P_2M_2. 根据平行线截得比例线段定理，得

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}=\frac{|x-x_1|}{|x_2-x|}.$$

因为M在M_1和M_2之间，所以$x-x_1$和x_2-x的符号相同。从上式可以得到：

$$\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}.$$

解这个方程，得 $$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

同理，得 $$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

如果连结两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 的线段 P_1P_2 被 P 点分成两条线段 P_1P 和 PP_2，这两条线段所成的比是 λ，那么分点 P 的坐标是：

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.}$$

在应用上面的公式时，必须注意(x_1, y_1)是已知线段P_1P_2的起点P_1的坐标，(x_2, y_2)是终点P_2的坐标。

当P是线段P_1P_2的中点时，$|P_1P|=|PP_2|$，$\lambda=1$。因此，连结$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$的线段的中点的坐标是：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

例 1 如图 1.8，两点A和B的坐标分别是$(-1,-6)$和$(3,0)$，C点是线段AB上从A到B的第一个四等分点。求C点的坐标。

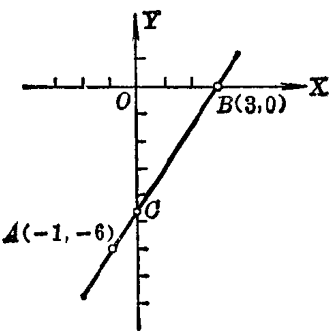


图 1.8

解 $\because$ $$\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{\frac{1}{4}|AB|}{\frac{3}{4}|AB|},$$

$\therefore$ $$\lambda=\frac{1}{3},$$

$\therefore$ $$x=\frac{-1+\frac{1}{3}\cdot 3}{1+\frac{1}{3}}=0,\quad y=\frac{-6+\frac{1}{3}\cdot 0}{1+\frac{1}{3}}=-4\frac{1}{2}.$$

因此，C点的坐标是$\left(0,-4\frac{1}{2}\right)$。

定比分点在物理学上研究重心时有用。

例 2 重量是m_1、m_2、m_3的三个质点，分别在$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$P_3(x_3, y_3)$三点上。求三个质点的重心的坐标。

解 先求m_1和m_2两个质点的重心$P'(x', y')$。

根据力学，重心 P' 把线段P_1P_2分成与重量 m_1、m_2 成反比的两个部分，就是$\lambda'=\frac{m_2}{m_1}$，所以

$$x'=\frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},$$

$$y'=\frac{y_1+\frac{m_2}{m_1}y_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}.$$

再求 m_1、m_2、m_3 三个质点的重心 $P(x,y)$。

因为在 P_1、P_2 两点上重量是 m_1 和 m_2 的质点，可以看作是集中在 $P'\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\right)$ 上重量是 m_1+m_2 的质点，所以 P 点就是 P' 上重量是 m_1+m_2 的质点和 P_3 上重量是 m_3的质点的重心。

因为 P 点分 $P'P_3$ 的比是 $\lambda=\frac{m_3}{m_1+m_2}$，所以

$$x=\frac{x'+\frac{m_3}{m_1+m_2}x_3}{1+\frac{m_3}{m_1+m_2}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},$$

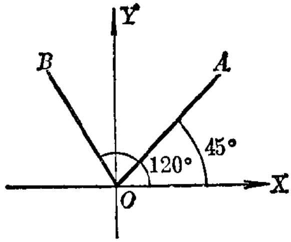
$$y=\frac{y'+\frac{m_3}{m_1+m_2}y_3}{1+\frac{m_3}{m_1+m_2}}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

因此，所求的重心的坐标是

$$\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}, \frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}\right).$$

习 题 一

1. 如图，$OA=16$，$OB=14$，求 A 点和 B 点的坐标。



(第 1 题)

2. 一只船从 O 点向北偏东 $60°$ 航行 40 海里*到 A 点，再向北偏东$45°$航行24海里到 B点，利用直角坐标系求出这时船在起点的东面多少海里，北面多少海里。画出图来。

3. (口答)(1) 在 x 轴上的点，它们的纵坐标都等于什么？

(2) 在 y 轴上的点，它们的横坐标都等于什么？

(3) 在两条坐标轴夹角平分线上的点，它们的横坐标和纵坐标之间有什么关系(分两种情况说明)？

4. 求边长是 a 的正方形 $ABCD$ 的四个顶点的坐标。

(1) 分别取一边 AB 和另一边 AD 所在的直线作 x 轴和 y 轴，并且以 C 点所在的象限作第 I 象限。

(2) 取它的中心作原点，并且取平行于它的边的两条直线作坐标轴。

5. 平行四边形 $ABCD$ 中的 $AB=8$，$AD=5$，$\angle A=60°$，如果取 A 作原点，AB 所在的直线作 x 轴，C 点所在的象限作第 I 象限，求它的各个顶点的坐标。

6. 分别求点(a, b)关于 x 轴、y 轴、原点的对称点的坐标。

7. A、B 两点的坐标如下，求线段 AB 在两条坐标轴上的投影的长度：

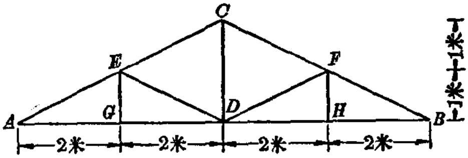
(1) $A(3,-4)$，$B(5,6)$；

---

* 1 海里≈1.852 公里。

(2) $A(-2,0)$，$B(-3,4)$。

8. 如图是一个屋架，要用坐标来表示各点 A、B、C、D、E、F、G、H 的位置，应该怎样设置坐标系比较好？设置以后，把各点的坐标求出来。



（第 8 题）

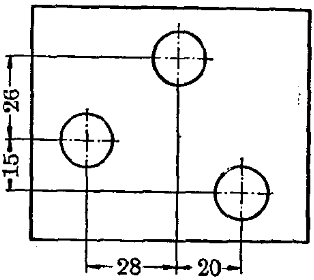
9. 求下列两点间的距离：

(1) $(2,1)$和$(5,-3)$；　　(2) $(-6,-2)$和$(0,5)$；

(3) $(at_1^2, 2\,at_1t_2)$和$(at_2^2, 0)$；$(a>0)$

(4) $(\cos\theta_1, \sin\theta_1)$和$(\cos\theta_2, \sin\theta_2)$.

10. 在图上选取适当的坐标系，利用两点间的距离公式，计算每两个圆孔的中心间的距离(尺寸单位是毫米)。



（第 10 题）

11. 求证以$(a\cos\theta, a\sin\theta)$为坐标的点，不论 θ 怎样变动，都在以原点为圆心，以$a(a>0)$为半径的圆上。

12. 以下列三点作顶点画三角形，由各个三角形各边的长判别它是不是等边三角形，是不是等腰三角形，是不是直角三角形：

(1) $(-4,3)$，$(2,-5)$，$(0,6)$；

(2) $(-6,8)$，$(6,-8)$，$(8,6)$；

(3) $(2,2)$，$(-2,-2)$，$(2\sqrt{3},-2\sqrt{3})$。

13. 已知两点$(a,5)$和$(0,-10)$的距离是 17，求 a 的值。

14. 一个动点$P(x,y)$和点$A(1,-2)$、$B(-3,7)$等距离，它的坐标应当满足什么条件？

15. 求 x 轴上和点 $(0,0)$、$(5,-3)$ 等距离的点的坐标。

16. 我解放军炮兵观察所以向东和向北的方向分别作为 x 轴和 y 轴的正方向，以地图上某一点为原点，测得火炮和目标的坐标分别是 $(500,200)$、$(1900,2100)$（单位：米），求火炮到目标的距离。

17. 甲船在东经 $118°40'$，北纬 $38°35'$，乙船在东经 $119°$，北纬 $38°27'$，把这一部分经纬度近似地看作直角坐标系，计算甲乙两船之间的距离和甲船到乙船的方位角（地球半径约是 6370 公里）。

18. （口答）求连结下列两点的线段的中点的坐标：

(1) $A(7,4)$ 和 $B(3,2)$；　　(2) $M(-3,1)$ 和 $N(2,7)$；

(3) $P_1(6,-4)$ 和 $P_2(-2,-2)$。

19. P_1、P_2 两点的坐标和 P 点分线段 P_1P_2 所成的比如下，求分点 P 的坐标：

(1) $(2,1)$、$(3,-9)$，$\lambda=4$；

(2) $(5,-2)$、$(5,3)$，$\lambda=\dfrac{2}{3}$；

(3) $(-4,1)$、$(5,4)$，$\lambda=2\dfrac{1}{2}$。

20. 已知两点 $P_1(7,8)$、$P_2(1,-6)$，求线段 P_1P_2 上两个三等分点的坐标。

21. 连结两点 $P_1(2,y)$、$P_2(x,6)$ 的线段的中点是 $P(3,2)$。求 x 和 y。

22. 三角形三个顶点是 $A(2,1)$、$B(-2,3)$、$C(0,-1)$，求三条中线的长。

23. 求证：(1) 直角三角形斜边中点到三个顶点的距离相等；

(2) 平行四边形的对角线互相平分。

24. 在点 $A(2,3)$ 和 $B(-7,0)$ 上分别有重量是 5 克和 4 克的两个质点，求它们的重心的坐标。

25. 在点 $M_1(2,3)$、$M_2(-3,8)$、$M_3(-5,0)$ 上分别有重量是 2

克、3 克、5 克的三个质点，求它们的重心的坐标.

26. 在$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$P_3(x_3, y_3)$、$P_4(x_4, y_4)$ 各点上分别有重量相等的质点，求证它们的重心 P 的坐标是

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\ y=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}.$$

Ⅱ. 曲线和方程

1.4 曲线和方程 前面我们利用直角坐标系建立了平面内所有的点和所有的实数对之间的一一对应关系. 现在我们来研究平面内的曲线和含有两个变量的方程之间的关系.

一条曲线，可以看作是适合于某种条件的点的轨迹*. 例如，圆是到定点的距离等于定长的点的轨迹，一条线段的垂直平分线是到这条线段的两端距离相等的点的轨迹.

我们说一条曲线是适合于某种条件的点的轨迹，是指：

(1) 曲线上所有的点都适合于这个条件；

(2) 适合于这个条件的所有的点，都在这条曲线上.

在坐标平面内，因为点可以用它的坐标(x, y)来表示，所以点所要适合的条件可以用含有 x 和 y 的一个方程来表示.

例如，l 是在第Ⅰ、第Ⅲ象限里两轴所成的角的平分线（图 1.9），那么 l 上所有的点的横坐标和纵坐标都相等；反过来，横坐标和纵坐标相等的所有的点，都在 l 上. 也就是说，横

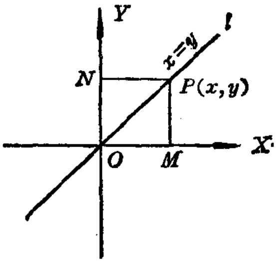


图 1.9

* 在这个意义下，曲线也包括直线在内.

坐标和纵坐标相等的点的轨迹是直线 l. 如果用 x 和 y 表示点的横坐标和纵坐标，那么"横坐标和纵坐标相等"这个条件就可以用方程"$x=y$"来表示。

从上面所说的可以知道，直线 l 和方程 $x=y$ 之间有如下的关系：

（1）l 上所有的点的坐标都适合于方程 $x=y$；

（2）坐标适合于方程 $x=y$ 的所有的点都在 l 上。

这样，方程 $x=y$ 就可以表示直线 l.

如果我们根据曲线上的点所要适合的条件，列出点的坐标 x 和 y 之间的一个方程，并且这个方程和曲线之间有下面的关系：

（1）曲线上所有的点的坐标都适合于这个方程；

（2）坐标适合于这个方程的所有的点，都在这条曲线上，

这样的方程就叫做这条曲线的方程，反过来，这条曲线也就叫做这个方程的曲线。

在曲线和方程之间建立了这样的关系以后，研究曲线的几何问题就可以化成研究方程的代数问题了。

例1 下列各点是不是在方程 $x^2+y^2=25$ 的曲线上？

（1）$P_1(3,-4)$；（2）$P_2(-2\sqrt{5},2)$。

解 判别一个点是不是在一条曲线上，只要看这个点的坐标是否适合于这条曲线的方程。

（1）因为 $3^2+(-4)^2=25$，所以 P_1 在方程 $x^2+y^2=25$ 的曲线上。

（2）因为 $(-2\sqrt{5})^2+2^2\neq25$，所以 P_2 不在方程 $x^2+y^2=25$ 的曲线上。

例 2 求下列方程的曲线的交点：

$$x^2+y^2-4x+8y-5=0,\ y=0.$$

解 同时在两条曲线上的点，它的坐标同时适合于两条曲线的方程．所以求两条曲线的交点的坐标，只要求出它们的方程所组成的方程组的实数解就可以了．

解方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x+8y-5=0, \\ y=0, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x_1=5, \\ y_1=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=0. \end{cases}$$

因此，所求交点的坐标是(5,0)和(-1,0)．

在这个例子里，方程 $y=0$ 的曲线就是 x 轴，因此上面求得的就是方程 $x^2+y^2-4x+8y-5=0$ 的曲线和 x 轴的交点．

曲线和 x 轴(或者 y 轴)的交点的横坐标(或者纵坐标)叫做曲线在 x 轴(或 y 轴)上的截距．例如，曲线 $x^2+y^2-4x+8y-5=0$ 在 x 轴上的截距是 5 和 -1．

从上面的例 2 还可以看出，求一条曲线在 x 轴(或者 y 轴)上的截距，只要在曲线的方程中令 $y=0$(或者 $x=0$)，求 x 的实数根(或者 y 的实数根)就可以了．

1.5 由曲线求它的方程 我们来看下面的两个例子．

例 1 设 A、B 两点的坐标分别是(-1,-1)和(3,7)，求线段 AB 的垂直平分线的方程．

解 设 $P(x,y)$ 是这条垂直平分线上任意一点(图 1.10)，那么

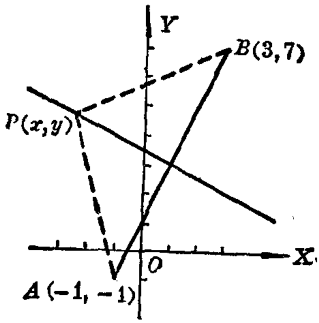


图 1.10